Теорія ймовір. та матем. статист. Вип. 78, 2008, стор. 159–174

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst. No. 78, 2008, pp. 159–174

ХЕДЖУВАННЯ З НАЙМЕНШОЮ ВАРІАЦІЄЮ В МОДЕЛІ ЗІ СТРИБКАМИ В ПУАССОНОВІ ВИПАДКОВІ МОМЕНТИ

УДК 519.21

В. М. РАДЧЕНКО

Анотація. Розглядається модель, в якій ціна акції керується вінеровим процесом і додатково має випадкові зміни в моменти часу, визначені однорідним процесом Пуассона. Для Європейського опціону колл в явному вигляді виведено формули хеджування з найменшою варіацією. Вивід ґрунтується на розкладі Фельмера–Швайцера функції платежа.

1. Вступ

В даній роботі розглядається задача знаходження хеджуючої самофінансованої стратегії для Європейського опціону колл з моментом виконання $T > 0$ в одновимірній моделі з неперервним часом. Припускається, що дисконтована ціна акції $(X_t)_{0 \le t \le T}$ керується вінеровим процесом і, додатково до цього, має випадкові стрибки в моменти часу, визначені однорідним процесом Пуассона. Результат хеджуючої стратегії має наближати функцію платежу найкращим чином в середньоквадратичному сенсі.

Платіжна функція H — це квадратично інтегровна випадкова величина, що задовольняє стандартну вимогу вимірності. В нашій моделі ринок, взагалі кажучи, неповний. Платіжна функція не обов'язково є досяжною, і для даної H ми будемо розв'язувати задачу:

$$\text{мінімізувати } \mathsf{E}\left[H - V_0 - \int_0^T \vartheta_s \, dX_s\right]^2 \quad \text{серед всіх стратегій } \vartheta \text{ і } V_0 \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

Якщо ϑ^H і V_0^H дають розв'язання вказаної задачі, то ϑ^H називаємо стратегією хеджування з найменшою варіацією, а V_0^H — ціною платіжної функції H.

В нашій моделі X — це розривний спеціальний семімартингал. Розв'язання задачі (1.1) для семімартингалів, що задовольняють деякі додаткові умови, в загальному вигляді отримано в [1]. Деякі додаткові результати в даному напрямку містяться в [2] і [3]. Стратегію хеджування в [1] дано як розв'язок стохастичного рівняння, елементи якого знаходяться з розкладу Фельмера–Швайцера

$$H = H_0 + \int_0^T \xi_s^H \, dX_s + L_T^H,$$

де $H_0 \in \mathbb{R}$ і L^H — мартингал, ортогональний мартингальній складовій X. Однак задача знаходження ξ_s^H в загальному вигляді не розв'язана. Відмітимо лише, що у випадку одномірного X можливий підхід для обчислення ξ_s^H вказано в [4] в доведенні теореми 10 і наступному зауваженні.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 91B28; Secondary 60H05.

Ключові слова і фрази. Хеджування з найменшою варіацією, Європейський опціон колл, розклад Фельмера–Швайцера, модель ціни акції зі стрибками, мінімальна мартингальна міра.

Робота виконана при підтримці фонду Олександра Гумбольдта, грант #1074615.

В даній роботі ми покажемо, що результати [1] застосовні і в нашій моделі. Для платіжної функції вигляду $H = f(X_T)$, де $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ — неперервна функція з не більш ніж поліноміальним зростанням, будуть знайдені H_0, ξ_t^H і L_t^H та отримано розв'язок задачі (1.1).

Починаючи з класичної роботи [5], ця модель ціни акції в різних варіантах розглядається в значній кількості публікацій (див. ще, наприклад, [6, розділ 10], [7, розділ 7]), її вигляд є природним для фінансового ринку. Проте явні формули середньоквадратичного хеджування були отримані лише у випадку, коли ціна акції є мартингалом, тобто виконується відповідна рівність для параметрів процесу ціни акції (див. [7, пункт 7.3.4] для стрибків, що керуються процесом Пуассона, або [6, пункт 10.4.2] для експоненціального процесу Леві). В нашому випадку на модель накладається умова, що є нерівністю (див. нижче (2.3)).

Формули для середньоквадратичного хеджування у випадку, коли X є експоненціальним процесом Леві, також були нещодавно отримані в [8]. Правда, при цьому вважалося, що платіжна функція має вигляд $H = f(X_T)$, де виконується інтегральне представлення $f(s) = \int s^z\, \Pi(dz)$, і міра Π входить в обчислення хеджу. Існування такого представлення було показано лише для кількох окремих випадків f. Ми накладаємо інші умови на f і виражаємо хедж в інших термінах.

Слідуючи підходу роботи [1], ми знаходимо хеджуючу стратегію, використовуючи умовне сподівання відносно мінімальної мартингальної міри. Відмітимо, що інші підходи у визначенні стратегій в неповному ринку основані на поняттях мартингальної міри з найменшою ентропією [9], мінімального ризику [10, 11]. Для випадку, коли моменти стрибків ціни невипадкові і відомі завчасно, явні формули середньоквадратичного хеджування отримано в [12].

В пункті 2 роботи дано опис нашої моделі і наведено деякі попередні відомості. В пункті 3 отримано розклад Фельмера–Швайцера для ціни акції в нашому випадку. Формули хеджуючої стратегії виведено з цього розкладу в пункті 4. До додатку винесено доведення одного допоміжного твердження.

2. Модель

Нехай $(N_t)_{0\le t\le T}$ — однорідний процес Пуассона з інтенсивністю λ, τ_j, $j \ge 1$, — це зростаюча послідовність моментів стрибків процесу N. Для зручності будемо вважати, що $\tau_0 = 0$. Не втрачаючи загальності припускаємо, що $N_{T-} = N_T$.

Нехай $(W_t)_{0\le t\le T}$ — вінерів процес, $(U_j)_{j\ge 1}$ — незалежні однаково розподілені випадкові величини, що приймають значення з $(-1, +\infty)$. Припустимо, що $\mathsf{E}\, U_j^n < \infty$ для всіх $n \ge 1$. Через ν позначимо функцію розподілу U_j (спільну для всіх j). Також позначимо $E_1 = \mathsf{E}\, U_j$, $E_2 = \mathsf{E}\, U_j^2$.

Припускаємо, що σ-алгебри $\sigma(N_t, 0 \le t \le T)$, $\sigma(W_t, 0 \le t \le T)$ і $\sigma(U_j, j \ge 1)$ незалежні. Для кожного $0 \le t \le T$ позначимо через $\mathcal{F}_t$ σ-алгебру, породжену всіма величинами $(W_s)_{0\le s\le t}$, $(N_s)_{0\le s\le t}$ та $(U_j)_{j\colon 0<\tau_j\le t}$ і поповнену всіма множинами нульової ймовірності з $\mathcal{F}$. Далі вважаємо, що $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$.

Через X_t позначимо *дисконтовану* ціну акції (ризикового активу) в момент t, $X_0 \in \mathbb{R}$, $X_0 > 0$. Також припускаємо, що існує безризиковий актив (облігації). Вважаємо, що процес $(X_t)_{0\le t\le T}$ задовольняє рівняння

$$X_t = X_0 + \int_0^t X_{s-}(a\, ds + \sigma\, dW_s) + \sum_{j\colon 0<\tau_j\le t} X_{\tau_j -} U_j, \qquad 0 \le t \le T, \tag{2.1}$$

де $a \ge 0$ і $\sigma > 0$ — сталі. Звідси маємо, що

$$X_t = X_0 \exp\left\{\left(a - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right\} \prod_{j\colon 0<\tau_j\le t} (1 + U_j), \qquad 0 \le t \le T. \tag{2.2}$$

Додатково припускаємо, що

$$\frac{a+E_1\lambda}{\sigma^2+E_2\lambda}U_j<1 \quad \text{м. н.} \tag{2.3}$$

(нижче буде показано важливість даного припущення).

Далі ми будемо використовувати наступне твердження (його доведення дане в лемі 7.2.2 [7]).

Лема 2.1. *Нехай $\Phi(y,z):\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — вимірна функція така, що для будь-якого $z\in\mathbb{R}$ функція $y\mapsto\Phi(y,z)$ неперервна на $\mathbb{R}^d$, і нехай $(Y_t)_{0\le t\le T}$ — це неперервний зліва процес зі значеннями в $\mathbb{R}^d$, узгоджений з фільтрацією $(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$. Припустимо, що*

$$\mathsf{E}\int_0^T ds\int_{\mathbb{R}}\nu(dz)\Phi^2(Y_s,z)<+\infty. \tag{2.4}$$

Тоді процес $\left(\tilde M_t\right)_{0\le t\le T}$, визначений рівністю

$$\tilde M_t=\sum_{j\,:\,0<\tau_j\le t}\Phi\left(Y_{\tau_j},U_j\right)-\lambda\int_0^t ds\int_{\mathbb{R}}\nu(dz)\Phi(Y_s,z),$$

є квадратично інтегровним мартингалом.

У нас $(X_t)_{0\le t\le T}$ — квадратично інтегровний семімартингал і має місце представлення

$$X_t=X_0+M_t+A_t,$$

де

$$M_t=\sigma\int_0^t X_{s-}\,dW_s+\sum_{j\,:\,0<\tau_j\le t}X_{\tau_j-}U_j-E_1\lambda\int_0^t X_{s-}\,ds, \qquad 0\le t\le T, \tag{2.5}$$

— мартингал (це випливає з леми 2.1 для $\Phi(y,z)=yz$, $Y_t=X_{t-}$) і

$$A_t=(a+E_1\lambda)\int_0^t X_{s-}\,ds, \qquad 0\le t\le T,$$

— передбачуваний процес обмеженої варіації.

З (2.5) ми знаходимо квадратичну варіацію

$$[M]_t=\sigma^2\int_0^t X_{s-}^2\,ds+\sum_{j\,:\,0<\tau_j\le t}X_{\tau_j-}^2U_j^2.$$

Звідси і з леми 2.1 (для $\Phi(y,z)=y^2z^2$, $Y_t=X_{t-}$) ми отримуємо передбачувану квадратичну варіацію

$$\langle M\rangle_t=\left(\sigma^2+E_2\lambda\right)\int_0^t X_{s-}^2\,ds.$$

Позначимо

$$\rho=\frac{a+E_1\lambda}{\sigma^2+E_2\lambda}.$$

Тоді для $\alpha_t=dA_t/d\langle M\rangle_t$ маємо

$$\alpha_t=\frac{\rho}{X_{t-}}. \tag{2.6}$$

Нехай $\left(N_t^{(1)}\right)_{0\le t\le T}$ і $\left(N_t^{(2)}\right)_{0\le t\le T}$ — квадратично інтегровні мартингали такі, що $N_0^{(1)}=N_0^{(2)}=0$ м. н. Нагадаємо, що $N^{(1)}$ і $N^{(2)}$ називаються *сильно ортогональними*, якщо $\left(N_t^{(1)}N_t^{(2)}\right)_{0\le t\le T}$ — рівномірно інтегровний мартингал.

Наступні два означення узгоджуються з відповідними означеннями в [1] і [13].

Означення 2.1. Множина $L^2(M)$ — це множина передбачуваних процесів $(\theta_t)_{0\le t\le T}$ зі значеннями в $\mathbb{R}$ таких, що процес $\left(\int_0^t \theta_s^2\, d\langle M\rangle_s\right)_{0\le t\le T}$ є інтегровним. Множина $L^2(A)$ — це множина передбачуваних процесів $(\theta_t)_{0\le t\le T}$ зі значеннями в $\mathbb{R}$ таких, що процес $\left(\int_0^t |\theta_s\alpha_s|\, d\langle M\rangle_s\right)_{0\le t\le T}$ є квадратично інтегровним. Також покладемо $\Theta = L^2(M)\cap L^2(A)$.

Платіжна функція H — це квадратично інтегровна $\mathcal{F}_T$-вимірна випадкова величина.

Означення 2.2. Розкладом Фельмера–Швайцера випадкової величини

$$H\in L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$$

називається представлення

$$H = H_0 + \int_0^T \xi_s^H\, dX_s + L_T^H, \tag{2.7}$$

де H_0 — $\mathcal{F}_0$-вимірна випадкова величина,

$$(\xi_t^H)_{0\le t\le T}\in\Theta, \qquad L_0^H = 0 \quad \text{м.н.}$$

і $(L_t^H)_{0\le t\le T}$ — квадратично інтегровний мартингал, сильно ортогональний $\int \theta\, dM$ для всіх $\theta\in L^2(M)$.

Якщо виконується (2.7), то для H будемо розглядати *внутрішній процес вартості*

$$V_t^H = H_0 + \int_0^t \xi_s^H\, dX_s + L_t^H, \qquad 0\le t\le T. \tag{2.8}$$

Ми отримуємо, що процес

$$\hat{K}_t = \int_0^t \alpha_s^2\, d\langle M\rangle_s = (a + E_1\lambda)\,\rho t$$

обмежений. Таким чином, виконана умова (SC) роботи [1], і з теореми 3.4 [13] ми одержуємо існування і єдиність розкладу Фельмера–Швайцера для будь-якої випадкової величини $H\in L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$. Відмітимо також, що з леми 2 [1] ми маємо, що $\Theta = L^2(M)$.

Також буде детермінованим процес

$$\tilde{K}_t = \int_0^t \frac{\alpha_s^2}{1+\sum_{j:\,0<s_j\le s}(\mathsf{E}\,U_j)^2(\operatorname{Var}U_j)^{-1}I_{\{s_j\}}(s)}\, d\langle M\rangle_s = \hat{K}_t.$$

Таким чином, виконуються умови теореми 3 [1] і наслідку 10 [1]. Наслідок 10 [1] стверджує, що розв'язок задачі

$$\text{мінімізувати } \mathsf{E}\left[H - V_0 - \int_0^T \vartheta_s\, dX_s\right]^2 \quad \text{по всіх } (V_0,\vartheta)\in\mathbb{R}\times\Theta \tag{2.9}$$

дається парою $(H_0,\xi^{(H_0)})$, де стратегія $\xi^{(H_0)}$ задовольняє рівнянню (2.2) [1]. В цьому випадку H_0 будемо називати *ціною платіжної функції* H і говорити, що $\xi^{(H_0)}$ реалізує самофінансовану *стратегію хеджування з найменшою варіацією* для даної H.

В той же час немає явних формул для елементів рівняння (2.2) [1]. Далі ми виведемо явний вигляд розв'язку задачі (2.9) для моделі (2.1)–(2.2) при деяких обмеженнях на H.

Відмітимо, що при $a + E_1\lambda = 0$ процес X з (2.1)–(2.2) є мартингалом. Для цього випадку хеджування з найменшою варіацією отримано в [7, пункт 7.3.4].

Вивід елементів розкладу Фельмера–Швайцера буде ґрунтуватися на значенні щільності мінімальної мартингальної міри. Наступне поняття було введено в [14].

Означення 2.3. Ймовірність $\hat{\mathsf{P}}$ називається *мінімальною мартингальною мірою*, якщо

1) $\hat{\mathsf{P}}$ еквівалентна P,
2) $d\hat{\mathsf{P}}/d\mathsf{P} \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$,
3) $(X_t)_{0\le t\le T}$ є мартингалом відносно $\hat{\mathsf{P}}$,
4) будь-який квадратично інтегровний P-мартингал, сильно ортогональний M відносно P, залишається мартингалом відносно $\hat{\mathsf{P}}$.

Відмітимо, що для процесу X в нашій моделі теорема 8 [15] стверджує, що $\hat{\mathsf{P}}$ є єдиним розв'язком задачі

$$\text{мінімізувати } \int_\Omega (d\mathsf{Q}/d\mathsf{P} - 1)^2\, d\mathsf{P}$$

по всім знакозмінним локально мартингальним мірам Q

$$\text{для } X \text{ таким, що } \int_\Omega (d\mathsf{Q}/d\mathsf{P})^2\, d\mathsf{P} < \infty.$$

Звідси отримуємо, що $\mathsf{Q} = \hat{\mathsf{P}}$ дає найменше значення $\int_\Omega (d\mathsf{Q}/d\mathsf{P})^2\, d\mathsf{P}$ по вказаній множині мір Q. Таким чином, $\hat{\mathsf{P}}$ є *мартингальною мірою оптимальної варіації* в термінах [16].

Ми будемо розглядати стохастичну експоненту

$$\hat{Z}_t = \mathcal{E}\left(-\int_0^t \alpha_s\, dM_s\right) = \exp\left\{E_1\lambda\rho t - \frac{1}{2}\sigma^2\rho^2 t - \sigma\rho W_t\right\} \prod_{j:\ 0<\tau_j\le t} (1-\rho U_j)\,. \quad (2.10)$$

Умова (2.3) дає, що $\hat{Z}_T > 0$ м. н. З леми 17 [1] випливає, що міра $\hat{\mathsf{P}}$, визначена співвідношенням $d\hat{\mathsf{P}} = \hat{Z}_T\, d\mathsf{P}$, буде мінімальною мартингальною мірою для нашого процесу ціни X. Далі в роботі через $\hat{\mathsf{E}}$ ми будемо позначати сподівання відносно міри $\hat{\mathsf{P}}$ з щільністю (2.10). Відмітимо, що формула щільності мінімальної мартингальної міри для моделі (2.1)–(2.2) також дана в твердженні 2.1 [17] (ця формула узгоджується з нашим результатом).

З леми 17 [1] ми одержуємо рівності для ціни H_0 і внутрішнього процесу вартості V_t^H:

$$H_0 = \hat{\mathsf{E}} H, \qquad V_t^H = \hat{\mathsf{E}}\left(H \mid \mathcal{F}_t\right). \quad (2.11)$$

Зокрема, $\hat{\mathsf{P}}$ буде еквівалентною мартингальною мірою для X. Отже, наша модель ринку вільна від арбітражу (див., наприклад, теорему VII.2a.2 [18]).

Дамо невеликий коментар до умови (2.3). Якщо $-1 \le \rho \le 0$, то (2.3) виконується для будь-якої $U_j \in (-1, +\infty)$. При $\rho > 0$ з (2.3) випливає, що U_j обмежена м. н. і припущення $\mathsf{E}\, U_j^n < +\infty$ виконується автоматично.

3. Вивід розкладу Фельмера–Швайцера

Надалі ми будемо розглядати платіжну функцію вигляду

$$H = f(X_T),$$

де $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ — неперервна функція з не більш, ніж поліноміальним зростанням. Помітимо, що при наших припущеннях $H \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$.

Враховуючи (2.7), (2.8) і (2.11), ми будемо шукати розклад

$$V_t^H = H_0 + \int_0^t \xi_s^H\, dX_s + L_t^H, \qquad 0 \le t \le T,$$

де H_0, ξ^H і L_t^H задовольняють умовам означення 2.2. Надалі ми будемо вважати H фіксованою і звичайно пропускати верхній індекс H у записі. Припустимо, що (N_t),

(W_t) і (U_j) визначені на ймовірнісних просторах Ω^N, Ω^W і Ω^U відповідно. Верхні індекси N, W і U будуть позначити сподівання або елементи у відповідних просторах.

Випадкові величини $\hat{Z}_T/\hat{Z}_t$ і X_t незалежні, тому

$$V_t = \hat{\mathsf{E}}\left[f(X_T) \mid \mathcal{F}_t\right] = \mathsf{E}\left[f(X_T)\frac{\hat{Z}_T}{\hat{Z}_t} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right] = F(t, X_t),$$

де

$$F(t,x) = \mathsf{E}^N \bar{F}\left(t,x,\omega^N\right),$$

$$\begin{aligned}\bar{F}\left(t,x,\omega^N\right) &= \mathsf{E}^U\,\mathsf{E}^W\left[f\left(x\frac{X_T}{X_t}\right)\frac{\hat{Z}_T}{\hat{Z}_t}\right]\\ &= \mathsf{E}^U\,\mathsf{E}^W\Bigg[f\left(x\exp\left\{\left(a-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma(W_T-W_t)\right\}\prod_{j:\ t<\tau_j(\omega^N)<T}(1+U_j)\right)\\ &\qquad\times\exp\left\{E_1\lambda\rho(T-t)-\frac{1}{2}\sigma^2\rho^2(T-t)-\sigma\rho(W_T-W_t)\right\}\\ &\qquad\qquad\times\prod_{j:\ t<\tau_j(\omega^N)<T}(1-\rho U_j)\Bigg],\\ &\qquad\omega^N\in\Omega^N.\end{aligned} \tag{3.1}$$

Оскільки f неперервна з не більш ніж поліноміальним зростанням, використовуючи теорему Лебега про мажоровану збіжність, ми легко отримуємо, що

$$F(\cdot,x)\in\mathbb{C}[0,T]).$$

Маємо, що

$$V_t = V_0 + \sum_{j:\ 0<\tau_j\le t}(V_{\tau_j-}-V_{\tau_{j-1}}) + \sum_{j:\ 0<\tau_j\le t}(V_{\tau_j}-V_{\tau_j-}) + (V_t - V_{\tau_{N_t}}).$$

Розглянемо доданок

$$V_{\tau_j-}-V_{\tau_{j-1}} = F(\tau_j-, X_{\tau_j-}) - F(\tau_{j-1}, X_{\tau_{j-1}}).$$

Для $1\le j\le N_T+1$, $x\in\mathbb{R}$, $\omega^N\in\Omega^N$ покладемо

$$g_j\left(x,\omega^N\right) = \mathsf{E}^U\left[f\left(x\prod_{i:\ j\le i\le N_T(\omega^N)}(1+U_i)\right)\prod_{i:\ j\le i\le N_T(\omega^N)}(1-\rho U_i)\right]$$

(при $j = N_T+1$ записані тут добутки зникають і $g_{N_T+1}\left(x,\omega^N\right) = f(x)$). Тоді для кожного $\omega^N\in\Omega^N$ функції $g_j\left(\cdot,\omega^N\right)$ мають не більш ніж поліноміальне зростання.

Для $0\le t\le T$, $x\in\mathbb{R}$, $\omega^N\in\Omega^N$ введемо функції

$$\begin{aligned}\bar{F}_j\left(t,x,\omega^N\right) &= \exp\left\{E_1\lambda\rho(T-t)\right\}\\ &\quad\times\mathsf{E}^W\Bigg[g_j\left(x\exp\left\{\left(a-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma(W_T-W_t)\right\},\omega^N\right)\\ &\qquad\times\exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma^2\rho^2(T-t)-\sigma\rho(W_T-W_t)\right\}\Bigg].\end{aligned}$$

Тоді ми маємо

$$\begin{aligned}\bar{F}_j\left(t,x,\omega^N\right) &= \exp\left\{E_1\lambda\rho(T-t)\right\}\\ &\quad\times\tilde{\mathsf{E}}^W\left[g_j\left(x\exp\left\{\left(a-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma(W_T-W_t)\right\},\omega^N\right)\right],\end{aligned}$$

де сподівання взято в Ω^W за ймовірністю $\tilde{\mathsf{P}}^W$ такою, що

$$\frac{d\tilde{\mathsf{P}}^W}{d\mathsf{P}^W} = \exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma^2\rho^2 T - \sigma\rho W_T\right\}.$$

З теореми Гірсанова (див., наприклад, наслідок 13.25 і теорему 13.27 [19]) випливає, що $\tilde{W}_t = W_t + \sigma\rho t$ є вінеровим процесом відносно ймовірності $\tilde{\mathsf{P}}^W$. Таким чином,

$$\bar{F}_j\left(t,x,\omega^N\right) = \exp\left\{E_1\lambda\rho(T-t)\right\}\tilde{\mathsf{E}}^W\left[g_j\left(x\exp\left\{\left(a-\sigma^2\rho\right)(T-t)\right\}\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\ \exp\left\{-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)+\sigma(\tilde{W}_T-\tilde{W}_t)\right\},\omega^N\right)\right].$$

Розглянемо функцію

$$\tilde{F}_j(t,y,\omega^N) = \tilde{\mathsf{E}}^W\left[g_j\left(y\exp\left\{-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)+\sigma(\tilde{W}_T-\tilde{W}_t)\right\},\omega^N\right)\right],$$
$$0\le t\le T,\qquad y\in\mathbb{R},\qquad \omega^N\in\Omega^N.$$

Відомо, що для всіх ω^N функція $\tilde{F}_j\left(\cdot,\cdot,\omega^N\right)\in\mathbb{C}^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R})$ і є розв'язком рівняння

$$\frac{\partial\tilde{F}_j}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2y^2\frac{\partial^2\tilde{F}_j}{\partial y^2}=0,\qquad \tilde{F}_j\left(T,y,\omega^N\right)=g_j\left(y,\omega^N\right) \tag{3.2}$$

(див., наприклад, наслідок 5.1.3 і рівність (5.46) [20] для $r=0$).

В нашому випадку функція

$$y(t,x) = x\exp\left\{\left(a-\sigma^2\rho\right)(T-t)\right\}$$

є гладкою, тому

$$\bar{F}_j\left(t,x,\omega^N\right) = \exp\left\{E_1\lambda\rho(T-t)\right\}\tilde{F}_j\left(t,y(t,x),\omega^N\right)\in\mathbb{C}^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R})$$

для кожного фіксованого ω^N. Відмітимо, що $\partial^2y/\partial x^2=0$ і, використовуючи (3.2), отримуємо

$$\frac{\partial\bar{F}_j}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2x^2\frac{\partial^2\bar{F}_j}{\partial x^2}=\left(\sigma^2\rho-a\right)x\frac{\partial\bar{F}_j}{\partial x}-E_1\lambda\rho\bar{F}_j. \tag{3.3}$$

Маємо, що

$$\left.\begin{aligned}\bar{F}\left(t,x,\omega^N\right)&=\bar{F}_j\left(t,x,\omega^N\right)\quad\text{для } t\in[\tau_{j-1},\tau_j),\\ \bar{F}\left(t,x,\omega^N\right)&=\bar{F}_{N_T+1}\left(t,x,\omega^N\right)\quad\text{для } t\ge\tau_{N_T},\end{aligned}\right.\quad x\in\mathbb{R}, \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}V_{\tau_j-}-V_{\tau_{j-1}}&=F\left(\tau_j-,X_{\tau_j-}\right)-F\left(\tau_{j-1},X_{\tau_{j-1}}\right)\\ &=\mathsf{E}^N\left[\bar{F}\left(c_j,y_j,\omega^N\right)-\bar{F}\left(b_j,x_j,\omega^N\right)\right]\Big|_{b_j=\tau_{j-1},c_j=\tau_j-,x_j=X_{\tau_{j-1}},y_j=X_{\tau_j-}}\\ &=\mathsf{E}^N\left[\bar{F}\left(c_j,x_j\exp\left\{\left(a-\frac{\sigma^2}{2}\right)(c_j-b_j)+\sigma\left(W_{c_j}-W_{b_j}\right)\right\},\omega^N\right)\right.\\ &\qquad\left.-\bar{F}\left(b_j,x_j,\omega^N\right)\right]\Big|_{\substack{b_j=\tau_{j-1},c_j=\tau_j-,\\ x_j=X_{\tau_{j-1}}}}.\end{aligned}$$

Для $x_j>0$ і $0\le b_j\le s\le c_j\le T$ позначимо

$$\bar{X}_s^{(j)}=x_j\exp\left\{\left(a-\frac{\sigma^2}{2}\right)(s-b_j)+\sigma\left(W_s-W_{b_j}\right)\right\}, \tag{3.5}$$
$$\tau_b=\min\left\{\tau_k\colon\tau_k>b_j\right\},\qquad\tau_c=\max\left\{\tau_k\colon\tau_k\le c_j\right\}.$$

Якщо $c_j \neq \tau_c$, ми можемо брати c_j- замість c_j, це випливає з (3.4) і неперервності $\bar{F}_j$. Використовуючи це міркування, далі ми маємо

$$\begin{aligned}
&\bar{F}\left(c_j, x_j \exp\left\{\left(a - \frac{\sigma^2}{2}\right)(c_j - b_j) + \sigma\left(W_{c_j} - W_{b_j}\right)\right\}, \omega^N\right) - \bar{F}\left(b_j, x_j, \omega^N\right) \\
&\quad = \bar{F}\left(c_j, \bar{X}^{(j)}_{c_j}, \omega^N\right) - \bar{F}\left(b_j, \bar{X}^{(j)}_{b_j}, \omega^N\right) \\
&\quad = \bar{F}\left(c_j-, \bar{X}^{(j)}_{c_j}, \omega^N\right) - \bar{F}\left(\tau_c, \bar{X}^{(j)}_{\tau_c}, \omega^N\right) \\
&\qquad + \sum_{k:\, b_j < \tau_{k-1}, \tau_k \le c_j} \left[\bar{F}\left(\tau_k-, \bar{X}^{(j)}_{\tau_k}, \omega^N\right) - \bar{F}\left(\tau_{k-1}, \bar{X}^{(j)}_{\tau_{k-1}}, \omega^N\right)\right] \\
&\qquad + \bar{F}\left(\tau_b-, \bar{X}^{(j)}_{\tau_b}, \omega^N\right) - \bar{F}\left(b_j, \bar{X}^{(j)}_{b_j}, \omega^N\right) \\
&\qquad + \sum_{k:\, b_j < \tau_k \le c_j} \left[\bar{F}\left(\tau_k, \bar{X}^{(j)}_{\tau_k}, \omega^N\right) - \bar{F}\left(\tau_k-, \bar{X}^{(j)}_{\tau_k}, \omega^N\right)\right].
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Стандартними перетвореннями, використовуючи формулу Іто для кожного фіксованого $\omega^N \in \Omega^N$, (3.3) і (3.4), для $b_j < \tau_{k-1}$, $\tau_k \le c_j$ ми отримуємо

$$\begin{aligned}
&\bar{F}\left(\tau_k-, \bar{X}^{(j)}_{\tau_k}, \omega^N\right) - \bar{F}\left(\tau_{k-1}, \bar{X}^{(j)}_{\tau_{k-1}}, \omega^N\right) \\
&\quad = \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k-} \frac{\partial \bar{F}}{\partial x}\left(s, \bar{X}^{(j)}_{s-}, \omega^N\right) d\bar{X}^{(j)}_s \\
&\qquad + \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k-} \left(\left(\sigma^2\rho - a\right)\bar{X}^{(j)}_{s-}\frac{\partial \bar{F}}{\partial x}\left(s, \bar{X}^{(j)}_{s-}, \omega^N\right) - E_1\lambda\rho\bar{F}\left(s, \bar{X}^{(j)}_{s-}, \omega^N\right)\right) ds.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Таким же чином ми розглядаємо інтервали $[b_j, \tau_b)$ і $[\tau_c, c_j)$.

З (3.6) і (3.7) ми маємо

$$\begin{aligned}
&\bar{F}\left(c_j, \bar{X}^{(j)}_{c_j}, \omega^N\right) - \bar{F}\left(b_j, \bar{X}^{(j)}_{b_j}, \omega^N\right) \\
&\quad = \int_{b_j}^{c_j} \frac{\partial \bar{F}}{\partial x}\left(s, \bar{X}^{(j)}_{s-}, \omega^N\right) d\bar{X}^{(j)}_s \\
&\qquad + \int_{b_j}^{c_j} \left(\left(\sigma^2\rho - a\right)\bar{X}^{(j)}_{s-}\frac{\partial \bar{F}}{\partial x}\left(s, \bar{X}^{(j)}_{s-}, \omega^N\right) - E_1\lambda\rho\bar{F}\left(s, \bar{X}^{(j)}_{s-}, \omega^N\right)\right) ds \\
&\qquad + \sum_{k:\, b_j < \tau_k \le c_j} \left[\bar{F}\left(\tau_k, \bar{X}^{(j)}_{\tau_k}, \omega^N\right) - \bar{F}\left(\tau_k-, \bar{X}^{(j)}_{\tau_k}, \omega^N\right)\right].
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Очевидно, сподівання E^N інтегралів в (3.8) дорівнюють інтегралам від сподівань. Легко можна довести, що

$$\mathsf{E}^N\left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial x}\left(s, \bar{X}^{(j)}_{s-}, \omega^N\right)\right)\bar{X}^{(j)}_{s-} = \frac{\partial F}{\partial x}\left(s, \bar{X}^{(j)}_{s-}\right)\bar{X}^{(j)}_{s-},$$

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}^N\left(\left(\sigma^2\rho - a\right)\bar{X}^{(j)}_{s-}\frac{\partial \bar{F}}{\partial x}\left(s, \bar{X}^{(j)}_{s-}, \omega^N\right) - E_1\lambda\rho\bar{F}\left(s, \bar{X}^{(j)}_{s-}, \omega^N\right)\right) \\
&\quad = \left(\sigma^2\rho - a\right)\bar{X}^{(j)}_{s-}\frac{\partial F}{\partial x}\left(s, \bar{X}^{(j)}_{s-}\right) - E_1\lambda\rho F\left(s, \bar{X}^{(j)}_{s-}\right).
\end{aligned}$$

Нагадаємо, що $\bar{X}^{(j)}_s$ залежить від x_j і для $s, t \in [b_j, c_j]$, $s \le t$, позначимо

$$R(s, t, x_j) = \mathsf{E}^N\left(\sum_{k:\, s < \tau_k \le t} \left[\bar{F}\left(\tau_k,\ \bar{X}^{(j)}_{\tau_k}, \omega^N\right) - \bar{F}\left(\tau_k-, \bar{X}^{(j)}_{\tau_k}, \omega^N\right)\right]\right) \tag{3.9}$$

(при відсутності тут доданків в сумі вважаємо суму рівною нулю). Взявши сподівання E^N в (3.8), маємо

$$
\begin{aligned}
&F\left(c_j, \bar{X}^{(j)}_{c_j}\right) - F\left(b_j, \bar{X}^{(j)}_{b_j}\right) \\
&\quad = \int_{b_j}^{c_j} \frac{\partial F}{\partial x}\left(s, \bar{X}^{(j)}_{s-}\right) \bar{X}^{(j)}_{s-}\,(a\,ds + \sigma\,dW_s) \\
&\qquad + \int_{b_j}^{c_j} \left(\left(\sigma^2\rho - a\right) \bar{X}^{(j)}_{s-} \frac{\partial F}{\partial x}\left(s, \bar{X}^{(j)}_{s-}\right) - E_1\lambda\rho F\left(s, \bar{X}^{(j)}_{s-}\right)\right) ds + R\left(b_j, c_j, x_j\right).
\end{aligned}
$$

Тепер ми підставимо $x_j = X_{\tau_{j-1}}$, $b_j = \tau_{j-1}$, $c_j = \tau_j-$. Ці підстановки в стохастичний інтеграл коректні, оскільки ці величини незалежні від dW_s на розглядуваних інтервалах. Таким чином ми отримуємо

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j:\ 0<\tau_j\le t} \left(V_{\tau_j-} - V_{\tau_{j-1}}\right) + \left(V_t - V_{\tau_{N_t}}\right) \\
&\quad = \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}\left(s, X_{s-}\right) X_{s-}\,(a\,ds + \sigma\,dW_s) \\
&\qquad + \int_0^t \left(\left(\sigma^2\rho - a\right) X_{s-} \frac{\partial F}{\partial x}\left(s, X_{s-}\right) - E_1\lambda\rho F\left(s, X_{s-}\right)\right) ds \\
&\qquad + \sum_{j:\ 0<\tau_j\le t} R\left(\tau_{j-1}, \tau_j-, X_{\tau_{j-1}}\right) + R\left(\tau_{N_t}, t, X_{\tau_{N_t}}\right).
\end{aligned}
$$

Процес

$$
\sum_{j:\ 0<\tau_j\le t} R\left(\tau_{j-1}, \tau_j-, X_{\tau_{j-1}}\right) + R\left(\tau_{N_t}, t,\ X_{\tau_{N_t}}\right)
$$

є неперервним з обмеженою варіацією, і навіть абсолютно неперервним (доведення даного твердження винесено до додатку). Тому знакозмінна міра, породжена приростами цього процесу, абсолютно неперервна відносно міри Лебега.

Для $0 \le s \le T$ позначимо

$$
\psi_s = \frac{\partial F}{\partial x}\left(s, X_{s-}\right), \tag{3.10}
$$

$$
\begin{aligned}
\varrho_s &= \left(\sigma^2\rho - a\right) X_{s-} \frac{\partial F}{\partial x}\left(s, X_{s-}\right) - E_1\lambda\rho F\left(s, X_{s-}\right) \\
&\quad + \frac{d}{ds}\left(\sum_{j:\ 0<\tau_j\le s} R\left(\tau_{j-1}, \tau_j-, X_{\tau_{j-1}}\right) + R\left(\tau_{N_s}, s, X_{\tau_{N_s}}\right)\right),
\end{aligned} \tag{3.11}
$$

де R визначена рівністю (3.9). Тоді

$$
\sum_{j:\ 0<\tau_j\le t} \left(V_{\tau_j-} - V_{\tau_{j-1}}\right) + \left(V_t - V_{\tau_{N_t}}\right) = \int_0^t \psi_s X_{s-}\,(a\,ds + \sigma\,dW_s) + \int_0^t \varrho_s\,ds.
$$

Відмітимо, що ψ_s неперервний зліва і $\int_0^t \varrho_s\,ds$ є неперервним процесом обмеженої варіації.

Потрібно знайти розклад

$$
V_t = V_0 + \int_0^t \xi^H_s X_{s-}\,(a\,ds + \sigma\,dW_s) + \sum_{j=1}^{N_t} \xi^H_{\tau_j} X_{\tau_j-} U_j + L_t,
$$

де ξ^H і L задовольняють умовам означення 2.2. З теореми 3.4 [13] ми маємо існування і єдиність розкладу Фельмера–Швайцера, тому ξ^H визначається єдиним чином.

Ми будемо шукати ξ^H такий, що $[L,M]_{0\le t\le T}$ буде мартингалом. Маємо, що

$$
\begin{aligned}
[L,M]_t = \Bigg[&\int_0^t \psi_s X_{s-}\,(a\,ds+\sigma\,dW_s) + \int_0^t \varrho_s\,ds + \sum_{j\,:\,0<\tau_j\le t} \left(V_{\tau_j} - V_{\tau_j-}\right) \\
&- \int_0^t \xi_s^H X_{s-}\,(a\,ds+\sigma\,dW_s) - \sum_{j\,:\,0<\tau_j\le t} \xi_{\tau_j}^H X_{\tau_j-} U_j, \sigma \int_0^t X_{s-}\,dW_s \\
&+ \sum_{j\,:\,0<\tau_j\le t} X_{\tau_j-}U_j - E_1\lambda \int_0^t X_{s-}\,ds\Bigg] \qquad (3.12)\\
= \sigma^2 &\int_0^t \left(\psi_s - \xi_s^H\right) X_{s-}^2\,ds \\
+ &\sum_{j\,:\,0<\tau_j\le t} \left(V_{\tau_j} - V_{\tau_j-} - \xi_{\tau_j}^H X_{\tau_j-}U_j\right) X_{\tau_j-}U_j .
\end{aligned}
$$

Для того, щоб використати лему 2.1, покажемо, що

$$
\left(V_{\tau_j} - V_{\tau_j-} - \xi_{\tau_j}^H X_{\tau_j-}U_j\right) X_{\tau_j-}U_j \tag{3.13}
$$

є неперервною функцією від деякого неперервного зліва узгодженого векторного процесу Y_t, взятого в момент τ_j, і від U_j. Розглянемо

$$
\Phi_1(t,y,z) = \mathsf{E}\left[\left\{f\left(y(1+z)\frac{X_T}{X_t}\right) - f\left(y\frac{X_T}{X_t}\right)\right\}\frac{\hat Z_T}{\hat Z_t}\right].
$$

Використовуючи теорему Лебега про мажоровану збіжність і не більш ніж поліноміальне зростання f, можна легко показати, що $\Phi_1(t,y,z)$ неперервна за t, y. Нагадаємо, що $F(t,x)$ неперервна за t. З не більш ніж поліноміального зростання f ми отримуємо, що також виконується і умова обмеженості (2.4) в лемі 2.1.

Маємо

$$
\begin{aligned}
V_{\tau_j} - V_{\tau_j-} &= F(t,X_t) - F(t-,X_{t-})\big|_{t=\tau_j} = F(t,X_t) - F(t,X_{t-})\big|_{t=\tau_j} \\
&= \mathsf{E}\left[f\left(v\frac{X_T}{X_t}\right)\frac{\hat Z_T}{\hat Z_t}\right] - \mathsf{E}\left[f\left(y\frac{X_T}{X_t}\right)\frac{\hat Z_T}{\hat Z_t}\right]\Bigg|_{t=\tau_j, y=X_{\tau_j-}, v=X_{\tau_j}} \\
&= \mathsf{E}\left[f\left(y(1+z)\frac{X_T}{X_t}\right)\frac{\hat Z_T}{\hat Z_t}\right] - \mathsf{E}\left[f\left(y\frac{X_T}{X_t}\right)\frac{\hat Z_T}{\hat Z_t}\right]\Bigg|_{t=\tau_j,\ y=X_{\tau_j-}, z=U_j} \\
&= \Phi_1(t,y,z)\big|_{t=\tau_j, y=X_{\tau_j-}, z=U_j}.
\end{aligned}
$$

Використаємо лему 2.1 для векторного процесу $(Y_t) = \left(t, X_{t-}, \xi_t^H\right)$, функції

$$
\Phi(y_1,y_2,y_3,z) = \Phi_1(y_1,y_2,y_3,z)y_1y_2,
$$

і таким чином отримаємо застосування леми 2.1 до суми доданків (3.13).

Як випливає з (3.12) і леми 2.1, для того, щоб $[L,M]_{0\le t\le T}$ був мартингалом, для кожного t ми повинні мати рівність

$$
\begin{aligned}
&\sigma^2 \int_0^t \left(\psi_s - \xi_s^H\right) X_{s-}^2\,ds + \lambda \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} \nu(dz)\left(\Phi_1(s,X_{s-},z)X_{s-}z - \xi_s^H X_{s-}^2 z^2\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \sigma^2\left(\psi_s - \xi_s^H\right) X_{s-}^2 + \lambda \int_{\mathbb{R}} \nu(dz)\left(\Phi_1(s,X_{s-},z)X_{s-}z - \xi_s^H X_{s-}^2 z^2\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \sigma^2 \psi_s X_{s-}^2 + \lambda X_{s-} \int_{\mathbb{R}} \nu(dz)\Phi_1(s,X_{s-},z)z = \left(\sigma^2 + \lambda E_2\right)\xi_s^H X_{s-}^2 .
\end{aligned}
$$

Таким чином,

$$\xi_s^H = \frac{1}{\sigma^2 + \lambda E_2}\left(\sigma^2\psi_s + \frac{\lambda}{X_{s-}}\int_{\mathbb{R}} \nu(dz)\Phi_1(s, X_{s-}, z)z\right)$$

є неперервним зліва процесом таким, що $[L, M]_{0\le t\le T}$ — мартингал і L ортогональний M.

Якщо ми розглянемо випадкову величину $\tilde{U}$, незалежну від всіх інших, і з таким же розподілом, як і U_j, то, з врахуванням (3.10), ми можемо записати

$$\xi_t^H = \frac{1}{\sigma^2 + \lambda E_2}\left(\sigma^2\frac{\partial F}{\partial x}(t,\ X_{t-}) + \frac{\lambda}{X_{t-}}G\left(t, X_{t-}\right)\right),$$

де

$$G\left(t, y\right) = \mathsf{E}\left[\left\{f\left(y(1+\tilde{U})\frac{X_T}{X_t}\right) - f\left(y\frac{X_T}{X_t}\right)\right\}\frac{\hat{Z}_T}{\hat{Z}_t}\tilde{U}\right]. \tag{3.14}$$

Стандартним чином перевіряємо, що $\left(\xi_t^H\right) \in \Theta$.

Далі маємо

$$\begin{aligned} L_t &= V_t - V_0 - \int_0^t \xi_s^H\, dX_s \\ &= \int_0^t \left(\psi_s - \xi_s^H\right) X_{s-}\left(a\, ds + \sigma\, dW_s\right) \\ &\quad + \int_0^t \varrho_s\, ds + \sum_{j\colon 0<\tau_j\le t}\left(V_{\tau_j} - V_{\tau_j-} - \xi_{\tau_j}^H X_{\tau_j-}U_j\right). \end{aligned} \tag{3.15}$$

З існування та єдиності розкладу Фельмера–Швайцера випливає, що $(L_t)_{0\le t\le T}$ є мартингалом.

З леми 2.1 маємо, що мартингалом буде наступний процес:

$$\begin{aligned} &\sum_{j\colon 0<\tau_j\le t}\left(V_{\tau_j} - V_{\tau_j-} - \xi_{\tau_j}^H X_{\tau_j-}U_j\right) - \lambda\int_0^t ds\int_{\mathbb{R}}\nu(dz)\left(\Phi_1\left(s, X_{s-}, z\right) - \xi_s^H X_{s-}z\right) \\ &= \sum_{j\colon 0<\tau_j\le t}\left(V_{\tau_j} - V_{\tau_j-} - \xi_{\tau_j}^H X_{\tau_j-}U_j\right) - \lambda\int_0^t ds\int_{\mathbb{R}}\nu(dz)\Phi_1\left(s, X_{s-}, z\right) \\ &\quad + E_1\lambda\int_0^t \xi_s^H X_{s-}\, ds. \end{aligned}$$

Таким чином, мартингалом є

$$\sum_{j\colon 0<\tau_j\le t}\left(V_{\tau_j} - V_{\tau_j-} - \xi_{\tau_j}^H X_{\tau_j-}U_j\right) - \lambda\int_0^t G_1\left(s, X_{s-}\right) ds + E_1\lambda\int_0^t \xi_s^H X_{s-}\, ds,$$

де для $\tilde{U}$, незалежної від інших елементів і однаково розподіленої з U_j,

$$G_1\left(t, y\right) = \mathsf{E}\left[\left\{f\left(y(1+\tilde{U})\frac{X_T}{X_t}\right) - f\left(y\frac{X_T}{X_t}\right)\right\}\frac{\hat{Z}_T}{\hat{Z}_t}\right]. \tag{3.16}$$

Так ми отримуємо, що

$$\begin{aligned} L_t &= \sigma\int_0^t \left(\psi_s - \xi_s^H\right) X_{s-}\, dW_s + \sum_{j\colon 0<\tau_j\le t}\left(V_{\tau_j} - V_{\tau_j-} - \xi_{\tau_j}^H X_{\tau_j-}U_j\right) \\ &\quad - \lambda\int_0^t G_1\left(s, X_{s-}\right) ds + E_1\lambda\int_0^t \xi_s^H X_{s-}\, ds. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Праві частини (3.15) і (3.17) відрізняються на процес обмеженої варіації. Оскільки $(L_t)_{0\le t\le T}$ — мартингал, цей процес є нулем м.н.

Враховуючи всі проведені міркування, отримуємо наступне твердження.

Теорема 3.1. *Нехай дисконтована ціна акції $(X_t)_{0\le t\le T}$ задовольняє умовам моделі (2.1)–(2.2), $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ — неперервна функція з не більш, ніж поліноміальним зростанням. Тоді елементи ξ_t^H і L_t^H розкладу Фельмера–Швайцера (2.7) платіжної функції $H=f(X_T)$ визначаються рівностями*

$$\xi_t^H=\frac{1}{\sigma^2+\lambda E_2}\left(\sigma^2\frac{\partial F}{\partial x}(t,X_{t-})+\frac{\lambda}{X_{t-}}G(t,X_{t-})\right), \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned} L_t^H&=L_t\\ &=\sigma\int_0^t\left(\frac{\partial F}{\partial x}(s,X_{s-})-\xi_s^H\right)X_{s-}\,dW_s\\ &\quad+\sum_{j\colon 0<\tau_j\le t}\left(V_{\tau_j}-V_{\tau_j-}-\xi_{\tau_j}^H X_{\tau_j-}U_j\right)\\ &\quad-\lambda\int_0^t G_1(s,X_{s-})\,ds+E_1\lambda\int_0^t\xi_s^H X_{s-}\,ds. \end{aligned} \tag{3.19}$$

де F задана формулою (3.1), G — (3.14) і G_1 — (3.16).

Елемент H_0 (ціна H) визначається рівністю (2.11).

4. Вивід стратегії хеджування

Рівняння (2.2) [1] для нашої моделі буде мати вигляд

$$\xi_t^{(H_0)}=\xi_t^H+\alpha_t\left(\int_0^{t-}\xi_s^H\,dX_s-\int_0^{t-}\xi_s^{(H_0)}\,dX_s+L_{t-}\right),\qquad 0<t\le T.$$

Позначимо $\eta_t=\xi_t^{(H_0)}-\xi_t^H$, покладемо $\eta_{0-}=0$ і одержимо рівність

$$\eta_t=\alpha_t\left(L_{t-}-\int_0^{t-}\eta_s\,dX_s\right). \tag{4.1}$$

Далі введемо позначення $\tilde\eta_t=\eta_t/\alpha_t$. З (2.6) маємо, що $\alpha_t=\rho/X_{t-}$. З (2.1) і (4.1) одержимо

$$\tilde\eta_t=L_{t-}-\rho\int_0^{t-}\tilde\eta_s\,(a\,ds+\sigma\,dW_s)-\rho\sum_{j\colon 0<\tau_j<t}\tilde\eta_{\tau_j}U_j=L_{t-}+\int_0^{t-}\tilde\eta_s\,dY_s,$$

де

$$Y_t=-\rho\left(a\,t+\sigma W_t+\sum_{j\colon 0<\tau_j\le t}U_j\right).$$

Позначимо через $\mathcal{E}(Y)_t$ стохастичну експоненту процесу Y_t з $\mathcal{E}(Y)_0=1$. Тоді

$$d\mathcal{E}(Y)_t=\mathcal{E}(Y)_{t-}\,dY_t$$

(теорема 13.5 [19]). Для неперервного справа процесу $\hat\eta_t=\tilde\eta_{t+}$ маємо рівняння

$$\hat\eta_t=L_t+\int_0^t\hat\eta_{s-}\,dY_s. \tag{4.2}$$

Теорема 14.6 [19] дає існування і єдиність розв'язку (4.2). Ми знайдемо розв'язок (4.2) у вигляді

$$\hat\eta_t=\zeta_t\mathcal{E}(Y)_t,$$

де

$$d\zeta_t = \phi_t\, dW_t + \beta_t\, dt + d\left(\sum_{j:\ 0<\tau_j\le t} \gamma_j\right) \tag{4.3}$$

— невідомий неперервний справа $\mathcal{F}_t$-узгоджений процес.

З допомогою формули Іто отримуємо

$$d\hat{\eta}_t = \zeta_{t-}\mathcal{E}(Y)_{t-}\, dY_t + \mathcal{E}(Y)_{t-}\, d\zeta_t + d\left[\zeta,\ \mathcal{E}(Y)\right]_t .$$

Використовуючи (4.2), маємо

$$\mathcal{E}(Y)_{t-}\, d\zeta_t + d\left[\zeta, \mathcal{E}(Y)\right]_t = dL_t. \tag{4.4}$$

З (3.19), (4.3) і (4.4) одержуємо

$$\begin{aligned}
&\phi_t\mathcal{E}(Y)_{t-}\, dW_t + \mathcal{E}(Y)_{t-}\left(\beta_t - \phi_t\sigma\rho\right) dt + d\left(\sum_{j:\ 0<\tau_j\le t} \mathcal{E}(Y)_{\tau_j-}\gamma_j\left(1-\rho U_j\right)\right)\\
&\quad = \sigma\left(\psi_t - \xi_t^H\right) X_{t-}\, dW_t + \lambda\left(E_1\xi_t^H X_{t-} - G_1\left(t, X_{t-}\right)\right) dt\\
&\qquad + d\left(\sum_{j:\ 0<\tau_j\le t}\left(V_{\tau_j} - V_{\tau_j-} - \xi_{\tau_j}^H X_{\tau_j-}U_j\right)\right).
\end{aligned}$$

Таким чином,

$$\phi_t = \frac{\sigma X_{t-}}{\mathcal{E}(Y)_{t-}}\left(\psi_t - \xi_t^H\right),$$

$$\beta_t = \frac{1}{\mathcal{E}(Y)_{t-}}\left[E_1\lambda\xi_t^H X_{t-} - \lambda G_1\left(t,\ X_{t-}\right) + \sigma^2\rho X_{t-}\left(\psi_t - \xi_t^H\right)\right],$$

$$\gamma_j = \frac{V_{\tau_j} - V_{\tau_j-} - \xi_{\tau_j}^H X_{\tau_j-}U_j}{\mathcal{E}(Y)_{\tau_j-}\left(1-\rho U_j\right)}.$$

Нагадаємо, що

$$\eta_t = \alpha_t\tilde{\eta}_t = \frac{\rho}{X_{t-}}\hat{\eta}_{t-} = \frac{\rho}{X_{t-}}\zeta_{t-}\mathcal{E}(Y)_{t-}.$$

Отже, маємо

$$\begin{aligned}
\eta_t = \frac{\rho\mathcal{E}(Y)_{t-}}{X_{t-}}\Bigg\{&\int_0^t \frac{\sigma X_{s-}}{\mathcal{E}(Y)_{s-}}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\left(s, X_{s-}\right) - \xi_s^H\right) dW_s\\
&+ \int_0^t \frac{1}{\mathcal{E}(Y)_{s-}}\Bigg[E_1\lambda\xi_s^H X_{s-} - \lambda G_1\left(s, X_{s-}\right)\\
&\qquad + \sigma^2\rho X_{s-}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\left(s, X_{s-}\right) - \xi_s^H\right)\Bigg] ds\\
&+ \sum_{j:\ 0<\tau_j<t}\frac{V_{\tau_j} - V_{\tau_j-} - \xi_{\tau_j}^H X_{\tau_j-}U_j}{\mathcal{E}(Y)_{\tau_j-}\left(1-\rho U_j\right)}\Bigg\}.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

З усіх проведених вище міркувань ми одержуємо наступне твердження.

Теорема 4.1. *Нехай виконано умови теореми 3.1. Тоді кількість акцій в стратегії хеджування з найменшою варіацією в моделі* (2.1)–(2.2) *дорівнює* $\xi_t^{(H_0)} = \xi_t^H + \eta_t$, *де* ξ_t^H *визначається рівністю* (3.18), *а* η_t *— рівністю* (4.5).

Ціна платіжної функції H в хеджуванні з найменшою варіацією визначається формулою (2.11).

Відмітимо, що у випадку $\rho = 0$ (тоді X_t є мартингалом) результат теореми 4.1 узгоджується з формулами, отриманими в пункті 7.3.4 [7].

Нагадаємо, що $\xi_t^{(H_0)}$ дорівнює кількості акцій ціною X_t в інвестора в момент t. Тоді дисконтована вартість портфеля інвестора в момент t дорівнює

$$V_t = H_0 + \int_0^t \xi_s^{(H_0)}\, dX_s.$$

Наша стратегія самофінансована, тому дисконтована сума, вкладена в неризикові активи в момент t, дорівнюватиме

$$H_0 + \int_0^t \xi_s^{(H_0)}\, dX_s - \xi_t^{(H_0)} X_t.$$

Додаток. Доведення абсолютної неперервності відносно міри Лебега

Тепер ми доведемо, що траєкторії процесу

$$\sum_{j:\ 0<\tau_j\le t} R\left(\tau_{j-1}, \tau_j -, X_{\tau_{j-1}}\right) + R\left(\tau_{N_t}, t, X_{\tau_{N_t}}\right), \qquad 0 \le t \le T,$$

де R визначено в (3.9), є абсолютно неперервними на $[0,T]$ (це використано вище в позначенні (3.11)). Оскільки $R\left(\tau_j, \tau_j, X_{\tau_j}\right) = 0$, досить показати абсолютну неперервність $R\left(\tau_j, t, X_{\tau_j}\right)$ для $t \in [\tau_j, \tau_{j+1}]$.

Для деяких K і n маємо $f(x) \le K(|x|^n + 1)$, $x \in \mathbb{R}$. Для спрощення обчислень вважаємо, що $f(x) \le K|x|^n$, загальний випадок розглядається аналогічно.

Використовуючи останню нерівність для фіксованого ω^N, маємо

$$\begin{aligned}
&\bar F\left(t, x, \omega^N\right) \\
&\quad \le K\, \mathsf{E}^U\, \mathsf{E}^W \Bigg[\left(x \exp\left\{ \left(a - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma(W_T - W_t) \right\} \prod_{j:\ t<\tau_j<T} (1 + U_j) \right)^n \\
&\qquad\qquad \times \exp\left\{ E_1 \lambda \rho (T-t) - \frac{1}{2}\sigma^2\rho^2 (T-t) - \sigma\rho(W_T - W_t) \right\} \\
&\qquad\qquad\qquad \times \prod_{j:\ t<\tau_j<T} (1 - \rho U_j) \Bigg] \\
&\quad = K x^n\, \mathsf{E}^U \left[\left(\prod_{j:\ t<\tau_j<T} (1+U_j) \right)^n \prod_{j:\ t<\tau_j<T} (1 - \rho U_j) \right] \\
&\qquad \times \mathsf{E}^W \Bigg[\exp\left\{ \left(a - \frac{\sigma^2}{2}\right) n (T-t) + \sigma n (W_T - W_t) \right\} \\
&\qquad\qquad \times \exp\left\{ E_1 \lambda \rho (T-t) - \frac{1}{2}\sigma^2\rho^2 (T-t) - \sigma\rho(W_T - W_t) \right\} \Bigg] \\
&\quad = K x^n \left[\mathsf{E}^U (1 + U_j)^n (1 - \rho U_j) \right]^{N_T - N_t} M_1 \le K x^n l^{N_T - N_t} K_1 \le K_2 x^n l^{N_T}.
\end{aligned}$$

Записані тут вище сподівання E^W визначають неперервну функцію від $t \in [0,T]$ і через K_1 ми позначили її максимум. Також взяли

$$K_2 = K K_1, \qquad l = \max\left\{1, \mathsf{E}^U (1 + U_j)^n (1 - \rho U_j)\right\}.$$

Так ми отримуємо

$$\bar F\left(\tau_k, \bar X_{\tau_k}^{(j)}, \omega^N\right) \le K_2 \left(\bar X_{\tau_k}^{(j)}\right)^n l^{N_T}.$$

Враховуючи цю нерівність і (3.5), для $s,t \in [b_j, c_j]$, $s < t$, одержуємо

$$\begin{aligned}
|R(s,t,x_j)| &\le \mathsf{E}^N \left| \sum_{k:\ s<\tau_k\le t} \left[\bar F\left(\tau_k, \bar X^{(j)}_{\tau_k}, \omega^N\right) - \bar F\left(\tau_k -, \bar X^{(j)}_{\tau_k}, \omega^N\right)\right]\right| \\
&\le \mathsf{E}^N K_2 l^{N_T} \left(2 \sum_{k:\ s<\tau_k\le t} \left(\bar X^{(j)}_{\tau_k}\right)^n \right) \\
&\le 2K_2 x_j^n \left\{ \sup_{0\le u\le T} \exp\left\{ 2\left(a - \frac{\sigma^2}{2}\right) u + 2\sigma |W_u| \right\}\right\}^n \mathsf{E}^N \left\{ l^{N_T}(N_t - N_s)\right\}.
\end{aligned}$$

Використовуючи незалежність приростів (N_t), отримуємо

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}^N\left\{l^{N_T}(N_t - N_s)\right\} &= \mathsf{E}^N\left\{l^{N_s}\right\} \mathsf{E}^N \left\{ l^{N_t - N_s}(N_t - N_s)\right\} \mathsf{E}^N\left\{l^{N_T - N_t}\right\} \\
&= \exp\{(l-1)s\lambda\}\, l(t-s)\lambda \exp\{(l-1)(t-s)\lambda\} \\
&\quad \times \exp\{(l-1)(T-t)\lambda\} \\
&\le K_3(t-s).
\end{aligned}$$

де K_3 — константа. Тому для деякої випадкової величини K_4 ми маємо

$$|R(s,t,x_j)| \le K_4 x_j^n (t-s).$$

Для фіксованого $\omega \in \Omega$ і $s,t \in [\tau_j, \tau_{j+1}]$, $s < t$, з означення R отримуємо

$$\left|R\left(\tau_j, t, X_{\tau_j}\right) - R\left(\tau_j, s, X_{\tau_j}\right)\right| = \left|R\left(s, t,\ X_{\tau_j}\right)\right| \le K_4 X^n_{\tau_j}(t-s).$$

Цим доводиться потрібна абсолютна неперервність.

Література

1. M. Schweizer, *Approximating random variables by stochastic integrals*, Annals of Probability **22** (1994), 1536–1575.
2. H. Pham, T. Rheinlander, and M. Schweizer, *Mean-variance hedging for continuous processes: new proofs and examples*, Finance and Stochastic **2** (1998), 173–198.
3. Ch. Hou and I. Karatzas, *Least-squares approximation of random variables by stochastic integrals*, Advanced Studies in Pure Mathematics **41** (2004), 141–166.
4. J. P. Ansel, C. Stricker, *Lois de martingale, densités et décomposition de Föllmer–Schweizer*, Annales de l'Institute Henrie Poincaré, Sec. B, Calcul des Probabilities et Statistique **28** (1992), 375–392.
5. R. Merton, *Option pricing when underlying stock returns are discontinuous*, Journal of Financial Economics **3** (1976), 125–144.
6. R. Cont and P. Tankov, *Financial Modelling with Jump Processes*, Chapman and Hall/CRC financial mathematics series, CRC Press, London, 2004.
7. D. Lamberton and B. Lapeyre, *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*, Chapman and Hall, London, 1996.
8. F. Hubalek, J. Kallsen, and L. Krawczyk, *Variance-optimal hedging for processes with stationary independent increments*, Annals of Applied Probability **16** (2006), № 2, 853–885.
9. M. Mania, M. Santacroce, and R. Tevzadze, *A semimartingale BSDE related to the minimal entropy martingale measure*, Finance and Stochastics **7** (2003), 385–402.
10. M. Schweizer, *Option hedging for semimartingales*, Stochastics Processes and their Applicatons **37** (1991), 339–363.
11. В. М. Радченко, *Стратегія найменшого ризику для процесів зі стрибками*, Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика **1–2** (2003), 55–68.
12. В. Н. Радченко, *Хеджирование наименьшей вариации в модели со скачками в неслучайные моменты времени*, Теория вероятностей и ее применения **51** (2006), № 3, 608–618.
13. P. Monat and C. Stricker, *Fölmer–Schweizer decomposition and mean-variance hedging for general claims*, Annals of Probability **23** (1995), 605–628.
14. H. Föllmer and M. Schweizer, *Hedging of contingent claims under incomplete information*, Applied Stochastic Analysis (M. H. A. Davis and R. J.Elliott, ред.), Stochastics Monogr., т. 5, Gordon and Breach, London–New York, 1991, стор. 389–414.

15. M. Schweizer, *On the minimal martingale measure and the Föllmer–Schweizer decomposition*, Stochastic Analysis and Applications **13** (1995), 573–599.
16. M. Schweizer, *Approximation pricing and the variance-optimal martingale measure*, Annals of Probability **24** (1996), 206–236.
17. X. L. Zhang, *Valuation of american options in a jump-diffusion model*, Numerical Methods in Finance, Publications of the Newton Institute, т. 13, Cambridge University Press, Cambridge, 1997, стор. 93–114.
18. А. Н. Ширяев, *Основы стохастической финансовой математики*, Теория, т. 2, “ФАЗИС”, Москва, 1998.
19. Р. Эллиотт, *Стохастический анализ и его приложения*, “Мир”, Москва, 1986.
20. M. Musiela and M. Rutkowski, *Martingale Methods in Financial Modelling*, Applications of Mathematics, т. 36, Springer, Berlin, 1997.

Кафедра математичного аналізу, механіко-математичний факультет, Національний університет ім. Тараса Шевченка, проспект Глушкова, 6, Київ 03127, Україна
Адреса електронної пошти: vradchenko@univ.kiev.ua

Надійшла 07/05/2007