Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 79, 2008, стор. 155–161

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 79, 2008, pp. 155–161

ПРО ШВИДКІСТЬ ЗБІЖНОСТІ ЦІН БАР'ЄРНИХ ОПЦІОНІВ З ДИСКРЕТНИМ ТА НЕПЕРЕРВНИМ ЧАСОМ

УДК 519.21

О. М. СОЛОВЕЙКО І Г. М. ШЕВЧЕНКО

Анотація. Бар'єрний опціон — це дериватив, що реалізується або погашається, якщо ціна активу перетинає деякий рівень. Більшість моделей побудовано на ринку з неперервним часом. Однак на практиці майже завжди торги проводяться в окремі моменти часу, тобто дискретно. В статті модель Блека–Шоулса розширено у тому розумінні, що розглядаються бар'єрні опціони зі змінним зсувом. Знайдено оцінку швидкості збіжності цін таких опціонів з дискретним часом до цін опціонів з неперервним часом.

1. Вступ

Бар'єрний опціон — це похідний цінний папір, виплата за яким залежить від того, вийде чи ні траєкторія активу (в даному випадку акції) за деякий відомий бар'єр протягом визначеного часу. Таким чином, виплата за бар'єрним опціоном залежить від всієї поведінки ціни акції протягом певного періоду, тобто бар'єрний опціон є частинним випадком екзотичного опціону.

Бар'єрні опціони купівлі та продажу поділяють на опціони виходу ("knock-out") чи входу ("knock-in"). Виплата за опціоном виходу відбувається, якщо ціна акції не вийде за бар'єр, такі опціони поділяються на два типи: якщо ціна акції не перетинає бар'єр знизу, то такий опціон називається "up-and-out", якщо зверху — "down-and-out". Виплата за опціони входу відбувається, якщо ціна акції вийде за бар'єр, вони також поділяються на два типи відповідно: "up-and-in" і "down-and-in". Всього є вісім типів бар'єрних опціонів.

Наприклад, функція виплат для опціону "up-and-in" має вигляд:

$$C = \begin{cases} (S_T - K)^+, & \text{якщо } \max_{0\le t\le T} S_t \ge H, \\ 0, & \text{інакше}, \end{cases}$$

де H — бар'єр ($H > S_0$ і $H > K$), K — страйкова ціна. Виплати для решти типів опціонів визначаються аналогічно.

Задача оцінювання та хеджування бар'єрних опціонів у моделях з неперервним часом є дуже складною, й аналітичні формули для цін таких опціонів відомі лише у простих випадках. Тому виникає потреба у наближеному оцінюванні таких опціонів. Найпростішим з наближених методів є метод дискретизації часу, який полягає у наступному. Часовий інтервал розбивається на m однакових частин і розглядається модель ціни акції вже з дискретним часом. У такій постановці вартість опціону можна наближено підрахувати методом Монте Карло, шляхом моделювання траєкторії ціни первинного активу. З іншого боку, може постати і протилежна задача: у тому випадку, коли є аналітична формула для вартості опціону в моделі з неперервним часом, може виникнути потреба оцінити опціон, виплата за яким здійснюється

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 91B28; Secondary 60G50, 60F05.

при перетині бар'єру ціною активу, яка спостерігається лише у вибрані моменти часу (наприклад, щоденно при закритті біржі).

З практичної точки зору, при наближеному оцінюванні опціону важливо знати якість такого наближення, тобто порядок похибки.

Для бар'єрних опціонів чотирьох типів у моделі зі сталими параметрами ціни акції в статті [1] отримано, за допомогою певного коригувального множника, наближення з похибкою $o(m^{-1/2})$.

Теорема 1.1 ([1]). *Нехай $V(H)$ — ціна бар'єрного опціону в моделі з неперервним часом, а $V_m(H)$ — ціна такого ж бар'єрного опціону в моделі з дискретним часом $0, T/m, 2T/m, \dots, T$. Тоді для будь-якого з дискретних бар'єрних опціонів має місце наближення*

$$V_m(H) = V\left(H \exp\left\{\pm\beta\sigma\sqrt{T/m}\right\}\right) + o(m^{-1/2}),$$

з + для "up" і — для "down" опціону, де стала $\beta = -(\zeta(1/2)/\sqrt{2\pi}) \approx 0.5826$, ζ — дзета-функція Рімана.

Стаття [7] містить більш стисле доведення результату, причому вже для всіх восьми типів, як і в [5]. У [2] отримано швидкість збіжності для опціонів з післядією та інших екзотичних опціонів.

У даній роботі досліджується питання близькості цін бар'єрних опціонів з дискретним та неперервним часом у випадку, коли ціна акцій моделюється геометричним броунівським рухом зі змінним коефіцієнтом зсуву. Доведено, що швидкість збіжності цін таких опціонів має порядок $O(m^{-1/2})$.

2. Основні результати

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — повний імовірнісний простір з фільтрацією $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$, випадковий прцес $\{W_t, t \geq 0\}$ — стандартний $\mathcal{F}_t$-броунівський рух на ньому. Розглянемо модель Блека–Шоулса фінансового ринку, на якому є два активи: безризиковий, ціна якого у момент t дорівнює

$$B_t = B_0 \exp\left\{\int_0^t r_s\, ds\right\},$$

і ризиковий

$$S_t = S_0 \exp\left\{\int_0^t \mu_s\, ds + \sigma W_t\right\}.$$

Для спрощення викладок вважатимемо, що P — мартингальна міра для дисконтованого процесу ціни ризикового активу, тобто $\mu_t = r_t - \sigma^2/2$.

Крім того, для ставки r_t вимагаємо виконання умови Ліпшиця, тобто для всіх $t, s \in [0, T]$

$$|r_t - r_s| \leq C|t - s|, \tag{2.1}$$

де C — стала.

На ринку з неперервним часом справедлива ціна опціона визначається як математичне сподівання дисконтованої виплати за опціоном відносно мартингальної міри. Нехай I_A позначає індикатор події A, $x^+ = \max\{x, 0\}$, і для довільного процесу $Y(t)$ визначимо $\tau(x, Y) := \inf\{t \geq 0\colon Y(t) \geq x\}$, тобто $\tau(H, S) = \tau_H$ — перший момент часу t, в який S_t досягне рівня H. Тоді, наприклад, ціна Європейського опціону купівлі "up-and-out" задається як

$$V(H) = \mathsf{E}\left(\exp\left\{-\int_0^T r_t\, dt\right\}(S_T - K)^+ I_{\{\tau(H,S)>T\}}\right),$$

де $K > 0$ — страйкова ціна, $H > S_0$ — бар'єр, а ціна Європейського опціону продажу "down-and-in" — як

$$V(H) = \mathsf{E}\left(\exp\left\{-\int_0^T r_t\,dt\right\}(K - S_T)^+ I_{\{\tau^*(H,S)\le T\}}\right),$$

де $H < S_0$ — бар'єр і $\tau^*(x, Y) := \inf\{t \ge 0\colon Y(t) \le x\}$. Ціни решти бар'єрних опціонів визначаються аналогічно. У статті Мертона [8] знайдено явний вигляд ціни всіх восьми видів бар'єрних опціонів у випадку, коли нейтральна до ризику відсоткова ставка r є сталою.

Розглянемо тепер модель з дискретним часом. Розіб'ємо часовий інтервал $[0, T]$ на m частин точками $t_i = i\Delta t$, $i = 0, \dots, m$. У точці t_n ціну акції задамо як

$$S_n = S_{n-1}\exp\left\{\mu_{t_n}\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}Z_n\right\}, \qquad n \ge 1.$$

Роль "випадкового рушія" фінансового ринку, яку в моделі з неперервним часом грав броунівський процес, тут грає випадкове блукання W_n, визначене як

$$W_n := \sum_{i=1}^n Z_i,$$

де Z_i — незалежні стандартні нормальні величини. Зараз ціна Європейського опціону купівлі "up-and-out" задається так:

$$V_m(H) = \mathsf{E}\left(\exp\left\{-\sum_{i=0}^{m-1} r_{t_i}\Delta t\right\}(S_m - K)^+ I_{\{\tau'(H,S)>m\}}\right).$$

де $\tau'(H, S) := \inf\{n \ge 1\colon S_n \ge H\}$, тобто $\tau'(H, S) = \tau_H^m$ — це перший дискретний момент k, в який S_{t_k} перетне рівень H.

У подальшому символом C ми позначатимемо сталу, значення якої може змінюватися від одного рядка до іншого.

Теорема 2.1. *Для різниці справедливих цін Європейського опціону купівлі "up-and-out" в дискретній і неперервній моделях, де неперервну модель ціни акції описано вище, причому виконується умова* (2.1), *справедлива оцінка*

$$V_m(H) - V(H) = O\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right), \qquad m \to \infty.$$

Доведення. Оскільки сумісний розподіл випадкових величин $\Delta t W_1, \dots, \Delta t W_m$ такий самий, як в $W_{t_1}, \dots, W_{t_m}$, то ми можемо вважати, що $W_n = W_{t_n}$, це спростить викладки.

Розглянемо різницю справедливих цін Європейського опціону купівлі "up-and-out" в дискретній і неперервній моделях для знаходження швидкості збіжності їх цін в моделях:

$$\begin{aligned}
V_m(H) - V(H) &= \exp\left\{-\sum_{i=0}^{m-1} r_{t_i}\Delta t\right\}\mathsf{E}\left(\left((S_m - K)^+ - (S_T - K)^+\right)I_{\{\tau_H^m>T\}}\right)\\
&\quad + \exp\left\{-\sum_{i=0}^{m-1} r_{t_i}\Delta t\right\}\mathsf{E}\left((S_T - K)^+\left(I_{\{\tau_H^m>T\}} - I_{\{\tau_H>T\}}\right)\right)\\
&\quad + \mathsf{E}\left((S_T - K)^+ I_{\{\tau_H^m>T\}}\right)\left(\exp\left\{-\sum_{i=0}^{m-1} r_{t_i}\Delta t\right\} - \exp\left\{-\int_0^T r_t\,dt\right\}\right)\\
&= \delta_1^m + \exp\left\{-\sum_{i=0}^{m-1} r_{t_i}\Delta t\right\}\mathsf{E}\left((S_T - K)^+\left(I_{\{\tau_H^m>T\}} - I_{\{\tau_H>T\}}\right)\right) + \delta_2^m,
\end{aligned}$$

де, завдяки припущенням щодо функції r,

$$|\delta_2^m| \le (H-K)\left|\left(\exp\left\{-\int_0^T r_t\,dt\right\} - \exp\left\{-\sum_{i=0}^{m-1} r_{t_i}\Delta t\right\}\right)\mathsf{P}\left(\tau_H^m > T\right)\right|$$
$$\le C\left|\exp\left\{-\int_0^T r_t\,dt + \sum_{i=0}^{m-1} r_{t_i}\Delta t\right\} - 1\right|.$$

Для довільних x має місце нерівність: $|e^x - 1| \le |x|\exp\{|x|\}$. Скориставшись нею, отримаємо, що

$$|\delta_2^m| \le C\left|-\int_0^T r_t\,dt + \sum_{i=0}^{m-1} r_{t_i}\Delta t\right| = C\left|\sum_{i=0}^{m-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} (r_t - r_{t_i})\,dt\right|$$
$$\le C\sum_{i=0}^{m-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} |r_t - r_{t_i}|\,dt \le C\Delta t \le C\sqrt{\Delta t}.$$

Для оцінки δ_1^m зауважимо, що S є розв'язком стохастичного диференціального рівняння $dS_t = r_t\,dt + \sigma\,dW_t$, а S_m — Ейлеровою апроксимацією для значення S_T цього розв'язку. Тоді, завдяки відомій оцінці для математичного сподівання їхньої різниці (див., напр., [6, розділ 9.6]) і обмеженості r,

$$|\delta_1^m| \le C\,\mathsf{E}\,|S_T - S_m| \le C\sqrt{\Delta t}.$$

Тому

$$|V_m(H) - V(H)| \le C\left|\mathsf{E}\left((H-K)\left(I_{\{\tau_H^m > T\}} - I_{\{\tau_H > T\}}\right)\right)\right| + C\sqrt{\Delta t}$$
$$= C\left|\mathsf{E}\left(I_{\{\tau_H^m > T\}} - I_{\{\tau_H > T\}}\right)\right| + C\sqrt{\Delta t}.$$

Для оцінки першого доданку ми скористаємося формулою Гірсанова. З огляду на це, введемо такі позначення. Для обмеженої вимірної функції $g\colon [0,T] \to \mathbf{R}$ визначимо $W_t(g) = W_t + \int_0^t g(s)/\sigma\,ds$ — броунівський рух зі зсувом g/σ,

$$\mathsf{E}(g) = \exp\left\{-\int_0^T \frac{g(s)}{\sigma}\,dW_s - \frac{1}{2}\int_0^T \frac{g^2(s)}{\sigma^2}\,ds\right\}$$

є щільністю мартингальної міри P^g для $W(g)$, $\mathsf{E}^g(\cdot) = \mathsf{E}(\mathsf{E}(g)\,\cdot)$ математичне сподівання відносно цієї міри; для процесу X визначимо

$$X^* = \sup_{[0,T]} X_t, \qquad X_m^* = \max_{1\le i\le m} X_{t_i}.$$

Також позначимо

$$\mu_t^m = \sum_{i=0}^{m-1} \mu_{t_i} I_{t\in[t_i,t_{i+1})}, \qquad L = \frac{1}{\sigma}\ln(H/S_0), \qquad S_m' = \max_{1\le i\le m} S_i.$$

Запишемо, враховуючи, що за теоремою Гірсанова $W(g)$ і $\mathsf{E}^{-1}(g)$ мають такий самий сумісний розподіл відносно P^g, що й W та $\mathsf{E}(-g)$ відносно P

$$\left|\mathsf{E}\left(I_{\{\tau_H^m > T\}} - I_{\{\tau_H > T\}}\right)\right| = \left|\mathsf{E}\left(I_{\{S^* \ge H\}}\right) - \mathsf{E}\left(I_{\{S_m' \ge H\}}\right)\right|$$
$$= \left|\mathsf{E}^{\mu}\left(\mathsf{E}^{-1}(\mu) I_{\{(W(\mu))^* \ge L\}}\right) - \mathsf{E}^{\mu^m}\left(\mathsf{E}^{-1}(\mu^m) I_{\{(W(\mu^m))_m^* \ge L\}}\right)\right|$$
$$= \left|\mathsf{E}\left(\mathsf{E}(-\mu) I_{\{W^* \ge L\}}\right) - \mathsf{E}\left(\mathsf{E}(-\mu^m) I_{\{W_m^* \ge L\}}\right)\right|$$
$$\le \mathsf{E}\left(|\mathsf{E}(-\mu) - \mathsf{E}(-\mu^m)|\, I_{\{W^* \ge L\}}\right) + \mathsf{E}\left(\mathsf{E}(-\mu^m)\left|I_{\{W^* \ge L\}} - I_{\{W_m^* \ge L\}}\right|\right)$$
$$= \varepsilon_1^m + \varepsilon_2^m.$$

Оцінимо спочатку перший доданок. Зауважимо, що $\mathsf{E}(-\mu)$ є значенням у точці T розв'язку стохастичного диференціального рівняння $dX_t = \mu/\sigma\, dW_t$, а $\mathsf{E}(-\mu^m)$ – Ейлеровою апроксимацією для нього, отже за згаданою вище стандартною оцінкою

$$\varepsilon_1^m \leq \mathsf{E}\left(|\mathsf{E}(-\mu) - \mathsf{E}(-\mu^m)|\right) \leq C\sqrt{\Delta t}.$$

Для оцінки ε_2^m одразу зауважимо, що $I_{\{W^*\geq L\}} - I_{\{W_m^*\geq L\}} = I_{\{W^*\geq L, W_m^*<L\}}$, тобто при оцінці математичного сподівання можна вважати W_{t_i} обмеженими згори сталою L. Здійснивши у формулі для $\mathsf{E}(-\mu^m)$ підсумовування частинами:

$$\int_0^T \frac{\mu_t^m}{\sigma}\, dW_t = \frac{1}{\sigma}\sum_{i=0}^{m-1} \mu_{t_i}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) = \frac{1}{\sigma}\left(\mu_{t_{m-1}} W_{t_m} - \sum_{i=1}^{m-1} W_{t_i}(\mu_{t_i} - \mu_{t_{i-1}})\right)$$

і використавши умову Ліпшиця для μ, ми можемо записати

$$\varepsilon_2^m \leq C\,\mathsf{E}\left(\exp\left\{C \sup_{1\leq i\leq m}(W_{t_i})_-\right\} I_{\{W^*\geq L, W_m^*<L\}}\right),$$

тут $x_- = -\min\{x, 0\}$. Позначимо $Z = \sup_{1\leq i\leq m}(W_{t_i})_-$. Випадкові події

$$A_m = \{W^* \geq L, W_m^* < L\} \quad \text{та} \quad B_x = \left\{\sup_{1\leq i\leq m}(W_{t_i})_- > x\right\}$$

є від'ємно корельованими. У цьому можна переконатися і безпосередньо, виписавши сумісну щільність розподілу W_{t_i}, $i = 1, \ldots, m$, та W^*. Але інтуїтивно це зрозуміло, якщо подивитися на умовні ймовірності цих подій за умови $W_m^* = y$, $y \in (x, L)$ – при кожному y їхня від'ємна корельованість очевидна.

Записавши тепер

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\left(e^{CZ} I_A\right) &= \mathsf{E}\left(\left(1 + \int_0^\infty C e^{Cx} I_{\{Z>x\}}\, dx\right) I_{A_m}\right) \\
&= \mathsf{P}(A_m) + C\int_0^\infty e^{Cx}\, \mathsf{P}(\{Z > x\} \cap A_m)\, dx \\
&\leq \mathsf{P}(A_m) + C\int_0^\infty e^{Cx}\, \mathsf{P}(B_x)\, \mathsf{P}(A_m)\, dx = \mathsf{P}(A_m)\, \mathsf{E}\left(e^{CZ}\right) \leq C\, \mathsf{P}(A_m).
\end{aligned}$$

Залишилося зауважити, що одним згідно з [2, теорема 2] є те, що $\mathsf{P}(A_m) \sim C\sqrt{\Delta t}$ при $m \to \infty$, звідси $\varepsilon_2^m \leq C\sqrt{\Delta t}$.

Отже, маємо

$$|V_m(H) - V(H)| \leq C\Delta t = O\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right). \quad \square$$

Зауваження 2.2. Одержана оцінка порядку швидкості збіжності є точною, зокрема для броунівського руху з нульовим зсувом, див. [2, теорема 2].

3. Моделювання

Розглянемо наступну функцію зсуву:

$$\mu_t = \begin{cases} \mu_1, & 0 \leq t < T/2, \\ \mu_2, & T/2 \leq t \leq T. \end{cases}$$

Ця функція (і відповідна ставка r_t) не задовольняє умову неперервності (2.1), яку ми на неї накладали. Але, якщо простежити за ходом доведення теореми 2.1, неважко побачити, що достатньо, щоб умова (2.1) виконувалась для $t = t_i$, $s \in [t_i, t_{i+1})$, що саме справджується для такої функції.

Згідно з [4], для броунівського руху X_t з початковим значенням x і сталим коефіцієнтом зсуву μ сумісна щільність розподілу максимума M_t на відрізку $[0,t]$, точки T_t максимума та значення X_t задається формулою

$$\begin{aligned}&\mathsf{P}(X_t \in dz, M_t \in dy, T_t \in ds)\\ &\quad= \frac{(y-x)(y-z)}{\pi\sqrt{s^3(t-s)^3}} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2s} - \frac{(y-z)^2}{2(t-s)} - \mu(x-z) - \frac{\mu^2 t}{2}\right) dz\,dy\,ds\\ &\quad=: f_{t,x,\mu}(z,y,s)\,dz\,dy\,ds\end{aligned}$$

при $x \le y$ та $z \le y$, при $x > y$ або $z > y$ вона дорівнює нулю. Позначивши

$$\nu(T) = \exp\left\{-\int_0^T r_t\,dt\right\} = \exp\left\{-\frac{T}{2}\left(\mu_1 + \mu_2 + \sigma^2\right)\right\}$$

і враховуючи, що $Z_t = \sigma^{-1}\ln S_t$ є броунівським рухом зі зсувом $\nu_1 = \mu_1/\sigma$ на $[0,T/2)$ і $\nu_2 = \mu_2/\sigma$ на $[T/2,T]$, ми можемо подати справедливу ціну Європейського опціону купівлі “up-and-out” як

$$\begin{aligned}V(H) &= \mathsf{E}\left(\nu(T)(S_T-K)^+ I_{\{\tau(H,S)>T\}}\right) = \nu(T)\,\mathsf{E}\left((S_T-K)^+ I_{\left\{\sup_{[0,T]} S_t<H\right\}}\right)\\ &= \nu(T)\,\mathsf{E}\left(\mathsf{E}\left((S_T-K)^+ I_{\left\{\sup_{[T/2,T]} S_t<H\right\}} \,\Big|\, \mathcal{F}_{T/2}\right) I_{\left\{\sup_{[0,T/2]} S_t<H\right\}}\right)\\ &= \nu(T)\,\mathsf{E}\Bigg(\int_0^{T/2}\int_{Z_{T/2}}^{(\ln H)/\sigma}\int_{-\infty}^{y} (e^{\sigma z}-K)^+\\ &\qquad\qquad \times f_{T/2,Z_{T/2},\nu_2}(z,y,s)\,dz\,dy\,ds\, I_{\left\{\sup_{[0,T/2]} S_t<H\right\}}\Bigg)\\ &= \nu(T)\int_0^{T/2}\int_{Z_0}^{(\ln H)/\sigma}\int_{-\infty}^{v} f_{T/2,Z_0,\nu_1}(x,v,u)\\ &\qquad \times \int_0^{T/2}\int_x^{(\ln H)/\sigma}\int_{-\infty}^{y} (e^{\sigma z}-K)^+ f_{T/2,x,\nu_2}(z,y,s)\,dz\,dy\,ds\,dx\,dv\,du.\end{aligned}$$

Останній інтеграл є доволі важким для підрахунку через високу розмірність. Проте, інтеграли за змінними y та v можна відшукати у аналітичному вигляді, виразивши їх через стандартну нормальну функцію розподілу; ми не будемо наводимо результати цього інтегрування — формули є дуже громіздкими — а дамо лише кінцеву оцінку для інтегралу.

Візьмемо наступні значення параметрів: $S_0 = 100$, $\sigma = 0.1$, $K = 100$, $H = 105$, $T = 0.2$, $\mu_1 = 0.1$, $\mu_2 = 0.2$. Тоді з точністю 10^{-4}

$$V(H) = 0.4744.$$

Щоб оцінити порядок швидкості збіжності для цін опціонів з дискретним часом, скористаємося методом Монте Карло, для оцінки математичного сподівання змоделюємо 100 000 траєкторій ціни акції (50 000 траєкторій для $m = 1\,000$). Одержані результати занесено у табл. 1. Варто зауважити, що ціни опціонів з дискретним часом є більшими і спадають зі збільшенням розміру поділу. Ця властивість є природною, оскільки чим більше точок у нашому поділі, тим більше та множина моментів, у якій ми перевіряємо, чи вийшла ціна акції за заданий рівень. Інше спостереження полягає у тому, що числовий експеримент також підтверджує точність оцінки швидкості збіжності в теоремі 2.1.

m	$V_m(H)$	$V_m(H) - V(H)$	$(V_m(H) - V(H))\sqrt{m}$
10	0,6808	0,2064	0,6527
20	0,6183	0,1439	0,6435
50	0,5686	0,0942	0,6661
100	0,5476	0,0732	0,7321
200	0,5198	0,0454	0,6421
500	0,5073	0,0329	0,7356
1000	0,4939	0,0195	0,6166

Табл. 1. Ціна $V(H)$ Європейського опціона купівлі "up-and-out" у неперервній моделі та ціна $V_m(H)$ цього ж опціона у дискретній моделі

4. Висновки

Ми довели, що справедливі ціни бар'єрного опціону у дискретній моделі Блека–Шоулса зі змінним коефіцієнтом зсуву збігаються до відповідної ціни в неперервній моделі, і швидкість збіжності оцінюється $O(m^{-1/2})$, де m — кількість операційних моментів у дискретній моделі.

Література

1. M. Broadie, P. Glasserman, and S. G. Kou, *A continuity correction for discrete barrier options*, Math. Finance **7** (1997), 325–349.
2. M. Broadie, P. Glasserman, and S. G. Kou, *Connecting discrete and continuous path-dependent options*, Finance and Stochastics **3** (1999), 55–82.
3. P. Carmona, F. Petit, J. Pitman, and M. Yor, *On the law of homogeneous functionals of the brownian bridge*, Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica **35** (1999), 445–455.
4. E. Csáki, A. Földes, and P. Salminen, *On the joint distribution of the maximum and its location for a linear diffusion*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Probab. Stat. **23** (1987), 179–194.
5. P. Hörfelt, *Extension of the corrected barrier approximation by Broadie, Glasserman, and Kou*, Finance and Stochastics **7** (2003), 231–243.
6. P. E. Kloeden and E. Platen, *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, Springer, Berlin, 1992.
7. S. G. Kou, *On pricing of discrete barrier options*, Statistika Sinica **13** (2003), 955–964.
8. R. C. Merton, *Theory of rational option pricing*, Bell J. Econom. Manage. Sci. **4** (1973), 141–183.

Кафедра теорії ймовірностей та математичної статистики, механіко-математичний факультет, Національний університет ім. Тараса Шевченка, проспект Глушкова, 6, Київ 03127, Україна

Адреса електронної пошти: osoloveyko@univ.kiev.ua

Кафедра теорії ймовірностей та математичної статистики, механіко-математичний факультет, Національний університет ім. Тараса Шевченка, проспект Глушкова, 6, Київ 03127, Україна

Адреса електронної пошти: zhora@univ.kiev.ua

Надійшла 07/03/2008