Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 73, 2005, стор. 134–145

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 73, 2005, pp. 134–145

# БАГАТОВИМІРНІ СЛАБКО СТАЦІОНАРНІ ВИПАДКОВІ ФУНКЦІЇ НА ПІВГРУПАХ

УДК 519.21

О. І. ПОНОМАРЕНКО І Ю. Д. ПЕРУН

Анотація. Розглядаються питання спектрального аналізу слабко стаціонарних випадкових функцій на інволютивних півгрупах у випадку, коли ці функції приймають значення в гільбертовому просторі. Одержані спектральні зображення таких функцій та їх корреляційних функцій є розширенням та уточненням відповідних результатів робіт [1]–[3].

## 1. Слабка стаціонарність векторних випадкових функцій на півгрупах

Позначимо через $H$ комплексний сепаребельний гільбертів простір і через $L_2(\Omega)$ гільбертів простір комплекснозначних випадкових величин другого порядку, визначених на деякому ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$.

Тоді множину $\mathcal{M}(\Omega, H) = \mathcal{L}(H, L_2(\Omega))$ всіх $L_2(\Omega)$-значних лінійних неперервних випадкових функціоналів на просторі $H$ можна розглядати як множину узагальнених випадкових елементів другого порядку в просторі $H$, визначених на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ (див. [4]). Кожний елемент $\Xi \in \mathcal{M}(\Omega, H)$ породжується визначеним з точністю до $\mathsf{P}$-еквівалентності звичайним випадковим елементом другого порядку $\xi$ зі значеннями в деякому квазіядерному розширенні $H_-$ простору $H$, $\Xi x \in (x|\xi)$, $x \in H$, де $(\cdot|\cdot)$ – скалярний добуток в $H$ (див. [5]). Якщо простір $H$ скінченновимірний, то $H_- = H$ і $\Xi$ ототожнюється з відповідним $H$-значним випадковим вектором $\xi$.

Математичне сподівання $m = \mathsf{E}\Xi$ елемента $\Xi \in \mathcal{M}(\Omega, H)$ є вектором з $H$, що однозначно визначається рівністю

$$\mathsf{E}(\Xi x) = (x|m), \qquad x \in H.$$

Коваріаційний оператор $[\Xi, \Psi]$ елементів $\Xi, \Psi \in \mathcal{M}(\Omega, H)$ є елементом комплексної алгебри $B(H)$ лінійних обмежених операторів в $H$, що однозначно визначається рівністю

$$\mathsf{E}(\Xi x)(\overline{\Psi y}) = ([\Xi, \Psi]x|y), \qquad x, y \in H.$$

Зауважимо, що $[\Xi, \Psi] = \Psi^*\Xi$, де $\Psi^*$ спряжений оператор для $\Psi\colon H \to L_2(\Omega)$, $(\Psi^*\eta|x) = (\eta|\Psi x)_{L_2(\Omega)}$, $x \in H$, $\eta \in L_2(\Omega)$. Позначимо через $B_+(H)$ опуклий конус додатних ермітових операторів в $B(H)$. Відмітимо, що $[\Xi, \Psi]$ як функція від $\Xi$ і $\Psi$ є півторалінійною $B(H)$-значною формою на $\mathcal{M}(\Omega, H)$, для якої $[\Xi, \Xi] \in B_+(H)$.

Стисло наведемо необхідні нам в подальшому відомості з теорії півгруп (див. [6]–[8]).

Нехай $\mathbb{S}$ абелева півгрупа з бінарною, асоціативною та комутативною операцією $\circ$. Півгрупа $\mathbb{S}$ називається інволютивною (або $*$-півгрупою), якщо на $\mathbb{S}$ визначена

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60G10, 60G57, 60G15.

*Ключові слова і фрази.* Випадкові функції, спектральні зображення, інволютивні півгрупи, слабка стаціонарність.

унарна операція $*$, $s \to s^*$, $s \in \mathbb{S}$, яка має властивості:

$$(s \circ t)^* = t^* \circ s^*, \qquad (s^*)^* = s, \qquad s, t \in \mathbb{S}.$$

Отже, інволюція $*$ на $\mathbb{S}$ є антиавтоморфізмом $\mathbb{S}$ в себе, що має властивість ідемпотентності. Інволютивну абелеву півгрупу $\mathbb{S}$ в подальшому будемо скорочено позначати як $(\mathbb{S}, \circ, *)$. В разі коли $\mathbb{S}$ має нейтральний елемент $e$, $e \circ s = s \circ e = s$, $s \in \mathbb{S}$, маємо, що $e^* = e$.

Кожну абелеву півгрупу $\mathbb{S}$ можна розглядати як інволютивну з тотожною інволюцією $s^* = s$, $s \in \mathbb{S}$, котру позначимо Id. Кожна абелева група $\mathbb{G}$ є інволютивною півгрупою з інволюцією, що є взяттям симетричного елемента, $g^* = g^{-1}$, $g \in \mathbb{G}$.

Одновимірні зображення (гомоморфізми) півгрупи $(\mathbb{S}, \circ, *)$ в множині комплексних чисел $\mathbb{C}$, що розглядається як $*$-півгрупа $(\mathbb{C}, \cdot), ^-))$ з операцією множення $\cdot)$ та інволюцією $^-)$ — комплексним спряженням, називаються напівхарактерами $(\mathbb{S}, \circ, *)$ або її елементарними гармоніками. Отже, кожний напівхарактер $\chi$ півгрупи $\mathbb{S}$ є функцією $\chi\colon \mathbb{S} \to \mathbb{C}$, що має властивості

$$\chi(s \circ t) = \chi(s)\chi(t), \qquad \chi(t^*) = \overline{\chi(t)}, \qquad s, t \in \mathbb{S}.$$

Коли $\mathbb{S}$ має нейтральний елемент $e$, то $\chi(e) = 1$.

Множина $\mathbb{S}^*$ всіх напівхарактерів півгрупи $\mathbb{S}$ є її найширшим дуальним об'єктом. Множина напівхарактерів, що задовольняють умову $\sup_{t \in \mathbb{S}} |\chi(t)| \le 1$, і є зображенням $(\mathbb{S}, \circ, *)$ в півгрупі $(\mathbb{D}, \cdot), ^-))$, де $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| \le 1\}$ — одиничний диск в $\mathbb{C}$, і позначається як $\widehat{\mathbb{S}}$. Множина напівхарактерів півгрупи $\mathbb{S}$, що мають одиничний модуль $|\chi(t)| = 1$, $t \in \mathbb{S}$, і є зображеннями $(\mathbb{S}, \circ, *)$ в $(\mathbb{T}, \cdot), ^-))$, де $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\}$ — одновимірний тор в $\mathbb{C}$, і позначається як $\widetilde{\mathbb{S}}$. Очевидно, що $\widetilde{\mathbb{S}} \subset \widehat{\mathbb{S}} \subset \mathbb{S}^*$. В разі коли $\mathbb{S}$ є групою, $t^* = t^{-1}$, $t \in \mathbb{S}$, дуальний об'єкт $\mathbb{S}^*$ є групою характерів групи $\mathbb{S}$, бо

$$|\chi(t)|^2 = \chi(t)\overline{\chi(t)} = \chi(t)\chi(t^{-1}) = \chi(t \circ t^{-1}) = \chi(e) = 1, \qquad t \in \mathbb{S}.$$

Наділяючи дуальні об'єкти $\widetilde{\mathbb{S}}$, $\widehat{\mathbb{S}}$ і $\mathbb{S}^*$ операцією поточкового множення напівхарактерів як бінарною операцією та комплексним спряженням у якості інволюції, перетворюємо їх в інволютивні півгрупи з одиницею $1_{\mathbb{S}}(t) \equiv 1$, $t \in \mathbb{S}$. Якщо наділити $\mathbb{S}^*$ топологією поточкової збіжності на $\mathbb{C}^{\mathbb{S}}$, то $\mathbb{S}^*$ стає цілком регулярним хаусдорфовим простором, і його підпівгрупа $\widehat{\mathbb{S}}$ має властивість компактності.

Зауважимо, що напівхарактери півгрупи $\mathbb{S}$ є додатно визначеними функціями на $\mathbb{S}$, тобто для всіх натуральних чисел $n \in \mathbb{N}$, комплексних чисел $c_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \ldots, n$, і елементів $t_j \in \mathbb{S}$, $j = 1, \ldots, n$,

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c_j \overline{c_k} \chi(t_j \circ t_k^*) = \left| \sum_{j=1}^{n} c_j \chi(t_j) \right|^2 \ge 0.$$

Функція $\alpha\colon \mathbb{S} \to \mathbf{R}_+ = [0, +\infty))$ називається абсолютним значенням $*$-півгрупи $\mathbb{S}$, якщо $\alpha(t^*) = \alpha(t)$ для всіх $t \in \mathbb{S}$ та $\alpha(s \circ t) \le \alpha(s)\alpha(t)$ для всіх $t, s \in \mathbb{S}$ (властивість субмультиплікативності $\alpha$). Якщо $\mathbb{S}$ має нейтральний елемент $e$, то припускається, що $\alpha(e) = 1$.

Функція $f\colon \mathbb{S} \to \mathbb{C}$ називається $\alpha$-обмеженою, якщо $|f(t)| \le c\alpha(t)$, $t \in \mathbb{S}$, для деякої константи $c > 0$. Функція $f$ називається експоненціально обмеженою, якщо вона обмежена хоча б для одного абсолютного значення на $\mathbb{S}$. Функція $f$ обмежена на $\mathbb{S}$, якщо $|f(t)| \le c$ для всіх $t \in \mathbb{S}$.

Позначимо через $\mathbb{S}_\alpha^*$ множину всіх $\alpha$-обмежених напівхарактерів $\chi$ на $\mathbb{S}$,

$$|\chi(t)| \le \alpha(t), \qquad t \in \mathbb{S}.$$

Наділимо $S_\alpha^*$ топологією поточкової збіжності.

**Означення 1.1.** Узагальненою випадковою функцією другого порядку на множині $T$, $T \neq \varnothing$, зі значеннями в $H$ називається сім'я $\{\Xi_t, t \in T\}$ узагальнених випадкових елементів $\Xi_t \in \mathcal{M}(\Omega, H)$.

**Означення 1.2.** Узагальнена випадкова функція другого порядку $\Xi_t$, $t \in \mathbb{S}$, на $*$-півгрупі $S$ називається слабко стаціонарною, якщо її функція середнього є сталою, $\mathsf{E}\,\Xi_t \equiv m \in H$, $t \in \mathbb{S}$, а корреляційна функція $[\Xi_t, \Xi_s]$, $s, t \in \mathbb{S}$, залежить тільки від аргументу $t \circ s^*$, тобто існує така $B(H)$-значна функція $R\colon \mathbb{S} \to B(H)$, що

$$[\Xi_t, \Xi_s] = R(t \circ s^*), \qquad t, s \in \mathbb{S}.$$

Надалі без втрати загальності можна вважати, що $m = 0$ (інакше можна перейти до стаціонарної функції $\widetilde{\Xi_t}$, $(\widetilde{\Xi_t}x) = (\Xi_t x) - (x|m)$, $t \in \mathbb{S}$, $x \in H$, з $\mathsf{E}\,\Xi_t \equiv 0$).

Зауважимо, що функція $R\colon \mathbb{S} \to B(H)$, буде корреляційною для деякої слабко стаціонарної виподкової функції $\{\Xi_t, t \in \mathbb{S}\}$ тоді і тільки тоді, коли $R(t)$ є додатно визначеною, тобто для всіх $n \in N$, $t_j \in \mathbb{S}$, $x_j \in H$, $j = 1, \ldots, n$,

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \big(R(t_j \circ t_k^*) x_j | x_k\big) \geq 0$$

(див. [1, 2]).

Наведемо декілька простих прикладів слабко стаціонарних функцій на $*$-півгрупах.

**Приклад 1.** Випадковий гармонічний поліном $\Psi_t$, $t \in \mathbb{S}$, з некорельованими (ортогональними) амплітудами $Z_k \in \mathcal{M}(\Omega, H)$, $[Z_k, Z_j] = \delta_{kj} F_k$, $\mathsf{E}\, Z_k = 0$, $k, j = 1, \ldots, n$, де $\delta_{kj}$ — $\delta$-Кронекера, $F_k \in B_+(H)$, вигляду

$$\Psi_t = \sum_{k=1}^{n} \chi_k(t) Z_k, \qquad t \in \mathbb{S},\ \chi_k \in \mathbb{S}^*, \tag{1}$$

є стаціонарною функцією на $\mathbb{S}$ з $\mathsf{E}\,\Psi_t = 0$, $t \in \mathbb{S}$, і корреляційною функцією

$$[\Psi_t, \Psi_s] = \sum_{k=1}^{n} \chi_k(t \circ s^*) F_k, \qquad t, s \in \mathbb{S}. \tag{2}$$

**Приклад 2.** Нехай $W_t$, $t \in \mathbf{R}_+ = [0, \infty)$, є узагальненим процесом стандартного броунівського руху в $H$, тобто гауссівським процесом в $H$ з середнім $\mathsf{E}\, W_t \equiv 0$ та корреляційною функцією

$$[W_t, W_s] = (t \wedge s) I,$$

$t, s \in \mathbf{R}_+$, $t \wedge s = \min(t, s)$, $I$ — одиничний оператор в $B(H)$. Якщо розглядати $\mathbf{R}_+$ як абелеву $*$-півгрупу з операцією $\wedge$ та інволюцією $\mathrm{Id}$, $(\mathbf{R}_+, \wedge, \mathrm{Id})$, то $W_t$ є стаціонарним на ній.

**Приклад 3.** Нехай $W_t$, $t \in \mathbf{R}_+^n$, випадкове поле Ченцова–Вінера в $H$ (багатопараметричний броунівський рух), тобто $W_t$ є гауссівським полем, $W_t \in \mathcal{M}(\Omega, H)$, $t \in \mathbf{R}_+^n$, $\mathsf{E}\, W_t \equiv 0$ і

$$[W_t, W_s] = \prod_{j=1}^{n} (t_j \wedge s_j) Q,$$

$t = (t)_{j=1}^n \in \mathbf{R}_+^n$, $s = (s_j)_{j=1}^n \in \mathbf{R}_+^n$, де $Q \in B_+(H)$, $Q > 0$. Тоді розглядаючи $\mathbf{R}_+^n$ як $*$-півгрупу, $(\mathbf{R}_+^n, \circ, \mathrm{Id})$, $t \circ s = \prod_{j=1}^n (t_j \wedge s_j)$, $t, s \in \mathbf{R}_+^n$, маємо, що $W_t$ є стаціонарним (або однорідним) на ній.

**Приклад 4.** Нехай $(U, \mathcal{A})$ деякий вимірний простір ($\mathcal{A}$ — $\sigma$-алгебра підмножин множини $U$) і $Z\colon \mathcal{A} \to \mathcal{M}(\Omega, H)$ узагальнена випадкова міра в $H$ на $\mathcal{A}$ ($\sigma$-адитивність $Z$ розуміється у сильній топології простору $\mathcal{L}(H, L_2(\Omega))$), що має нульове середнє $\mathsf{E}\, Z(\triangle) = 0$, $\triangle \in \mathcal{A}$, та властивість ортогональності: існує така операторна міра $F\colon \mathcal{A} \to B_+(H)$ (стуктурна міра для $Z$), що

$$[Z(\triangle_1), Z(\triangle_2)] = F(\triangle_1 \cap \triangle_2), \qquad \triangle_1, \triangle_2 \in \mathcal{A}$$

($\sigma$-адитивність $F$ розуміється у слабкій топології $B(H)$). Розглядаючи $\mathcal{A}$ як інволютивну півгрупу $(\mathcal{A}, \cap, \mathrm{Id})$ маємо, що міра $Z$ є стаціонарною функцією на $\mathcal{A}$.

**Приклад 5.** Нехай $H$ і $M$ — дійсні гільбертові простори і $\mathcal{L}(M, H)$ — банахів простір лінійних неперервних операторів, що діють з $M$ в $H$, а $Z$ — випадкова ортогональна міра в $H$ на $(U, \mathcal{A})$ із структурною мірою $F$ вигляду $F(\Delta) = \mu(\Delta)Q$, де $Q \in B_+(H)$ і $\mu$ — невід'ємна числова скінченна міра на $(U, \mathcal{A})$. Тоді для сильно вимірних функцій $A\colon U \to \mathcal{L}(M, H)$, для яких $\int_U \|A(u)\|^2 \,\mu(du) < \infty$, визначені стохастичні інтеграли

$$I_\triangle(A) = \int_\triangle Z(du) A(u), \qquad \triangle \in \mathcal{A},$$

$I_\triangle(A) \in \mathcal{M}(\Omega, M)$ (див. [9]), причому $\mathsf{E}\, I_\triangle(A) = 0$, $\triangle \in \mathcal{A}$,

$$[I_{\triangle_1}(A_1), I_{\triangle_2}(A_2)] = \int_{\triangle_1 \cap \triangle_2} A_2^*(u) Q A_1(u) \,\mu(du) \in B(M).$$

Тоді $I_\triangle(A)$, $\triangle \in \mathcal{A}$, є стаціонарними функціями на $(\mathcal{A}, \cap, \mathrm{Id})$.

**Теорема 1.** (i) *Якщо узагальнена випадкова функція $\Xi_t$, $t \in \mathbb{S}$, де $\mathbb{S}$ — $*$-півгрупа, є слабко стаціонарною, то її корреляційне ядро $K(t,s) = [\Xi_t, \Xi_s]$ має таку властивість крос-інволютивної інваріантності:*

$$K(t \circ a, s \circ b) = K(t \circ b^*, s \circ a^*), \qquad t, s, a, b \in \mathbb{S}. \tag{3}$$

(ii) *Якщо $\mathbb{S}$ має нейтральний елемент $e$, то з властивості* (3) *для випадкової функції $\Xi_t$, $t \in \mathbb{S}$, $\mathsf{E}\, \Xi_t \equiv 0$, випливає слабка стаціонарність $\Xi_t$, $t \in \mathbb{S}$.*

(iii) *Якщо $\mathbb{S}$ є групою, то властивість* (3) *еквівалентна класичній трансляційній інваріантності ядра $K$:*

$$K(t \circ a, s \circ a) = K(t, s), \qquad t, s, a \in \mathbb{S}. \tag{4}$$

*Доведення.* Твердження (i) випливає з рівності

$$(t \circ a) \circ (s \circ b)^* = t \circ a \circ b^* \circ s^* = (t \circ b^*) \circ (s \circ a^*)^*.$$

Твердження (ii) є наслідком співвідношення

$$K(t, s) = K(t \circ e, e \circ s) = K(t \circ s^*, e \circ e) = R(t \circ s^*)$$

через властивість (3). Твердження (iii) теж неважко перевірити безпосередньо. Якщо $\mathbb{S}$ — група і $s^* = s^{-1}$, то припускаючи, що для функції $\Xi_t$, $t \in S$, з нульовим середнім виконується властивість (3), покладаючи в (3) $a = s^{-1}$ і $b = a$, маємо

$$K(t \circ a, s \circ a) = K(t \circ s^{-1}, e \circ e) = K(t, s), \tag{5}$$

і отже функція $\Xi_t$, $t \in \mathbb{S}$, є стаціонарною. Навпаки, коли функція $\Xi_t$, $t \in \mathbb{S}$, є стаціонарною, то виконується співвідношення (5). Замінивши в останній рівності $t$ на $t \circ a$ і $s$ на $s \circ b$, маємо

$$K(t \circ a, s \circ b) = K((t \circ a) \circ (b^* \circ s^*), e) = K((t \circ b^*) \circ (a \circ s^*), e) = K(t \circ b^*, s \circ a^*).$$

Таким чином, для випадку групи (3) і (4) еквівалентні. $\square$

## 2. Спектральні зображення стаціонарних функцій

Нехай $\mathbb{S}$ — абелева $*$-півгрупа з нейтральним елементом $e$ і $\alpha\colon \mathbb{S} \to \mathbf{R}_+$ деяке абсолютне значення на $\mathbb{S}$.

**Теорема 2.** *Якщо $\Xi_t$, $t \in \mathbb{S}$, узагальнена стаціонарна випадкова функція в $H$, корреляційна функція якої $R\colon \mathbb{S} \to B(H)$ є $\alpha$-обмеженою,*

$$\|R(t)\| \leq c\alpha(t), \qquad t \in \mathbb{S}, \tag{6}$$

*то $R$ дозволяє спектральне зображення вигляду*

$$R(t) = \int_{\mathbb{S}^*} \chi(t)\, F(d\chi), \qquad t \in \mathbb{S}, \tag{7}$$

*де $F$ — єдиним чином визначена $B_+(H)$-значна міра Радона з компактним носієм на $\mathbb{S}^*$ (спектральна міра·стаціонарної функції $\Xi_t$). Якщо функція $R$ є обмеженою, $\|R(t)\| \leq c$, $t \in \mathbb{S}^*$, то в зображенні (7) $\mathbb{S}^*$ можна замінити $\widehat{\mathbb{S}}$. При цьому сама стаціонарна функція $\Xi_t$, $t \in \mathbb{S}$, дозволяє спектральне зображення*

$$\Xi_t = \int_{\mathbb{S}^*} \chi(t)\, \Phi(d\chi), \qquad t \in \mathbb{S}^*, \tag{8}$$

*де $\Phi$ випадкова $\mathcal{M}(\Omega, H)$-значна міра Радона на $\mathbb{S}^*$ з компактним носієм, така що*

$$[\Phi(\Delta_1), \Phi(\Delta_2)] = F(\Delta_1 \cap \Delta_2)$$

*(випадкова спектральна міра функції $\Xi_t$). Якщо $R$ є обмеженою, то $\mathbb{S}^*$ в зображенні (8) можна замінити на $\widehat{\mathbb{S}}$.*

*Доведення.* Розглянемо в $H$ півторалінійну форму $(R(t)x|y)$, $x, y \in H$, що залежить від параметра $t \in \mathbb{S}$. Ця форма однозначно відновлюється за відповідною квадратичною формою $r_x(t) = (R(t)x|x)$, $x \in H$, через відому поляризаційну формулу

$$(R(t)x|y) = \frac{1}{4}\big(r_{x+y}(t) - r_{x-y}(t) + ir_{x+iy}(t) - ir_{x-iy}(t)\big),$$

де $i$ — уявна одиниця в $\mathbb{C}$. При кожному $x \in H$ комплекснозначна функція $r_x(t)$, $t \in \mathbb{S}$, є додатно визначеною та експоненційно обмеженою через умову (6). Тому за аналогом теореми Бохнера–Хінчина для півгрупи $\mathbb{S}$ (див. [6, 7]) існує така однозначно визначена додатна міра Радона $\mu_x$ на $\mathbb{S}^*$ з компактним носієм, що

$$r_x(t) = \int_{\mathbb{S}^*} \chi(t)\, \mu_x(d\chi), \qquad t \in \mathbb{S}. \tag{9}$$

Причому в разі обмеженості $R$ множину $\mathbb{S}^*$ у зображенні (9) можна замінити на $\widehat{\mathbb{S}}$. Тоді для векторів $x, y \in H$ будемо мати, що

$$(R(t)x|y) = \int_{\mathbb{S}^*} \chi(t)\, \mu_{x,y}(d\chi), \qquad t \in \mathbb{S},$$

де $\mu_{x,y}$ — комплекснозначна міра Радона на $\mathbb{S}^*$, що визначена рівністю

$$\mu_{x,y} = \frac{1}{4}\big(\mu_{x+y} - \mu_{x-y} + i\mu_{x+iy} - i\mu_{x-iy}\big).$$

В силу попереднього $\mu_{x,y}(\Delta)$ для кожної вимірної множини $\Delta$ в $\mathbb{S}^*$ як функція аргументів $(x, y) \in H \times H$ є півторалінійною формою, що рівномірно по $\Delta$ обмежена на $H \times H$:

$$|\mu_{x,y}(\Delta)| \leq |\mu_{x,y}(\mathbb{S}^*)| = |(R(e)x|y)| \leq \|R(e)\| \cdot \|x\| \cdot \|y\|.$$

Тому існує єдиним чином визначена $B(H)$-значна міра Радона $F$ на $\mathbb{S}^*$, така що

$$\mu_{x,y}(\Delta) = (F(\Delta)x|y), \qquad x, y \in H,$$

для всіх вимірних множин $\Delta$ в $\mathbb{S}^*$. Неважко переконатися, що міра $F$ є $B_+(H)$-значною і отже, має місце спектральне зображення (7).

Зображення (8) стаціонарної функції $\Xi_t$, $t \in \mathbb{S}^*$, є наслідком зображення

$$R(t \circ s^*) = \int_{\mathbb{S}^*} \chi(t)\overline{\chi(s)}\, F(d\chi)$$

та теореми 3 з роботи [10] про спектральні зображення узагальнених випадкових функцій в векторних просторах. Теорему доведено. □

Розглянемо дещо інший варіант спектральних зображень для багатовимірних стаціонарних функцій на $*$-півгрупах $\mathbb{S}$ без припущення про існування нейтрального елемента $e$ в $\mathbb{S}$ (тобто коли $\mathbb{S}$ не обов'язково є моноїдом).

**Теорема 3.** *Якщо $\Xi_t$, $t \in \mathbb{S}$, стаціонарна випадкова функція на $*$-півгрупі $(\mathbb{S}, \circ)$ в комплексному гільбертовому просторі $H$, $\alpha$ — абсолютне значення на $\mathbb{S}$ і корреляційне ядро $K$ функції $\Xi_t$ є $\alpha$-обмеженим на $\mathbb{S}$, тобто для всіх $t, s \in \mathbb{S}$ і $x \in H$*

$$(K(t \circ s, t \circ s)x|x)_H \le \alpha^2(s)(K(t,t)x|x)_H, \tag{10}$$

*то існують такі $B_+(H)$-значна міра Радона $F$ та $\mathcal{M}(\Omega, H)$-значна випадкова міра Радона $\Phi$ на $\mathbb{S}^*_\alpha$*

$$[\Phi(\Delta_1), \Phi(\Delta_2)] = F(\Delta_1 \cap \Delta_2),$$

*що мають місце спектральні розклади*

$$R(t \circ s^*) = [\Xi_t, \Xi_s] = \int_{\mathbb{S}^*_\alpha} \chi(t \circ s^*)\, F(d\chi), \tag{11}$$

$$\Xi_t = \int_{\mathbb{S}^*_\alpha} \chi(t)\, \Phi(d\chi), \qquad t, s \in \mathbb{S}.$$

*Доведення.* Розклад (11) для корреляційної функції $R$ функції $\Xi_t$ випливає з теореми 15.7 роботи [8], оскільки $R$ є додатно визначеною $B(H)$-значною та $\alpha$-обмеженою в розумінні роботи [8] функцією на $\mathbb{S}$. Інші результати теореми є наслідками розкладу (11) для $R$, котрі обґрунтовуються міркуваннями аналогічними тим, що використовуються при доведенні теореми 2. □

**Наслідок 2.1.** *Нехай простір $H$ має розмірність $n$, $\dim H = n$, і $\{\varphi\}_{i=1}^n$ — ортонормований базис в $H$. Тоді стаціонарну функцію $\Xi_t$, $t \in \mathbb{S}$, в $H$ можна ототожнювати з $n$-вимірною випадковою функцією*

$$\xi(t) = \{\xi_j(t)\}_{j=1}^n, \quad t \in \mathbb{S}, \qquad \xi_j(t) = \Xi_t \varphi_j, \quad j = 1, \ldots, n,$$

*компоненти якої є стаціонарними та стаціонарно пов'язаними числовими випадковими функціями з нульовими середніми,*

$$\mathsf{E}\, \xi_j(t)\overline{\xi_k(s)} = r_{jk}(t \circ s^*) = (R(t \circ s^*)\varphi_j|\varphi_k)_H, \qquad j, k = 1, \ldots, n,$$

*де $R(t)$ — корреляційна функція для $\Xi_t$, $t \in \mathbb{S}$, яку можна ототожнювати з матричною функцією $\{r_{jk}(t)\}_{j,k=1}^n$. При $\alpha$-обмеженості корреляційного ядра $K$ функції $\Xi_t$, $t \in \mathbb{S}$, існують такі однозначно визначені матрична міра Радона $F = \{F_{jk}\}_{j,k=1}^n$ та випадкова векторна міра Радона $Z = \{Z_j\}_{j=1}^n$ на $\mathbb{S}^*_\alpha$ (спектральна та випадкова спектральна міри функції $\xi(t)$), що мають місце спектральні розклади*

$$r_{jk}(t) = \int_{\mathbb{S}^*_\alpha} \chi(t)\, F_{jk}(d\chi), \qquad j, k = 1, \ldots, n, \tag{12}$$

$$\xi_j(t) = \int_{\mathbb{S}^*_\alpha} \chi(t)\, Z_j(d\chi), \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{13}$$

*де*

$$\mathsf{E}\, Z_j(\Delta_1)\overline{Z_k(\Delta_2)} = F_{jk}(\Delta_1 \cap \Delta_2). \tag{14}$$

Твердження наслідку (12)–(14) випливають з результатів теореми 3, якщо в них покласти $F_{jk}(\Delta) = (F(\Delta)\varphi_j|\varphi_k)_H$ та $Z_j(\Delta) = \Phi(\Delta)\varphi_j$, $k, j = 1, \ldots, n$, для вимірних множин $\Delta$ в $\mathbb{S}^*_\alpha$.

Зауважимо, що при застосуваннях загальних результатів про спектральні зображення стаціонарних випадкових функцій та їх корреляційних функцій до конкретних випадків $*$-півгруп напівхарактери останніх звичайно пов'язуються з деяким параметром $\lambda \in \Lambda$, де множина $\Lambda$ ізоморфна $\mathbb{S}^*$ так, що $\mathbb{S}^* = \{\chi_\lambda(t),\ t \in \mathbb{S}\colon \lambda \in \Lambda\}$. Тоді спектральні зображення набувають вигляду

$$R(t \circ s^*) = \int_\Lambda \chi_\lambda(t \circ s^*)\, F(d\lambda), \qquad \Xi_t = \int_\Lambda \chi_\lambda(t)\, \Phi(d\lambda). \tag{15}$$

Очевидно, що зображення (1) випадкового гармонійного поліному на $\mathbb{S}$ та зображення (2) його корреляційної функції є спектральними їх зображеннями з дискретним спектром (тобто відповідні спектральні міри зосереджені на скінченній множині характерів, що беруть участь в зображеннях).

**Приклад 6.** Для багатопараметричного броунівського руху Ченцова $W_t$, $t \in \mathbf{R}^n_+$, в $H$, що є стаціонарним полем на півгрупі $\mathbb{S} = (\mathbf{R}^n_+, \wedge^n, \mathrm{Id})$, враховуючи, що напівхарактери $\mathbb{S}$ мають вигляд

$$\chi_\lambda(t) = \prod_{j=1}^n 1_{[\lambda_j, +\infty)}(t_j), \qquad \lambda = (\lambda_j)_{j=1}^n \in \Lambda = \mathbf{R}^n_+,\ t = (t_j)_{j=1}^n \in \mathbf{R}^n_+,$$

де $1_A$ позначає індикатор множини $A$, отримуємо таке спектральне зображення $W_t$:

$$W_t = \int_{\mathbf{R}^n_+} \chi_\lambda(t)\, dW_\lambda = \int_0^{t_1} \ldots \int_0^{t_n} dW_\lambda, \qquad t \in \mathbf{R}^n_+,$$

і отже самий $W_t$ є своєю спектральною випадковою функцією.

**Приклад 7.** Нехай $f(s)$, $s \in \mathbf{R}^n_+$, вимірна випадкова функція зі значеннями в $H$, визначена на тому ж самому ймовірнісному просторі, що й поле $W_s$, $s \in \mathbf{R}^n_+$, з попереднього прикладу. Припустимо, що $f(s)$ не випереджує $W_s$ для всіх $s \in \mathbf{R}^n_+$ і що функція $\mathsf{E}\,\|f(s)\|^2$ є локально інтегровною на $\mathbf{R}^n_+$ (див. [5]). Тоді визначені стохастичні інтеграли типу інтегралів Іто (які вони узагальнюють)

$$I_t(f) = \int_0^{t_1} \ldots \int_0^{t_n} dW_s f(s), \qquad t = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbf{R}^n_+,$$

що мають властивості

$$\mathsf{E}\, I_t(f) = 0, \qquad t \in \mathbf{R}^n_+,$$

$$\mathsf{E}\, I_s(f) I_t(g) = \int_0^{t_1 \wedge s_1} \ldots \int_0^{t_n \wedge s_n} \mathsf{E}\big(f(\lambda)|g(\lambda)\big)_H\, d\lambda, \qquad s, t \in \mathbf{R}^n_+.$$

Отже, $I_t(f)$, $t \in \mathbf{R}^n_+$, є стаціонарним випадковим полем на $S = (\mathbf{R}^n_+, \bigwedge^n, I_d)$. Використовуючи результати попереднього прикладу, легко побачити, що поле $I_t(f)$, $t \in \mathbf{R}^n_+$, має спектральну структурну міру

$$F(d\lambda) = \mathsf{E}\,\|f(\lambda)\|^2\, d\lambda, \qquad \lambda \in \mathbf{R}^n_+,$$

та спектральну випадкову міру

$$\Phi(d\lambda) = dW_\lambda f(\lambda), \qquad \lambda \in \mathbf{R}^n_+.$$

Розглянемо питання про зведення узагальненої випадкової функції другого порядку в $H$, визначеної на деякій множині $\mathbb{V}$ шляхом перетворення її простору аргументів до стаціонарної на $*$-півгрупі з отриманням відповідних спектральних зображень. Для числових процесів і полів подібні зведення розглядалися в роботах [3, 11].

**Теорема 4.** *Нехай $\Xi_v$, $v \in \mathbb{V}$, узагальнена випадкова функція в $H$, задана на множині $\mathbb{V}$, $\Xi_v \in \mathcal{M}(\Omega, H)$, і $(\mathbb{S}, \bullet, *)$ інволютивна півгрупа з нейтральним елементом. Припустимо, що існує таке бієктивне відображення $f$ множини $\mathbb{V}$ на $\mathbb{S}$, що кореляційне ядро $[\Xi_v, \Xi_u] = K(v,u)$ функції $\Xi_v$ має форму*

$$K(v,u) = R((f(v)) \bullet (f(u))^*), \qquad v,u \in \mathbb{V}, \tag{16}$$

*де $R$ є експоненціально обмеженою $B(H)$-значною додатно визначеною функцією на $\mathbb{S}$. Тоді $K(v,u)$, $v,u \in \mathbb{V}$, та функція $\Xi_v$, $v \in \mathbb{V}$, дозволяють спектральні зображення, які будуть деталізовані в доведенні теореми.*

*Доведення.* Бієкція $f\colon \mathbb{V} \to \mathbb{S}$ породжує на $\mathbb{V}$ структуру інволютивної півгрупи $(\mathbb{V}, \bigstar, \sharp)$, $v \bigstar u = f^{-1}((f(v)) \bullet (f(u)))$, $v^\sharp = f^{-1}((f(v))^*)$, $v,u \in \mathbb{V}$. Відображення $f$ є ізоморфним для півгруп $\mathbb{V}$ і $\mathbb{S}$. Напівхарактери $\mathbb{V}$ при цьому матимуть вигляд $\widetilde{\chi} = \chi \circ f$, $\chi \in \mathbb{S}^*$, а додатно визначені (відносно структури інволютивної півгрупи) $B(H)$-значні функції на $\mathbb{V}$ матимуть вигляд $\widetilde{R} = R \circ f$, де $R$ — $B(H)$-значні додатно визначені функції на $\mathbb{S}$.

Тоді через теорему 2 функція $\widetilde{R}$ має спектральне зображення вигляду

$$\widetilde{R}(v) = R(f(v)) = \int_{\mathbb{S}^*} \chi(f(v))\, F(d\chi) = \int_{\mathbb{V}^*} \widetilde{\chi}(v)\, F_f(d\widetilde{\chi}), \qquad v \in \mathbb{V}, \tag{17}$$

де $F_f$ позначає образ $B_+(H)$-значної міри $F$ відносно відображення $\chi \to \widetilde{\chi} = \chi \circ f$ з $\mathbb{S}^*$ в $\mathbb{V}^*$. Із зображення (17) випливає, що через припущення теореми (16) для корреляційного ядра $K$ функції $\Xi_v$, $v \in \mathbb{V}$, має місце спектральне зображення

$$K(v,u) = \int_{\mathbb{S}^*} \chi(f(v))\overline{\chi(f(u))}\, F(d\chi) = \int_{\mathbb{V}^*} \widetilde{\chi}(v)\overline{\widetilde{\chi}(u)}\, F_f(d\widetilde{\chi}), \qquad v,u \in \mathbb{V}, \tag{18}$$

де $F$ і $F_f$ є єдиним чином визначені $B_+(H)$-значні міри на $\mathbb{S}^*$ і $\mathbb{V}^*$ відповідно (спектральні міри функції $\Xi_v$).

Тоді за результатами теореми 3 про інтегральні спектральні зображення узагальнених випадкових функцій з [10] випливає, що для $\Xi_v$, $v \in \mathbb{V}$, мають місце спектральні розклади

$$\Xi_v = \int_{\mathbb{S}^*} \chi(f(v))\, \Phi(d\chi) = \int_{\mathbb{V}^*} \widetilde{\chi}(v)\, \Phi_f(d\widetilde{\chi}), \qquad v \in \mathbb{V}, \tag{19}$$

де $\Phi$ та $\Phi_f$ — $\mathcal{M}(\Omega, H)$-значні випадкові ортогональні міри на $\mathbb{S}^*$ та $\mathbb{V}^*$ відповідно зі структурними мірами $F$ та $F_f$ відповідно (випадкові спектральні міри функції $\Xi_v$). $\square$

**Приклад 8.** Нехай $\Xi_t$, $t = (t_1, t_2) \in \mathbf{R}^2_{++} = (0, +\infty)^2$, нормалізований броунівський лист Леві в $H$, тобто $\mathcal{M}(\Omega, H)$-значне гауссівське поле з корреляційною функцією

$$K(t,s) = \frac{\|t\| + \|s\| - \|t-s\|}{2\sqrt{\|t\| \cdot \|s\|}} I, \qquad t,s \in \mathbf{R}^2_{++},\ u = (u_1, u_2) \in \mathbf{R}^2,$$

де $I$ — одиничний оператор в $H$. Перетворення $f(t) = (\ln\|t\|, \operatorname{arctg}(t_2/t_1))$ зводить $\Xi_t$ до слабко однорідного випадкового поля $\Psi_{f(t)}$ на $\mathbb{S} = \mathbf{R}^2$, оскільки

$$K(t,s) = R(f(t) - f(s)),$$

де

$$R(u) = \left[\operatorname{ch}\left(\frac{u_1}{2}\right) - \sqrt{\frac{(\operatorname{ch}(u_1/2) - \cos u_2)}{2}}\right] I, \qquad u = (u_1, u_2) \in \mathbf{R}^2.$$

Інший варіант поширення спектральних зображень на нестаціонарні випадкові функції на півгрупах — це розгляд підходящих перетворень просторів значень стаціонарних функцій.

**Приклад 9.** Якщо $\Xi_t$, $t \in \mathbb{S}$, — стаціонарна випадкова функція на $*$-півгрупі $\mathbb{S}$ в $H$, що дозволяє (можливо при деяких додаткових умовах) спектральні зображення типу тих, що описані в теоремі 2 або 3, та які в загальному вигляді втілюються інтегральними розкладами виду (15), і $A$ — деякий оператор з $B(H)$, а $Q$ — деякий оператор в $B(L_2(\Omega))$, то функція $\Psi_t = Q\Xi_t A$, $t \in \mathbb{S}$, буде тією, що гармонізується на $\mathbb{S}$, тобто мати спектральне зображення вигляду

$$\Psi_t = \int_\Lambda \chi_\lambda(t)\, Z(d\lambda), \qquad t \in \mathbb{S},$$

де $Z$ випадкова $\mathcal{M}(\Omega, H)$-значна міра на $\Lambda$ вигляду $Z(d\lambda) = Q\,\Phi(d\lambda)A$, де $\Phi$ — спектральна випадкова міра функції $\Xi_t$, $t \in \mathbb{S}$ (див. [15]). При цьому корреляційне ядро $K(t,s) = [\Psi_t, \Psi_s]$, $t, s \in \mathbb{S}$, функції $\Psi_t$ буде мати спектральне зображення

$$K(t,s) = \int_\Lambda \int_\Lambda \chi_{\lambda_1}(t)\overline{\chi_{\lambda_2}(s)}\, G(d\lambda_1, d\lambda_2), \qquad t, s, \in \mathbb{S},$$

де $G$ — $B(H)$-значна додатно визначена біміра на $\Lambda \times \Lambda$

$$G(d\lambda_1, d\lambda_2) = [Z(d\lambda_1), Z(d\lambda_2)]$$

(див. [10]).

## 3. Стаціонарні процеси та поля на класичних півгрупах

В цьому розділі ми конкретизуємо загальні результати спектрального аналізу стаціонарних функцій на $*$-півгрупах для ряду класів стаціонарних процесів і полів на класичних адитивних та мультиплікативних півгрупах.

Спочатку розглянемо випадок адитивно стаціонарних ($A$-стаціонарних) процесів на адитивних одновимірних $*$-півгрупах.

У випадку груп $(\mathbf{R}, +, -))$ або $(\mathbb{Z}, +, -))$ дійсних або цілих чисел з операцією додавання та інволюцією як взяття протилежного числа півгрупова стаціонарність випадкового процесу $\Xi_t$ стає звичайною слабкою стаціонарністю через те, що напівхарактери мають вигляд $\chi_\lambda(t) = e^{i\lambda t}$, $\lambda \in \Lambda$ (де $\Lambda = \mathbf{R}$ або $\Lambda = \Pi = [-\pi, \pi]$ відповідно).

У випадку коли $*$-півгрупою $\mathbb{S}$ є одна з класичних числових множин

$$\mathbb{N}, \quad \mathbb{Z}, \quad \mathbb{Q}_+, \quad \mathbb{Q}, \quad \Pi, \quad \mathbf{R}_+, \quad \mathbf{R}$$

з операцією додавання чисел $+$ та тотожною інволюцією Id, така $*$-півгрупа $(\mathbb{S}, +, \mathrm{Id})$ має напівхарактери вигляду $\chi_\lambda(t) = e^{\lambda t}$, $\lambda \in \Lambda \subset \mathbf{R}$, і корреляційна функція $R$ стаціонарного процесу $\Xi_t$, $t \in \mathbb{S}$, залежить від суми аргументів:

$$[\Xi_t, \Xi_s] = R(t+s), \qquad t, s \in \mathbb{S}.$$

За існуючою термінологією для одновимірних функцій обмежені $(\mathbb{S}, +, \mathrm{Id})$-додатно визначені функції називаються звичайно експоненціально обмеженими, а відповідні стаціонарні процеси, які мають їх як свої корреляційні функції — симетричними процесами (див., наприклад, [13, 14]).

Зокрема, обмежений симетричний процес $\Xi_t$, $t \in (\mathbf{R}, +, \mathrm{Id})$, буде мати такі спектральні розклади

$$\Xi_t = \int_0^\infty \lambda^t \, \Phi(d\lambda), \qquad R(t+s) = [\Xi_t, \Xi_s] = \int_0^\infty \lambda^{t+s} \, F(d\lambda),$$

оскільки напівхарактери $(\mathbf{R}, +, \mathrm{Id})$ можна подати у вигляді $\chi_\lambda(t) = \lambda^t$, $\lambda \in \mathbf{R}_+$.

У випадку обмеженого симетричного процесу $\Xi_t$, $t \in (\mathbb{N}, +, \mathrm{Id})$, через прямий зв'язок спектрального зображення його корреляційної функції з класичною проблемою моментів маємо таку форму відповідних йому спектральних розкладів:

$$\Xi_n = \int_{-1}^1 \lambda^n \, \Phi(d\lambda), \qquad R(n+m) = \int_{-1}^1 \lambda^{n+m} \, F(d\lambda), \qquad n, m \in \mathbb{N}.$$

Перейдемо тепер до мультиплікативно стаціонарних ($M$-стаціонарних) процесів на мультиплікативних одновимірних $*$-півгрупах.

У випадку півгрупи $\mathbb{S} = (\mathbf{R}_0, \times, (\cdot)^{-1})$, $\mathbf{R}_0 = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, маємо, що її напівхарактери є $\chi_\lambda(t) = |t|^{i\lambda}$, $\lambda \in \mathbf{R}$, а для півгрупи $\mathbb{S} = (\mathbb{R}_{++}, \times, (\cdot)^{-1})$, $\mathbf{R}_{++} = (0, \infty)$, напівхарактери мають вигляд $\chi_\lambda(t) = t^{i\lambda}$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Таким чином, спектральні розклади обмеженого стаціонарного процесу $\Xi_t$, $t \in (\mathbb{R}_{++}, \times, (\cdot)^{-1})$, мають вигляд

$$\Xi_t = \int_{-\infty}^\infty t^{i\lambda} \, \Phi(d\lambda), \qquad [\Xi_t, \Xi_s] = R\left(\frac{t}{s}\right) = \int_{-\infty}^\infty \left(\frac{t}{s}\right)^{i\lambda} F(d\lambda).$$

Зокрема, броунівська спіраль Колмогорова (нормалізований фрактальний броунівський рух) в $H$, що є центрованим гауссівським процесом $\Xi_t$, $t \in \mathbf{R}_{++}$, в $H$ з корреляційною функцією

$$K(t, s) = \frac{t^{2h} + s^{2h} - |t - s|^{2h}}{2(st)^h} I,$$

де $I$ — одиничний оператор з $B(H)$, а $h$ — фрактальна розмірність $\Xi_t$, $h \in [0, 1]$, також є $M$-стаціонарним процесом на $(\mathbf{R}_{++}, \times, (\cdot)^{-1})$ з корреляційною функцією

$$R(v) = \frac{1 + v^{2h} - |1 - v|^{2h}}{2v^h} I.$$

Для $*$-півгрупи $(\mathbb{S}, \times, \mathrm{Id})$ з $\mathbb{S} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $\mathbf{R}_{++}$ і $\mathbf{R}_0$ напівхарактери мають вигляд $\chi_\lambda(t) = |t|^\lambda$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Зокрема, спектральні розклади обмеженого стаціонарного процесу $\Xi_t$, $t \in (\mathbf{R}_0, \times, \mathrm{Id})$, мають вигляд:

$$\Xi_t = \int_{-\infty}^\infty |t|^\lambda \, \Phi(d\lambda), \qquad [\Xi_t, \Xi_s] = R(ts) = \int_{-\infty}^\infty |ts|^\lambda \, F(d\lambda).$$

Стаціонарні випадкові поля на класичних $*$-півгрупах легко вивчати з точки зору спектральної теорії, якщо розглядати їхні аргументи як елементи прямих добутків $*$-півгруп. Так для випадку класичних абелевих локально компактних груп такий підхід розвинуто в [15], де наведено багато прикладів спектральних розкладів для конкретних класів однорідних випадкових полів на подібних групах.

Загалом вищезгаданий підхід будується на наступному факті.

**Означення 3.1.** Прямим добутком $\otimes$ двох $*$-півгруп $(\mathbb{S}, \circ, \flat)$ і $(\mathbb{T}, \bullet, \sharp)$ називається $*$-півгрупа $(\mathbb{U}, \star, *)$, де $\mathbb{U} = \mathbb{S} \times \mathbb{T}$, з операцією, що визначається рівністю

$$(s_1, t_1) \star (s_2, t_2) = (s_1 \circ s_2, t_1 \bullet t_2), \qquad (s_i, t_i) \in \mathbb{S} \times \mathbb{T}, \ i = 1, 2,$$

та інволюцією $(s, t)^* = (s^\flat, t^\sharp)$, $(s, t) \in \mathbb{S} \times \mathbb{T}$. Тоді дуальний об'єкт $\mathbb{U}^*$ півгрупи $\mathbb{U}$ має таку структуру: $\mathbb{U}^* = \{\chi = \chi_1 \chi_2 \colon \chi_1 \in \mathbb{S}^*, \chi_2 \in \mathbb{T}^*\}$ (див. [7]).

Наприклад, розглядаючи $*$-півгрупу $(\mathbf{R}^n, +, \mathrm{Id})$ як $n$-ту степінь ($n$-кратний добуток) $*$-півгрупи $(\mathbf{R}, +, \mathrm{Id})$, маємо, що її напівхарактери мають вигляд $\chi_\lambda(t) = e^{(\lambda|t)}$, $t \in \mathbf{R}^n$, $\lambda \in \mathbf{R}^n$, де $(\cdot\,|\,\cdot)$ скалярний добуток в $\mathbf{R}^n$. Отже для обмеженого стаціонарного поля $\Xi_t$, $t \in (\mathbf{R}^n, +, \mathrm{Id})$, мають місце наступні спектральні розклади

$$\Xi_t = \int_{\mathbf{R}^n} e^{(\lambda|t)}\,\Phi(d\lambda), \qquad R(t+s) = [\Xi_t, \Xi_s] = \int_{\mathbf{R}^n} e^{(\lambda|t+s)}\,\Phi(d\lambda).$$

Як інші прості приклади різних варіантів стаціонарних випадкових полів, розглянемо випадок адитивно стаціонарних полів на комплексній площині

$$(\mathbb{C}, +) = (\mathbf{R}, +) \otimes (\mathbf{R}, +)$$

(що еквівалентно зображенню комплексного числа $z$ у вигляді $z = \operatorname{Re} z + i(\operatorname{Im} z)$). Позначимо через $\mathbb{C}_0$ множину $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Можливі різні види інволюції $*$ на $(\mathbb{C}, +)$ або $(\mathbb{C}_0, +)$.

Якщо інволюція є інверсією, то

$$\left(\mathbb{C}_0, +, (\cdot)^{-1}\right)^* = \left\{\chi_\lambda \colon \chi_\lambda(z) = e^{i(\lambda_1 \operatorname{Re} z + \lambda_2 \operatorname{Im} z)}, \lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{R}^2\right\}$$

і отже,

$$\Xi_z = \int_{\mathbf{R}^2} e^{i(\lambda_1 \operatorname{Re} z + \lambda_2 \operatorname{Im} z)}\,\Phi(d\lambda_1, d\lambda_2). \tag{20}$$

Якщо ж інволюцією є комплексне спряження, то

$$(\mathbb{C}, +, {}^{-}))^* = \left\{\chi_\lambda \colon \chi_\lambda(z) = e^{\lambda_1 \operatorname{Re} z} e^{i\lambda_2 \operatorname{Im} z}\right\},$$

а у випадку тотожньої інволюції

$$(\mathbb{C}, +, \mathrm{Id})^* = \left\{\chi_\lambda \colon \chi_\lambda(z) = e^{\lambda_1 \operatorname{Re} z + \lambda_2 \operatorname{Im} z}\right\},$$

що дозволяє отримувати спектральні розклади типу (20) і для цих випадків.

Для мультиплікативної півгрупи комплексних чисел $(\mathbb{C}, \times)$ маємо

$$(\mathbb{C}, \times) = (\mathbf{R}_+, X) \otimes (\Pi, +)$$

(додавання на $\Pi$ здійснюється за модулем $2\pi$), що еквівалентно тригонометричному зображенню комплексного числа $z$ у вигляді $z = |z| e^{i\varphi}$, $\varphi = \operatorname{Arg} z$. Тоді

$$(\mathbb{C}_0, \times, (\cdot)^{-1}) = \left\{\chi_\lambda \colon \chi_\lambda(z) = |z|^{i\lambda_1} e^{i\lambda_2 \varphi}, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}\right\}$$

і, отже маємо такий спектральний розклад обмеженого стаціонарного поля $\Xi_z$ на $(\mathbb{C}_0, \times, (\cdot)^{-1})$:

$$\Xi_z = \Xi_{|z| \exp(i\varphi)} = \int_{\mathbf{R}} \sum_{\lambda_2 \in \mathbb{Z}} |z|^{i\lambda_1} e^{i\lambda_2 \varphi}\,\Phi_{\lambda_2}(d\lambda_1),$$

де $\Phi_{\lambda_2}(d\lambda_1)$ сім'я ортогональних $\mathcal{M}(\Omega, H)$-значних мір

$$[\Phi_k(\Delta_1), \Phi_j(\Delta_2)] = \delta_{kj} F_k(\Delta_1 \cap \Delta_2), \qquad \Delta_1, \Delta_2 \subset \mathbf{R},\ k, j \in \mathbb{Z},$$

де $F_k$ — операторні $B_+(H)$-значні міри на $\mathbf{R}$.

## Література


1. А. И. Пономаренко, *Одородные в широком смысле случайные поля на полугрупах и однородных пространствах со значениями в банаховых пространствах*, Теория вероят. и матем. статист. **7** (1972), 110–121.
2. А. И. Пономаренко, *Бесконечномерные случайные поля на полугрупах*, Теория вероят. и матем. статист. **30** (1984), 136–142.
3. V. Girardin and R. Senoussi, *Semigroup stionary processes and spectral representation*, Bernoulli **9** (2003), 857–876.
4. О. І. Пономаренко, *Випадкові лінійні функціонали другого порядку I*, Теорія ймовір. та матем. статист. **54** (1996), 137–146.

5. Л. Л. Пономаренко, *Бесконечномерные стохастические диференциальные уравнения в частичных производных с многопараметрическим броуновским двигжением*, Кибернетика **4** (1976), 98–106.
6. R. Lindahl and P. Maserick, *Positive-definite functions on involution semigroups*, Duke Math. J. **38** (1971), 771–782.
7. C. Berg, Y. P. Gristensen, and P. Ressel, *Harmonic Analysis on Semigroups*, Springer-Verlag, New York, 1984.
8. H. Glökner, *Positive definite functions on infinite-dimentional convex cones*, Memoirs of AMS **166** (2003), 789.
9. А. И. Пономаренко, *Стохастические интегралы по обобщенным случайным ортогональным мерам в банаховых пространствах*, Теория вероят. и матем. статист. **33** (1985), 92–99.
10. О. І. Пономаренко, *Інтегральні зображення випадкових функцій із значенням в локальних опуклих просторах*, Теорія ймовір. та матем. статист. **46** (1992), 132–141.
11. O. Perjin and R. Senoussi, *Reducing non-stationary stochastic processes to stationary by a time deformation*, Statist. Probab. Lett. **43** (1999), 393–397.
12. О. І. Пономаренко, *Операторні біміри і стахостичні інтеграли в нормованих просторах*, Теорія ймовір. та матем. статист. **47** (1992), 129–139.
13. Н. Ахиезер, *Класическая проблема моментов*, ФМ, Москва, 1961.
14. Y. Michalek, *Locally Stationary Covariances. Information Theory. Statistical Decision Functions*, Reidel, Dordrecht, 1988.
15. А. И. Пономаренко, *Стахостические задачи оптимизации*, Издательство КГУ, Киев, 1980.



Кафедра теорії ймовірностей та математичної статистики, механіко-математичний факультет, Національний університет ім. Тараса Шевченка, проспект Глушкова, 6, Київ 03127, Україна

*Адреса електронної пошти:* probab@univ.kiev.ua

Кафедра теорії ймовірностей та математичної статистики, механіко-математичний факультет, Національний університет ім. Тараса Шевченка, проспект Глушкова, 6, Київ 03127, Україна

*Адреса електронної пошти:* perun@bank.gov.ua


Надійшла 03/12/2004