Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 72, 2005, стор. 63–66

Teor. Imovir. ta Matem. Statyst.
No. 72, 2005, pp. 63–66

ОБМЕЖЕНИЙ ЗАКОН ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА ДЛЯ МАТРИЧНО-НОРМОВАНИХ СУМ НЕЗАЛЕЖНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕКТОРІВ

УДК 519.21

В. О. КОВАЛЬ

Анотація. Нехай $(X_n, n \geqslant 1)$ — послідовність незалежних центрованих випадкових векторів в $\mathbf{R}^d$ з скінченним моментом порядку $p \in (2,3]$ і $(A_n, n \geqslant 1)$ — послідовність матриць розміру $m \times d$. Знайдено конструктивні достатні умови, при яких $\limsup_{n\to\infty} c_n \left\|A_n \sum_{i=1}^n X_i\right\| < \infty$ м.н., де $(c_n, n \geqslant 1)$ — деяка послідовність додатних чисел.

1. Вступ

В роботі $\mathbf{R}^d$ позначає евклідів простір вектор-стовпців з нормою $\|x\| = \left(x^\top x\right)^{1/2}$, де $\top$ — знак транспонування. Для довільної матриці A під її нормою $\|A\|$ розуміємо евклідову норму; $|A|$ і $\operatorname{tr} A$ — відповідно визначник і слід квадратної матриці A. Позначимо: $\chi(t) = (\ln\ln t)^{1/2}$ при $t \geqslant e^e$ і $\chi(t) = 1$ при $t < e^e$; м.н. — майже напевно.

Нехай $(X_n, n \geqslant 1)$ — послідовність незалежних центрованих випадкових векторів в $\mathbf{R}^d$. Покладемо

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i, \qquad B_n = \mathsf{E}\left(S_n S_n^\top\right), \qquad n \geqslant 1.$$

Припустимо, що $|B_{n_0}| \neq 0$ при деякому $n_0 \geqslant 1$ і позначимо через $B_n^{-1/2}$ квадратний корінь з оберненої матриці B_n^{-1} до матриці B_n, $n \geqslant n_0$. В роботі [1] був отриманий наступний результат.

Теорема 1.1. *Нехай виконуються такі умови:*

$$\lim_{n\to\infty} \|B_n\| = \infty; \tag{1}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \|B_{n+1}\| / \|B_n\| < \infty; \tag{2}$$

знайдуться додатні сталі c і τ такі, що при всіх $n \geqslant m \geqslant n_0$

$$\left\|B_n^{-1/2} B_m^{1/2}\right\| \leqslant c\left(|B_m| / |B_n|\right)^\tau; \tag{3}$$

і

$$\sum_{i=1}^\infty \chi^{-3}\left(\|B_i\|\right) \mathsf{E}\left\|B_i^{-1/2} X_i\right\|^3 < \infty.$$

Тоді

$$\limsup_{n\to\infty} \chi^{-1}\left(\|B_n\|\right) \left\|B_n^{-1/2} S_n\right\| = \sqrt{2} \quad \textit{м.н.}$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60F15.

Ключові слова і фрази. Закон повторного логарифма, суми незалежних випадкових векторів, матричні нормування.

В даній роботі буде показано, що коли відкинути умови (2), (3), то має місце обмежений закон повторного логарифма, тобто

$$\limsup_{n\to\infty} \chi^{-1}\left(\|B_n\|\right)\left\|B_n^{-1/2} S_n\right\| = L \quad \text{м.н.}, \tag{4}$$

де L — деяка невипадкова стала з інтервалу $[0, +\infty)$. При цьому умова $\mathsf{E}\|X_n\|^3 < \infty$, $n \geqslant 1$, буде замінена більш загальною умовою $\mathsf{E}\|X_n\|^p < \infty$, $n \geqslant 1$, при деякому $p \in (2, 3]$.

2. Основна частина

Доведемо спочатку одну загальну теорему.

Теорема 2.1. *Нехай $(A_n, n \geqslant 1)$ — послідовність матриць розміру $m \times d$. Припустимо, що знайдуться дві послідовності додатних чисел $(\varphi_n, n \geqslant 1)$ та $(f_n, n \geqslant 1)$ такі, що $(f_n, n \geqslant 1)$ монотонно зростає до нескінченності і виконуються наступні умови:*

- *при всіх $n > k \geqslant k_0 \geqslant 1$*

$$\sum_{i=k+1}^{n} \mathsf{E}\|A_n X_i\|^2 \leqslant \varphi_n \left(1 - \frac{f_k}{f_n}\right); \tag{5}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\varphi_n^{1/2} \chi(f_n)\right)^{-1} \|A_n\| = 0; \tag{6}$$

- *при деякому $p \in (2, 3]$*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sup_{n \geqslant i} \left[\left(\varphi_n^{1/2} \chi(f_n)\right)^{-p} \mathsf{E}\|A_n X_i\|^p\right] < \infty. \tag{7}$$

Тоді

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\varphi_n^{1/2} \chi(f_n)\right)^{-1} \|A_n S_n\| = L \quad \text{м.н.},$$

де L — деяка невипадкова стала з інтервалу $[0, +\infty)$.

Для доведення теореми 2.1 знадобляться дві леми. Через $\mathfrak{N}$ позначаємо множину всіх монотонно зростаючих (не обов'язково строго) до нескінченності послідовностей натуральних чисел.

Лема 2.1 ([2]). *Нехай $(\tilde{A}_n, n \geqslant 1)$ — послідовність матриць розміру $m \times d$ і виконуються наступні умови:*

$$\lim_{n\to\infty} \|\tilde{A}_n\| = 0; \tag{8}$$

для будь-якої послідовності $(n_j, j \geqslant 1) \in \mathfrak{N}$ знайдеться $p \in (2, 3]$ таке, що

$$\sum_{j=2}^{\infty} \sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} \mathsf{E}\|\tilde{A}_{n_j} X_i\|^p < \infty; \tag{9}$$

для будь-якої послідовності $(n_j, j \geqslant 1) \in \mathfrak{N}$ знайдеться $\varepsilon > 0$ таке, що

$$\sum_{j=2}^{\infty} \exp\left[-\varepsilon \left(\sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} \mathsf{E}\|\tilde{A}_{n_j} X_i\|^2\right)^{-1}\right] < \infty. \tag{10}$$

Тоді

$$\limsup_{n\to\infty} \|\tilde{A}_n S_n\| = L \quad \text{м.н.},$$

де L — деяка невипадкова стала з інтервалу $[0, +\infty)$.

Зауваження 2.1. В лемі 2.1 і в наступній лемі 2.2 покладаємо для коректності $e^{-1/0} = 0$.

Лема 2.2. *Нехай $(a_j, j \geqslant 1)$ — монотонно зростаюча до нескінченності послідовність додатних чисел, $a_1 \geqslant e^e$. Тоді при будь-якому $\varepsilon > 2$*

$$\sum_{j=2}^{\infty} \exp\left[-\varepsilon \cdot \chi^2(a_j) \cdot \left(1 - \frac{a_{j-1}}{a_j}\right)^{-1}\right] < \infty.$$

Доведення. Покладемо

$$v_j = \exp\left[-\varepsilon\chi^2(a_j)\left(1 - \frac{a_{j-1}}{a_j}\right)^{-1}\right], \qquad j \geqslant 2.$$

Скористаємося нерівністю

$$e^{-\varepsilon/(ab)} \leqslant \frac{b}{\varepsilon} e^{-\varepsilon/a},$$

вірною при будь-яких $\varepsilon, a, b > 0$, $a + b \leqslant 1$. Тоді дістанемо при $j \geqslant j_0$, $a_{j_0} \geqslant \exp(e^2)$:

$$\begin{aligned} v_j &= \exp\left[\frac{-\varepsilon/2}{\chi^2(a_j) \cdot \frac{1}{2}(1 - a_{j-1}/a_j)}\right] \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\left(1 - \frac{a_{j-1}}{a_j}\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\varepsilon\chi^2(a_j)\right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon}\frac{(\ln a_j)^{-\varepsilon/2}}{a_j}(a_j - a_{j-1}) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{a_{j-1}}^{a_j} a_j^{-1}(\ln a_j)^{-\varepsilon/2}\, dt \\ &\leqslant \frac{1}{\varepsilon}\int_{a_{j-1}}^{a_j} t^{-1}(\ln t)^{-\varepsilon/2}\, dt. \end{aligned}$$

Тоді

$$\sum_{j=j_0+1}^{\infty} v_j \leqslant \sum_{j=j_0+1}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon}\int_{a_{j-1}}^{a_j} t^{-1}(\ln t)^{-\varepsilon/2}\, dt = \frac{1}{\varepsilon}\int_{a_{j_0}}^{\infty} t^{-1}(\ln t)^{-\varepsilon/2}\, dt < \infty \quad \text{при } \varepsilon > 2.$$

Лема 2.2 доведена. □

Доведення теореми 2.1. Доведення теореми зводиться до перевірки умов леми 2.1 при $\tilde{A}_n = \left(\varphi_n^{1/2}\chi(f_n)\right)^{-1} A_n$, $n \geqslant 1$.

Виконання умови (8) випливає з (6).

Розглянемо умову (9):

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} \mathsf{E}\|\tilde{A}_{n_j} X_i\|^p &\leqslant \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} \sup_{n \geqslant i}\left[\left(\varphi_n^{1/2}\chi(f_n)\right)^{-p} \mathsf{E}\,\|A_n X_i\|^p\right] \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \sup_{n \geqslant i}\left[\left(\varphi_n^{1/2}\chi(f_n)\right)^{-p} \mathsf{E}\,\|A_n X_i\|^p\right] < \infty \end{aligned}$$

в силу умови (7).

Розглянемо умову (10). В силу (5) дістанемо:

$$\begin{aligned} \sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} \mathsf{E}\|\tilde{A}_{n_j} X_i\|^2 &= \left(\varphi_{n_j}\chi^2(f_{n_j})\right)^{-1} \sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} \mathsf{E}\,\|A_{n_j} X_i\|^2 \\ &\leqslant \left(\varphi_{n_j}\chi^2(f_{n_j})\right)^{-1} \varphi_{n_j}\left(1 - \frac{f_{n_{j-1}}}{f_{n_j}}\right) = \chi^{-2}(f_{n_j})\left(1 - \frac{f_{n_{j-1}}}{f_{n_j}}\right). \end{aligned}$$

Тепер виконання умови (10) випливає з леми 2.2 при $a_j = f_{n_j}$, $j \geqslant j_0 \geqslant 1$. Теорема 2.1 доведена. □

Теорема 2.2. *Припустимо, що $|B_{n_0}| \neq 0$ при деякому $n_0 \geqslant 1$, виконується умова* (1) *і при деякому $p \in (2,3]$*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \chi^{-p}(\|B_i\|)\,\mathsf{E}\big\|B_i^{-1/2}X_i\big\|^p < \infty. \tag{11}$$

Тоді має місце (4).

Доведення. Доведення теореми спирається на теорему 2.1 при $A_n = B_n^{-1/2}$, $n \geqslant n_0$. Нехай I — одинична матриця розміру $d \times d$. Розглянемо умову (5):

$$\sum_{i=k+1}^{n} \mathsf{E}\big\|B_n^{-1/2}X_i\big\|^2 = \operatorname{tr}\big(I - B_n^{-1/2}B_kB_n^{-1/2}\big) = d - \operatorname{tr}\big(B_n^{-1/2}B_kB_n^{-1/2}\big).$$

Позначимо через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d$ — власні значення матриці $B_n^{-1/2}B_kB_n^{-1/2}$. Очевидно, що вони додатні. Крім того, з тотожності

$$B_n^{-1/2}B_kB_n^{-1/2} = B_n^{-1/2}(B_k - B_n)\,B_n^{-1/2} + I$$

випливає, що $\lambda_i \leqslant 1$, $i = 1, 2, \ldots, d$. Тоді

$$\sum_{i=k+1}^{n} \mathsf{E}\left\|B_n^{-1/2}X_i\right\|^2 = d - (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_d)$$

$$\leqslant d - d\,(\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \cdots \cdot \lambda_d) = d\left(1 - \big|B_n^{-1/2}B_kB_n^{-1/2}\big|\right) = d\left(1 - \frac{|B_k|}{|B_n|}\right).$$

Таким чином, умова (5) виконана при $\varphi_n = d$, $f_n = |B_n|$, $n \geqslant n_0$, так як послідовність $(|B_n|, n \geqslant 1)$ монотонно зростає до нескінченності в силу умови (1).

Умова (6) виконується в силу того, що $|B_n| \to \infty$ при $n \to \infty$ та послідовність $(\|B_n^{-1/2}\|, n \geqslant n_0)$ обмежена.

Розглянемо умову (7). Так як при будь-яких $m \leqslant n$ матриця $B_n - B_m$ є невід'ємно визначеною, то звідси випливає, що $\|B_n^{-1/2}x\| \leqslant \|B_m^{-1/2}x\|$ при будь-якому $x \in \mathbf{R}^d$. Тому, враховуючи монотонне зростання послідовності $(\chi(|B_n|), n \geqslant 1)$, дістанемо

$$\sup_{n \geqslant i}\left[\chi^{-p}(|B_n|)\,\mathsf{E}\big\|B_n^{-1/2}X_i\big\|^p\right] \leqslant \chi^{-p}(|B_i|)\,\mathsf{E}\big\|B_i^{-1/2}X_i\big\|^p. \tag{12}$$

Так як $\chi(|B_i|) \sim \chi(\|B_i\|)$ при $i \to \infty$, то з (11) і (12) випливає виконання умови (7). Теорема 2.2 доведена. $\square$

3. Висновок

Проаналізовано достатні умови виконання закону повторного логарифма для операторно-нормованих сум незалежних центрованих випадкових векторів. Показано, що коли відкинути деякі обмеження на коваріаційні матриці сум випадкових векторів, то має місце обмежений закон повторного логарифма.

Література

1. V. Koval, *A new law of the iterated logarithm in R^d with application to matrix-normalized sums of random vectors*, J. Theoretical Probab. **15** (2002), № 1, 249–257.
2. V. V. Buldygin and V. A. Koval, *Convergence to zero and boundedness of operator-normed sums of random vectors with application to autoregression processes*, Georgian Math. J. **8** (2001), № 2, 221–230.

Житомирський державний технологічний університет, кафедра вищої математики, вул. Черняховського, 103, 10005 Житомир

Адреса електронної пошти: vkoval@com.zt.ua

Надійшла 31/08/2004