Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 81, 2009, стор. 76–87

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 81, 2009, pp. 76–87

УМОВИ РІВНОМІРНОЇ ЗБІЖНОСТІ ЗА ЙМОВІРНІСТЮ ВЕЙВЛЕТ-РОЗКЛАДІВ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ З $Exp_{\varphi}(\Omega)$

УДК 519.21

Ю. В. КОЗАЧЕНКО І О. В. ПОЛОСЬМАК

Анотація. В роботі отримано умови для рівномірної збіжності за ймовірністю на $[0,T]$ вейвлет розкладів випадкових Орлічевих процесів експоненційного типу.

Abstract. In the paper we present conditions for uniform convergence in probability on $[0,T]$ of wavelet expansions for random process $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ from Orlicz spaces of exponential type, with $EX(t) = 0$.

Аннотация. В работе получены условия для равномерной сходимости по вероятности на $[0,T]$ вейвлет разложений случайных Орличевых процессов экспоненциального типа.

1. Вступ

В даній роботі отримано умови рівномірної збіжності за ймовірністю вейвлет зображень Орлічевих випадкових процесів експоненціального типу. Рівномірна збіжність вейвлет-розкладів невипадкових функцій розглядалась в книзі [6]. Питання рівномірної збіжності з ймовірністю 1 та за ймовірністю вейвлет зображень випадкових процесів з різних просторів досліджується в статтях [7], [8], [11], [12]. В цій роботі розглянуто $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$-випадковий строго Орлічевий процес експоненціального типу, наведено його вейвлет-розклад за допомогою неперервних вейвлет функцій:

$$X(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \xi_{0k}\phi_{0k}(t) + \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \eta_{jk}\psi_{jk}(t). \tag{1}$$

Отримано умови, за яких це зображення збігається рівномірно за ймовірністю до випадкового процесу $X(t)$. А саме, умови, за яких:

$$P\left\{\sup_{0\le t\le T} |X(t) - X_{n,k_j}(t)| > \varepsilon\right\} \to 0,$$

при $n \to \infty$ та $k_j \to \infty$ для будь-яких $j \in \mathbb{N}_0 := \{0, 1, \dots\}$, де

$$X_{n,k_j}(t) = \sum_{|k|\le k_0} \xi_{0k}\phi_{0k}(t) + \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{|k|\le k_j} \eta_{jk}\psi_{jk}(t). \tag{2}$$

Робота складається з чотирьох розділів. Другий розділ містить необхідні відомості з вейвлет аналізу та теорему, яка дає умови збіжності вейвлет розкладу до процесу в нормі простору $L_2(\mathbb{R})$. В третьому розділі наведено основні відомості з теорії

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60G12; 42C40.

Ключові слова і фрази. Випадковий процес, вейвлет розклад, збіжність за ймовірністю, простори Орліча.

Дослідження виконані за сприяння La Trobe University Research Grant #501821.

Орлічевих випадкових процесів. В четвертому розділі отримано умови для рівномірної збіжності за ймовірністю вейвлет розкладів випадкових Орлічевих процесів експоненційного типу.

2. Вейвлет-зображення випадкових процесів

Нехай $\phi = \{\phi(x), x \in \mathbb{R}\}$, $\psi = \{\psi(x), x \in \mathbb{R}\}$-функції з простору $L_2(\mathbb{R})$ та $\widehat{\phi}(y)$-перетворення Фур'є ϕ:

$$\widehat{\phi}(y) = \int_{\mathbb{R}} e^{-iyx}\phi(x)\,dx. \tag{3}$$

Припустимо, що виконуються наступні умови:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(y + 2\pi k)|^2 = 1. \tag{4}$$

майже скрізь.

Нехай існує така 2π-періодична функція $m_0(x) \in L_2([0, 2\pi])$, що

$$\widehat{\phi}(y) = m_0[y/2]\widehat{\phi}[y/2], \tag{5}$$

$\widehat{\phi}(0) \neq 0$ та функція $\widehat{\phi}(y)$ неперервні в 0. В цьому випадку функція $\phi(x)$ називається f-вейвлетом.

Нехай $\psi(x)$- обернене перетворення Фур'є до функції $\widehat{\psi}(y)$, яка задовільняє наступне функціональне рівняння:

$$\widehat{\psi}(y) = \overline{m_0\left(\frac{y}{2} + \pi\right)} \cdot \exp\left\{-i\frac{y}{2}\right\} \cdot \widehat{\psi}\left(\frac{y}{2}\right).$$

Функція

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{iyx}\widehat{\psi}(y)\,dy.$$

називається m-вейвлетом.

Нехай

$$\phi_{jk}(x) = 2^{j/2}\phi(2^j x - k); \psi_{jk}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k), j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}. \tag{6}$$

Відомо, що сім'я функцій $\{\phi_{0k}; \psi_{jk}, j = 0, 1, 2, \ldots; k \in \mathbb{Z}\}$ ортонормований базис в $L_2(\mathbb{R})$ (див., наприклад, [3], [4]).

Будь-яка функція $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$ може бути представлена у вигляді:

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_{0k}\phi_{0k}(t) + \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \beta_{jk}\psi_{jk}(t), \tag{7}$$

$$\alpha_{0k} = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\phi_{0k}(x)}\,dx, \beta_{jk} = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\psi_{jk}(x)}\,dx. \tag{8}$$

Зображення (7) називається вейвлет-розкладом.

Ряди (7) збігаються в нормі простору $L_2(\mathbb{R})$, тобто

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\alpha_{0k}|^2 + \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\beta_{jk}|^2 < \infty.$$

Інтеграли, які визначають α_{0k} та β_{jk}, можуть існувати для функцій з $L_1(\mathbb{R})$ та з інших просторів. Тому можна отримати зображення (7) для більш широкого класу функцій, ніж $L_2(\mathbb{R})$.

Нехай $\{\Omega, B, P\}$- стандартний ймовірнісний простір. Нехай $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$-випадковий процес, $EX(t) = 0$.

Можна отримати розклад (7) для випадкових процесів, траєкторії яких належать простору $L_2(\mathbb{R})$ з ймовірністю одиниця. Але багато процесів не мають такої властивості. Наприклад, траєкторії стаціонарних процесів не належать $L_2(\mathbb{R})$.

Вивчимо зображення типу (7) для $X(t)$, тобто:

$$X(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \xi_{0k}\phi_{0k}(t) + \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \eta_{jk}\psi_{jk}(t), \tag{9}$$

де інтеграли

$$\xi_{0k} = \int_{\mathbb{R}} X(t)\overline{\phi_{0k}(t)}\,dt, \eta_{jk} = \int_{\mathbb{R}} X(t)\overline{\psi_{jk}(t)}\,dt$$

будуть визначені як інтеграли в середньому квадратичному.

При доведенні рівномірної збіжності вейвлет розкладу (9) будемо розглядати таке наближення:

$$X_{n,k_j}(t) = \sum_{|k|\le k_0} \xi_{0k}\phi_{0k}(t) + \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{|k|\le k_j} \eta_{jk}\psi_{jk}(t). \tag{10}$$

Далі буде наведено Теорему 2.1, в якій одержано умови, за яких має місце збіжність в нормі простору $L_2(\Omega)$ вейвлет зображення. Доведення цієї теореми можна знайти в роботі [7].

Означення 2.1. [6] Нехай ϕ це f-вейвлет. Для ϕ виконується припущення S, якщо існує функція $\Phi = \{\Phi(x), x \ge 0\}$ така, що $\Phi(0) < \infty$, $\Phi(x)$ спадає при $x \ge 0$, $|\phi(x)| \le \Phi(|x|)$ майже скрізь та

$$\int_{\mathbb{R}} \Phi(|x|)\,dx < \infty.$$

Теорема 2.1. *Нехай $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$-випадковий процес такий, що $EX(t) = 0$ та $E|X(t)|^2 < \infty$ для всіх $t \in \mathbb{R}$ з неперервною коваріаційною функцією $R(t,s)$. Нехай вейвлети ϕ та ψ неперервні функції та для них виконується припущення S, $c = \{c(x), x \in \mathbb{R}\}$- така парна функція, що $c(x) > 1$, $x \in \mathbb{R}$ та неспадає при $x > 0$, нехай існує така функція $0 < A(a) < \infty$, $a > 0$, що для досить великих $x : c(ax) \le c(x) \cdot A(a)$.*

Якщо $\int_{\mathbb{R}} c(x)\Phi(|x|)\,dx < \infty$ та $|R(t,t)|^{1/2} \le c(t)$ тоді:

1)$X_{n,k_j}(t) \in L_2(\Omega)$,

2)$X_{n,k_j}(t) \to X(t)$ при $n \to \infty$, $k_j \to \infty$, для всіх $j = 0, 1, \dots$ в середньому квадратичному, тобто $E|X_{n,k_j}(t) - X(t)|^2 \to 0$.

3. Випадкові процеси з просторів Орліча експоненціального типу.

Означення 3.1. [1] Неперервна парна опукла функція $U = \{U(x), x \in \mathbb{R}\}$ називається C-функцією, якщо $U(0) = 0$ та $U(x)$ монотонно зростає при $x > 0$.

Нехай $\{\Omega, L, P\}$–стандартний ймовірнісний простір.

Означення 3.2. [1] Нехай $U(x)$- довільна C-функція. Простором Орліча випадкових величин $L_U(\Omega)$ називаємо таку сім'ю випадкових величин, що для кожної $\xi \in L_U(\Omega)$ існує константа $r_\xi > 0$ така, що $EU\left(\frac{\xi}{r_\xi}\right) < \infty$.

Теорема 3.1. [1] *Простір Орліча $L_U(\Omega)$ є банаховим відносно норми Люксембурга $\|\xi\|_U = inf\{r > 0 : EU(\xi/r) \le 1\}$.*

Означення 3.3. [1] Простір Орліча $L_U(\Omega)$ називається простором Орліча експоненціального типу, якщо він породжується функцією вигляду $U(x) = \exp\{\varphi(x)\} - 1$, де $\varphi(x)$- деяка C-функція. Згідно з [1] простори Орліча експоненціального типу позначатимо $Exp_\varphi(\Omega)$, а норму в цьому просторі- $\|\cdot\|_{Exp_\varphi}$.

Означення 3.4. [1] Випадковий процес $X = \{X(t), t \in \mathbb{T}\}$, де $\mathbb{T}$– деяка параметрична множина, належить простору $L_U(\Omega)$, якщо для будь-якого $t \in \mathbb{T}$ випадкова величина $X(t)$ належить простору $L_U(\Omega)$.

Означення 3.5. [14] Випадковий процес $X(t) \in L_U(\Omega)$ називається строго Орлічевим, якщо існує константа C_T, що для будь-яких $t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathbb{T}$ та $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ має місце співвідношення $\| \sum_{k=1}^n c_k X(t_k) \|_U < C_T \sqrt{\mathsf{E} \sum_{k=1}^n c_k X(t_k)}$.

Теорема 3.2. *Нехай $\mathbb{T} = [0, T]$. $X_n = \{X_n(t), t \in \mathbb{T}\}$ - послідовність сепарабельних випадкових процесів з простору Орліча $L_U(\Omega)$. Припустимо, що виконуються наступні умови:*

1) Існує монотонно зростаюча функція така, що $\sigma(h) \to 0$, $h \to 0$ та

$$\sup_{n \geq 1} \rho(t,s) = \sup_{\substack{|t-s| \leq h \\ t,s \in \mathbb{T}}} \|X_n(t) - X_n(s)\|_{Exp_\varphi} \leq \sigma(h). \tag{11}$$

2)$X_n(t)$ збігається до сепарабельного процесу $X(t)$ при $n \to \infty$ в кожній точці за ймовірністю.

3)Для всіх $\varepsilon > 0$ збігається інтеграл:

$$\int_0^\varepsilon U^{(-1)} \left(\frac{1}{2\sigma^{(-1)}(t)} + 1 \right) dt < \infty. \tag{12}$$

Тоді $X_n(t)$, $X(t)$ неперервні та $X_n(t) \to X(t)$ при $n \to \infty$ рівномірно за ймовірністю на $\mathbb{T}$

Ця теорема випливає з Теореми 3.2, наведеної в роботі [10], враховуючи той факт, що

$$N_\rho(t) \leq \frac{1}{2\sigma^{(-1)}(t)} + 1.$$

Лема 3.1. *Нехай в (11) функція $\sigma(u)$ задана в такий спосіб*

$$\sigma(u) = \frac{c}{\left(\ln(e^\alpha + \frac{1}{u})\right)^\alpha}, \ 0 < \alpha < 1,$$

а $U(x) = \exp\{\varphi(x)\} - 1$, тоді припущення (12) виконується за умови:

$$\int_0^\varepsilon \varphi^{(-1)} \left(\left(\frac{c}{t}\right)^{1/\alpha} \right) dt < \infty. \tag{13}$$

Доведення. Дійсно, у цьому випадку

$$\sigma^{(-1)}(t) = \frac{1}{e^{\left(\frac{c}{t}\right)^{1/\alpha}} - e^\alpha},$$

а $U^{-1}(t) = \varphi^{-1}(\ln(t+1))$. Тоді йнтеграл (12) можна оцінити таким чином:

$$\int_0^\varepsilon U^{(-1)} \left(\frac{1}{2\sigma^{(-1)}(t)} + 1 \right) dt = \int_0^\varepsilon \varphi^{(-1)} \left(\ln \left(\frac{1}{2\sigma^{(-1)}(t)} + 2 \right) \right) dt$$

$$= \int_0^\varepsilon \varphi^{(-1)} \left(\ln \left(\frac{1}{2} (e^{\left(\frac{c}{t}\right)^{\frac{1}{\alpha}}} - e^\alpha) + 2 \right) \right) dt \leq \int_0^\varepsilon \varphi^{(-1)} \left(\left(\frac{c}{t}\right)^{1/\alpha} \right) dt < \infty.$$

□

4. Рівномірна збіжність вейвлет-зображень процесів з простору Орліча експоненціального типу.

Теорема 4.1. *Нехай $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ - сепарабельний строго Орлічевий випадковий процес із простору $Exp_\varphi(\Omega)$ з неперервною коваріаційною функцією $R(t,s)$. Нехай виконуються умови Теореми 2.1 та умова (13). А для f-вейвлета ϕ та m-вейвлета ψ, відповідного до ϕ, виконуються наступні умови:*

1) існують $\widehat{\psi}'(u)$, $\widehat{\psi}''(u)$ і $\widehat{\psi}(0) = 0$, $\widehat{\psi}'(0) = 0$;

2) існують $c_\phi = \sup_u |\widehat{\phi}(u)| < \infty$, $c_{\phi'} = \sup_u |\widehat{\phi}'| < \infty$, $c_{\psi''} = \sup_u |\widehat{\psi}''(u)| < \infty$;

3)$\widehat{\phi}(u) \to 0$, $u \to \pm\infty$, $\widehat{\psi}(u) \to 0$, $u \to \pm\infty$;

4) існують $\int_{\mathbb{R}} (\ln(1+|u|))^{\alpha} |\widehat{\psi}(u)|^{\beta}\, du < \infty$, $\int_{\mathbb{R}} (\ln(1+|u|))^{\alpha} |\widehat{\phi}(u)|^{\beta}\, du < \infty$, $0 < \beta \le 1$, $0 \le \alpha \le 1$;

5) існують $\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\partial^{k+l}\widehat{R_2}(z,w)}{\partial w \partial z}\right| |w|^t |z|^s\, dwdz < \infty$, $k,l = 0,1$; $t,s = 0,1,2$;

6) $\left|\widehat{R}_2(t,s)\right| < c < \infty$.

Тоді $X_{n,k_j}(t) \to X(t)$ *при* $n \to \infty$, $k_j \to \infty$, *для всіх* $j = 0,1,\ldots$ *рівномірно за ймовірністю на кожному інтервалі* $[0,T]$

Доведення. Умова 2) Теореми 3.2 випливає з Теореми 2.1. Умова (13) згідно з Лемою 3.1 забезпечує виконання умови 3) Теореми 3.2. Покажемо, що для зображення $X_{n,k_j}(t)$ та функції

$$\sigma(h) = \frac{B}{\left(\ln(e^{\alpha} + \frac{1}{|h|})\right)^{\alpha}}, \; 0 < \alpha < 1$$

виконується умова (11), а саме, враховуючи, що процес $X(t)$ строго Орлічевий та, враховуючи [14], $X_{n,k_j}(t)$ строго Орлічевий, покажемо, що виконується нерівність:

$$\|X_{n,k_j}(t) - X_{n,k_j}(s)\|_{Exp_\varphi} \le C_T (E|X_{n,k_j}(t) - X_{n,k_j}(s)|^2)^{1/2} \le \frac{\widetilde{B}}{\left(\ln(e^{\alpha} + \frac{1}{|t-s|})\right)^{\alpha}},$$

де $\widetilde{B}$ деяка константа.

Отже, маємо:

$$X_{n,k_j}(t) - X_{n,k_j}(s) = \sum_{|k|\le k_0} \xi_{0k}(\phi_{0k}(t) - \phi_{0k}(s)) + \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{|k|\le k_j} \eta_{jk}(\psi_{jk}(t) - \psi_{jk}(s)),$$

$(E|X_{n,k_j}(t) - X_{n,k_j}(s)|^2)^{1/2} \le \left(E|\sum_{|k|\le k_0} \xi_{0k}(\phi_{0k}(t) - \phi_{0k}(s))|^2\right)^{1/2}$
$+ \sum_{j=0}^{n-1}\left(E|\sum_{|k|\le k_j} \eta_{jk}(\psi_{jk}(t) - \psi_{jk}(s))|^2\right)^{1/2} = (S_1)^{1/2} + \sum_{j=0}^{n-1}(S_2)^{1/2}$.

Покажемо, яким чином можна оцінити S_2, тоді аналогічні методи будуть використані при дослідженні S_1. Дійсно, можемо записати:

$$S_2 \le \sum_{|k|\le k_j}\sum_{|l|\le k_j} |E\eta_{jk}\eta_{jl}||\psi_{jk}(t) - \psi_{jk}(s)||\psi_{jl}(t) - \psi_{jl}(s)|.$$

Спочатку розглянемо $E\eta_{jk}\eta_{jl}$, застосувавши формулу Парсеваля, маємо:

$$E\eta_{jk}\eta_{jl} = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} E\xi(u)\xi(v)\psi_{jk}(u)\psi_{jl}(v)\, dudv$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \widehat{R_2}(z,w)\widehat{\psi}_{jk}(z)\widehat{\psi}_{jl}(w)\, dzdw,$$

де

$$\widehat{R_2}(z,w) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} R(u,v)e^{-izu}e^{-iwv}\, dudv.$$

Зауважимо, що

$$\widehat{\psi}_{jk}(z) = \frac{e^{-i\frac{k}{2^j}z}}{2^{j/2}} \cdot \widehat{\psi}\left(\frac{z}{2^j}\right). \tag{14}$$

В подальших перетвореннях будемо використовувати інтегрування частинами, припущення 1), 2), 5) теореми та наступну нерівність: $\left|\widehat{\psi}(\frac{z}{2^j})\right| = \left|\frac{\widehat{\psi}''(\tilde{z})}{2}\left(\frac{z}{2^j}\right)^2\right| \le c_{\psi''}\frac{|z|^2}{2^{2j}}$.

$$|E\eta_{jk}\eta_{jl}| = \left|\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \widehat{R_2}(z,w)\frac{e^{-i\frac{k}{2^j}w}}{2^{j/2}}\widehat{\psi}\left(\frac{w}{2^j}\right)\frac{e^{-i\frac{l}{2^j}z}}{2^{j/2}}\widehat{\psi}\left(\frac{z}{2^j}\right) dwdz\right|$$

$$= \frac{2^j}{(2\pi)^2|k||l|}\left|\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{\partial^2\widehat{R_2}(z,w)}{\partial w\partial z}\widehat{\psi}(\frac{z}{2^j})\widehat{\psi}(\frac{w}{2^j})\right.\right.$$
$$+\frac{\partial\widehat{R_2}(z,w)}{\partial z}\frac{1}{2^j}\widehat{\psi}'(\frac{w}{2^j})\widehat{\psi}(\frac{z}{2^j})+\frac{\partial\widehat{R_2}(z,w)}{\partial w}\widehat{\psi}(\frac{w}{2^j})\frac{1}{2^j}\widehat{\psi}'(\frac{z}{2^j})$$
$$\left.\left.+\frac{\widehat{R_2}(z,w)}{2^j}\widehat{\psi}'(\frac{w}{2^j})\frac{1}{2^j}\widehat{\psi}'(\frac{z}{2^j})\right)e^{-i\frac{k}{2^j}w}\,dwe^{-i\frac{l}{2^j}z}\,dz\right| \le \frac{1}{|k||l|2^{3j}}A^\psi, \tag{15}$$

де

$$A^\psi = \frac{c^2_{\psi''}}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\left(\left|\frac{\partial^2\widehat{R_2}(z,w)}{\partial w\partial z}\right||w|^2|z|^2+\left|\frac{\partial\widehat{R_2}(z,w)}{\partial z}\right||w||z|^2\right.$$
$$\left.+\left|\frac{\partial\widehat{R_2}(z,w)}{\partial w}\right||w|^2|z|+|\widehat{R_2}(z,w)||w||z|\right)dwdz<\infty.$$

Щоб оцінити різницю $|\psi_{jl}(t)-\psi_{jl}(s)|$ використаємо рівність (14), тоді

$$\psi_{jl}(t) = \frac{1}{(2\pi)}\int_{\mathbb{R}}e^{itz}\frac{1}{2^{j/2}}e^{-i\frac{l}{2^j}z}\widehat{\psi}(\frac{z}{2^j})\,dz, \tag{16}$$

$$\psi_{jl}(t) = \frac{1}{(2\pi)2^{j/2}}\int_{\mathbb{R}}e^{it\left(z+\frac{2^j}{l}\pi\right)}e^{-i\frac{l}{2^j}z}e^{-i\pi}\widehat{\psi}(\frac{z}{2^j}+\frac{\pi}{l})\,dz.$$

Отже,

$$\psi_{jl}(t) = \frac{1}{(4\pi)2^{j/2}}\int_{\mathbb{R}}e^{-i\frac{l}{2^j}z}\left(e^{itz}\widehat{\psi}(\frac{z}{2^j})-e^{it\left(z+\frac{2^j}{l}\pi\right)}\widehat{\psi}(\frac{z}{2^j}+\frac{\pi}{l})\right)dz.$$

Тоді

$$|\psi_{jl}(t)-\psi_{jl}(s)|$$
$$=\frac{1}{(4\pi)}\frac{1}{2^{j/2}}\left|\int_{\mathbb{R}}e^{-i\frac{l}{2^j}z}\left[\left(e^{itz}\widehat{\psi}(\frac{z}{2^j})-e^{it\left(z+\frac{2^j}{l}\pi\right)}\widehat{\psi}(\frac{z}{2^j}+\frac{\pi}{l})\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.-\left(e^{isz}\widehat{\psi}(\frac{z}{2^j})-e^{is\left(z+\frac{2^j}{l}\pi\right)}\widehat{\psi}(\frac{z}{2^j}+\frac{\pi}{l})\right)\right]dz\right|$$
$$\le\frac{1}{(4\pi)}\frac{1}{2^{j/2}}\int_{\mathbb{R}}\left(\left|e^{itz}-e^{isz}-e^{it\left(z+\frac{2^j}{l}\pi\right)}+e^{is\left(z+\frac{2^j}{l}\pi\right)}\right|\left|\widehat{\psi}(\frac{z}{2^j})\right|\right.$$
$$\left.+\left|e^{it\left(z+\frac{2^j}{l}\pi\right)}-e^{is\left(z+\frac{2^j}{l}\pi\right)}\right|\left|\widehat{\psi}(\frac{z}{2^j})-\widehat{\psi}(\frac{z}{2^j}+\frac{\pi}{l})\right|\right)dz$$
$$=\left|\frac{z}{2^j}=u\right|=\frac{2^{j/2}}{(4\pi)}\int_{\mathbb{R}}\left(\left|e^{it2^ju}-e^{is2^ju}-e^{it2^j(u+\frac{\pi}{l})}+e^{is2^j(u+\frac{\pi}{l})}\right|\left|\widehat{\psi}(u)\right|\right.$$
$$\left.+\left|e^{it2^j(u+\frac{\pi}{l})}-e^{is2^j(u+\frac{\pi}{l})}\right|\left|\widehat{\psi}(u)-\widehat{\psi}(u+\frac{\pi}{l})\right|\right)du.$$

Щоб оцінити цей інтеграл, використаємо наступну нерівність:

$$|e^{itz}-e^{isz}|\le 2\left|\sin\frac{z(t-s)}{2}\right|\le 2\left(\frac{\ln(e^\alpha+\frac{z}{2})}{\ln(e^\alpha+\frac{1}{|t-s|})}\right)^\alpha,\ 0<\alpha\le 1 \tag{17}$$

(дивись, наприклад, [13])

Друга частина інтегралу, враховуючи цю нерівність, може бути оцінена наступним чином:

$$I_2=\int_{\mathbb{R}}\left|e^{it2^j(u+\frac{\pi}{l})}-e^{is2^j(u+\frac{\pi}{l})}\right|\left|\widehat{\psi}(u)-\widehat{\psi}(u+\frac{\pi}{l})\right|du=\left|u+\frac{\pi}{l}=v\right|$$
$$=\int_{\mathbb{R}}\left|e^{it2^jv}-e^{is2^jv}\right|\left|\widehat{\psi}(v-\frac{\pi}{l})-\widehat{\psi}(v)\right|dv$$

$$\leq \frac{2}{\left(\ln(e^\alpha + \frac{1}{|t-s|})\right)^\alpha} \int_{\mathbb{R}} \left(\ln(e^\alpha + \frac{|v|2^j}{2})\right)^\alpha \times$$

$$\times \left|\widehat{\psi}(v - \frac{\pi}{l}) - \widehat{\psi}(v)\right|^\beta \left|\widehat{\psi}(v - \frac{\pi}{l}) - \widehat{\psi}(v)\right|^{1-\beta} dv.$$

В наступних перетвореннях будемо використовувати припущення 1), 4) Теореми і такі нерівності:

$$\left|\widehat{\psi}(v - \frac{\pi}{l}) - \widehat{\psi}(v)\right|^\beta = \frac{b}{|l|^\beta}, b = a\pi^\beta,$$

$$\left|\widehat{\psi}(v - \frac{\pi}{l}) - \widehat{\psi}(v)\right|^{1-\beta} \leq \left(\left|\widehat{\psi}(v - \frac{\pi}{l})\right|^{1-\beta} + \left|\widehat{\psi}(v)\right|^{1-\beta}\right)$$

та

$$\int_{\mathbb{R}} b \left(\ln(e^\alpha + \frac{|v|2^j}{2})\right)^\alpha \left|\widehat{\psi}(v - \frac{\pi}{l})\right|^{1-\beta} dv$$

$$\leq b \int_{\mathbb{R}} \left(\ln(2e^\alpha + |v| + \pi)^j\right)^\alpha \left|\widehat{\psi}(v)\right|^{1-\beta} dv = j^\alpha c_1 < \infty,$$

$$c_1 = b \int_{\mathbb{R}} (\ln(2e^\alpha + \pi + |v|))^\alpha \left|\widehat{\psi}(v)\right|^{1-\beta} dv < \infty.$$

Тоді, використовуючи ці факти, маємо:

$$I_2 \leq \frac{2}{\left(\ln(e^\alpha + \frac{1}{|t-s|})\right)^\alpha} \frac{1}{|l|^\beta} j^\alpha 2c_1 \tag{18}$$

Подібним чином можемо оцінити першу частину інтегралу. Почнемо з такої нерівності:

$$\left|e^{it2^j u} - e^{is2^j u} - e^{it2^j(u+\frac{\pi}{l})} + e^{is2^j(u+\frac{\pi}{l})}\right|$$

$$\leq \left|e^{it2^j u} - e^{is2^j u}\right| \left|1 - e^{it2^j \frac{\pi}{l}}\right| + \left|e^{is2^j \frac{\pi}{l}} - e^{it2^j \frac{\pi}{l}}\right| =: |\Delta|$$

$$\leq 2\left|\sin \frac{2^j u(t-s)}{2}\right| \cdot \left|\sin \frac{\pi}{l} 2^j \frac{t}{2}\right| + 2\left|\sin \frac{(t-s)}{2} \frac{\pi}{l} 2^j\right|.$$

Зауважимо, що:

$$\left|\sin \frac{2^j u(t-s)}{2}\right| \leq \left(\frac{\ln(e^\alpha + \frac{2^j|u|}{2})}{\ln(e^\alpha + \frac{1}{|t-s|})}\right)^\alpha, \ 0 < \alpha \leq 1,$$

$$\left|\sin \frac{\pi}{l} 2^j \frac{t}{2}\right| \leq \left(\pi \frac{t}{2}\right)^\beta \cdot \left(\frac{2^j}{|l|}\right)^\beta \leq \left(\pi \frac{T}{2}\right)^\beta \cdot \frac{2^{j\beta}}{|l|^\beta},$$

$$\left|\sin \frac{(t-s)}{2} \frac{\pi}{l} 2^j\right| \leq \left(\frac{\pi 2^j}{|l|}\right)^\beta \cdot \left(\frac{|s-t|}{2}\right)^\beta \leq \left(\frac{2^j}{|l|}\right)^\beta \frac{c_{\alpha,\beta,T}}{\left(\ln(e^\alpha + \frac{1}{|t-s|})\right)^\alpha}.$$

Тоді маємо:

$$|\Delta| \leq \frac{2^{j\beta}}{|l|^\beta} \cdot \frac{j^\alpha}{\left(\ln(e^\alpha + \frac{1}{|t-s|})\right)^\alpha} \left(2\left(\pi \frac{T}{2}\right)^\beta (\ln(1 + |u|))^\alpha + 2c_{\alpha,\beta,T}\right).$$

Отже, використовуючи ці нерівності, для першої частини інтегралу можемо писати:

$$I_1 \leq \frac{2^{j\beta}}{l^\beta} \cdot \frac{j^\alpha}{\left(\ln(e^\alpha + \frac{1}{|t-s|})\right)^\alpha} \cdot c_2, \tag{19}$$

де,

$$c_2 = \int_{\mathbb{R}} \left(2\left(\pi \frac{T}{2}\right)^\beta (\ln(1+|u|))^\alpha + 2c_{\alpha,\beta,T} \right) \left|\widehat{\psi}(u)\right| du < \infty.$$

Враховуючи (18), (19), отримаємо:

$$|\psi_{jk}(t)-\psi_{jk}(s)|\cdot|\psi_{jl}(t)-\psi_{jl}(s)|$$
$$\le \frac{2^j}{(4\pi)^2}\frac{j^{2\alpha}}{\left(\ln(e^\alpha+\frac{1}{|t-s|})\right)^{2\alpha}}\left(\frac{2^{j\beta}}{|l|^\beta}\cdot c_2+\frac{4c_1}{|l|^\beta}\right)\left(\frac{2^{j\beta}}{|k|^\beta}\cdot c_2+\frac{4c_1}{|k|^\beta}\right)$$
$$\le \frac{2^{j(1+2\beta)}j^{2\alpha}}{\left(\ln(e^\alpha+\frac{1}{|t-s|})\right)^{2\alpha}}\frac{1}{|l|^\beta}\frac{1}{|k|^\beta}\cdot(c^\psi)^2, \tag{20}$$

де $c^\psi = \frac{(c_2+4c_1)}{(4\pi)}$.

Отже, у випадку $l\neq 0$, $k\neq 0$ маємо:

$$\sum_{|k|\le k_j,k\neq 0}\sum_{|l|\le k_j,l\neq 0}|E\eta_{jk}\eta_{jl}||\psi_{jk}(t)-\psi_{jk}(s)||\psi_{jl}(t)-\psi_{jl}(s)|$$
$$\le \sum_{|k|\le k_j,k\neq 0}\sum_{|l|\le k_j,l\neq 0}\frac{1}{2^{3j}}\frac{1}{|k||l|}\cdot A^\psi\frac{2^{(2\beta+1)j}}{|l|^\beta|k|^\beta}(c^\psi)^2\frac{j^{2\alpha}}{\left(\ln(e^\alpha+\frac{1}{|t-s|})\right)^{2\alpha}}$$
$$=\frac{j^{2\alpha}}{2^{(2-2\beta)j}}\frac{A^\psi(c^\psi)^2\hat{q}^2}{\left(\ln(e^\alpha+\frac{1}{|t-s|})\right)^{2\alpha}}, \tag{21}$$

де

$$\hat{q}^2=\sum_{|k|\le k_j,k\neq 0}\sum_{|l|\le k_j,l\neq 0}\frac{1}{|l||k|}\cdot\frac{1}{|l|^\beta|k|^\beta}\le\sum_{0<k\le k_j}\sum_{0<l\le k_j}\frac{2}{k^{1+\beta}}\cdot\frac{2}{l^{1+\beta}}<\infty.$$

Ряди збігаються при $\beta>0$.

В подібний спосіб можемо розглядати випадок $l\neq 0$, $k=0$, тоді

$$|E\eta_{j0}\eta_{jl}|=\frac{1}{2\pi}\left|\int_{\mathbb{R}}\widehat{R_2}(z,w)\frac{1}{2^{j/2}}\widehat{\psi}(\frac{w}{2^j})\cdot\frac{e^{-i\frac{l}{2^j}z}}{2^{j/2}}\widehat{\psi}(\frac{z}{2^j})\,dz\right|$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^2|l|}\left|\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{\partial\widehat{R}_2(z,w)}{\partial z}\widehat{\psi}(\frac{z}{2^j})+\frac{\widehat{R}_2(z,w)}{2^j}\widehat{\psi}'(\frac{z}{2^j})\right)e^{-i\frac{l}{2^j}z}\widehat{\psi}(\frac{w}{2^j})\,dzdw\right|$$
$$\le\frac{1}{2^{4j}}\cdot\frac{1}{|l|}\cdot A_1^\psi, \tag{22}$$

де

$$A_1^\psi=\frac{(c_{\psi''})^2}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\left(\left|\frac{\partial\widehat{R}_2(z,w)}{\partial z}\right||z|^2|w|^2+|\widehat{R_2}(z,w)||z||w|^2\right)dzdw<\infty.$$

Аналогічні дії проводимо у випадку $k\neq 0$, $l=0$, тоді

$$|E\eta_{jk}\eta_{j0}|\le\frac{A_1^\psi}{2^{4j}|k|}.$$

Зауважимо, що

$$|\psi_{j0}(t)-\psi_{j0}(s)|$$
$$=\frac{1}{(2\pi)}\frac{1}{2^{j/2}}\left|\int_{\mathbb{R}}(e^{itz}-e^{isz})\widehat{\psi}(\frac{z}{2^j})\,dz\right|=\frac{2^{j/2}}{(2\pi)}\left|\int_{\mathbb{R}}(e^{it2^ju}-e^{is2^ju})\widehat{\psi}(u)\,du\right|$$
$$\le\frac{2^{j/2}}{(2\pi)}\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{\ln(e^\alpha+\frac{2^j|u|}{2})}{\ln(e^\alpha+\frac{1}{|t-s|})}\right)^\alpha|\widehat{\psi}(u)|\,du$$

$$\leq \frac{2^{j/2}}{(2\pi)} \frac{j^\alpha}{\left(\ln(e^\alpha + \frac{1}{|t-s|})\right)^\alpha} \int_{\mathbb{R}} (\ln(2e^\alpha + |u|))^\alpha |\widehat{\psi}(u)| \, du = \frac{2^{j/2} j^\alpha \cdot c_1^\psi}{\left(\ln(e^\alpha + \frac{1}{|t-s|})\right)^\alpha},$$

де $c_1^\psi = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (\ln(2e^\alpha + |u|))^\alpha |\widehat{\psi}(u)| \, du < \infty$.

Тоді:

$$\sum_{|l| \leq k_j, l \neq 0} |E\eta_{j0}\eta_{jl}||\psi_{j0}(t) - \psi_{j0}(s)||\psi_{jl}(t) - \psi_{jl}(s)|$$

$$\leq \sum_{|l| \leq k_j, l \neq 0} \frac{1}{2^{4j}} \frac{1}{|l|} \cdot A_1^\psi \frac{2^{j(1/2+\beta)} j^\alpha}{\left(\ln(e^\alpha + \frac{1}{|t-s|})\right)^\alpha} \frac{1}{|l|^\beta} \cdot c^\psi \frac{2^{j/2} j^\alpha \cdot c_1^\psi}{\left(\ln(e^\alpha + \frac{1}{|t-s|})\right)^\alpha}$$

$$\leq \frac{j^{2\alpha}}{2^{(3-\beta)j}} \cdot \frac{A_1^\psi \cdot c^\psi \cdot c_1^\psi \cdot q}{\left(\ln(e^\alpha + \frac{1}{|t-s|})\right)^{2\alpha}}, \tag{23}$$

де

$$q = \sum_{|l| \leq k_j, l \neq 0} \frac{1}{|l|^{1+\beta}} < \infty$$

та

$$\sum_{|k| \leq k_j, k \neq 0} |E\eta_{j0}\eta_{jk}||\psi_{j0}(t) - \psi_{j0}(s)||\psi_{jk}(t) - \psi_{jk}(s)|$$

$$\leq \frac{j^{2\alpha}}{2^{(3-\beta)j}} \cdot \frac{A_1^\psi \cdot c^\psi \cdot c_1^\psi \cdot q}{\left(\ln(e^\alpha + \frac{1}{|t-s|})\right)^{2\alpha}}. \tag{24}$$

Використовуючи (21), (23), (24), отримаємо:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \left(E| \sum_{|k| \leq k_j} \eta_{jk}(\psi_{jk}(t) - \psi_{jk}(s))|^2 \right)^{1/2}$$

$$\leq \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{j^{2\alpha}}{2^{(2-2\beta)j}} \frac{A^\psi (c^\psi)^2 \hat{q}^2}{\left(\ln(e^\alpha + \frac{1}{|t-s|})\right)^{2\alpha}} + 2 \frac{j^{2\alpha}}{2^{(3-\beta)j}} \cdot \frac{A_1^\psi \cdot c^\psi \cdot c_1^\psi \cdot q}{\left(\ln(e^\alpha + \frac{1}{|t-s|})\right)^{2\alpha}} \right)^{1/2}$$

$$\leq q_1 \left[c^\psi \left(c^\psi A^\psi \hat{q}^2 + 2 c_1^\psi A_1^\psi q \right) \right]^{1/2} \frac{1}{\left(\ln(e^\alpha + \frac{1}{|t-s|})\right)^\alpha}, \tag{25}$$

де $q_1 = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{j^\alpha}{2^{(1-\beta)j}} < \infty, \ \ \beta < 1$.

Ідентичний аналіз проводимо для $S_1 = \left(E| \sum_{|k| \leq k_0} \xi_{0k}(\phi_{0k}(t) - \phi_{0k}(s))|^2 \right)^{1/2}$ спочатку оцінимо $|E\xi_{0k}\xi_{0l}|$ у випадку $k \neq 0$, $l \neq 0$:

$$|E\xi_{0k}\xi_{0l}| = \left| \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{R}_2(z, w) e^{-ikw} \widehat{\phi}(z) e^{-ilz} \widehat{\phi}(w) \, dz dw \right|$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{|k|} \left| \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial \widehat{R}_2(z, w)}{\partial w} \widehat{\phi}(w) + \widehat{R}_2(z, w) \widehat{\phi}'(w) \right) e^{-ikw} \, dw e^{-ilz} \widehat{\phi}(z) \, dz \right|$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{|k||l|} \left| \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial^2 \widehat{R}_2(z, w)}{\partial w \partial z} \widehat{\phi}(w) \widehat{\phi}(z) + \frac{\partial \widehat{R}_2(z, w)}{\partial z} \widehat{\phi}'(w) \widehat{\phi}(z) \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\partial \widehat{R}_2(z, w)}{\partial w} \widehat{\phi}(w) \widehat{\phi}'(z) + \widehat{R}_2(z, w) \widehat{\phi}'(w) \widehat{\phi}'(z) \right) e^{-ilz} \, dz e^{-ikw} \, dw \right| \leq \frac{1}{|k| \cdot |l|} \cdot A^\phi \ , \tag{26}$$

де

$$A^{\phi} = \frac{1}{(2\pi)^2} \times \left(c_{\phi}^2 \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial^2 \widehat{R}_2(z,w)}{\partial w \partial z} \right| dzdw \right.$$

$$\left. + 2c_{\phi}c'_{\phi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial \widehat{R}_2(z,w)}{\partial z} \right| dzdw + (c'_{\phi})^2 \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left| \widehat{R}_2(z,w) \right| dzdw \right) < \infty,$$

$$c_{\phi} = \sup_u |\widehat{\phi}(u)| < \infty, \ c'_{\phi} = \sup_u |\widehat{\phi}'(u)| < \infty.$$

Аналогічно (20) можемо вивести:

$$|\phi_{0k}(t) - \phi_{0k}(s)| \cdot |\phi_{0l}(t) - \phi_{0l}(s)| \leq \frac{(c^{\phi})^2}{\left(\ln(e^{\alpha} + \frac{1}{|t-s|})\right)^{2\alpha}} \frac{1}{|l|^{\beta}} \frac{1}{|k|^{\beta}}, \tag{27}$$

де

$$c^{\phi} = \frac{1}{(4\pi)} \left(4 \int_{\mathbb{R}} \left(2 \left(\pi \frac{T}{2} \right)^{\beta} (\ln(1+|u|))^{\alpha} + 2c_{\alpha} \right) \left| \widehat{\phi}(u) \right| du \right.$$

$$\left. + \int_{\mathbb{R}} (\ln(1+|u|))^{\alpha} \left| \widehat{\phi}(u) \right|^{1-\beta} du \right) < \infty.$$

Тому

$$\sum_{|k| \leq k_0, k \neq 0} \sum_{|l| \leq k_0, l \neq 0} |E\xi_{0k}\xi_{0l}| |\phi_{0k}(t) - \phi_{0k}(s)| |\phi_{0l}(t) - \phi_{0l}(s)|$$

$$\leq \sum_{|k| \leq k_0, k \neq 0} \sum_{|l| \leq k_0, l \neq 0} \frac{1}{|k||l|} \cdot A^{\phi} \frac{(c^{\phi})^2}{\left(\ln(e^{\alpha} + \frac{1}{|t-s|})\right)^{2\alpha}} \frac{1}{|l|^{\beta}} \frac{1}{|k|^{\beta}}$$

$$\leq \frac{A^{\phi} (c^{\phi})^2 \hat{q}^2}{\left(\ln(e^{\alpha} + \frac{1}{|t-s|})\right)^{2\alpha}}. \tag{28}$$

Розглянемо випадок $k = 0$, $l \neq 0$:

$$|E\xi_{00}\xi_{0l}| = \left| \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{R}_2(z,w) \widehat{\phi}(w) \cdot e^{-ilz} \widehat{\phi}(z) \, dzdw \right|$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{|l|} \left| \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial \widehat{R}_2(z,w)}{\partial z} \widehat{\phi}(z) + \widehat{R}_2(z,w) \widehat{\phi}'(z) \right) e^{-ilz} \, dz \widehat{\phi}(w) \, dw \right| \leq \frac{1}{|l|} \cdot A_1^{\phi},$$

де

$$A_1^{\phi} = \frac{c_{\phi}}{(2\pi)^2} \left(c_{\phi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial \widehat{R}_2(z,w)}{\partial z} \right| dzdw + c'_{\phi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left| \widehat{R}_2(z,w) \right| dzdw \right) < \infty.$$

У випадку $l = 0$, $k \neq 0$ маємо: $|E\xi_{00}\xi_{0k}| \leq \frac{1}{|k|} \cdot A_1^{\phi}$

Враховуючи (17), отримаємо

$$|\phi_{00}(t) - \phi_{00}(s)| = \frac{1}{(2\pi)} \left| \int_{\mathbb{R}} (e^{itz} - e^{isz}) \widehat{\phi}(z) \, dz \right|$$

$$\leq \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\ln(e^{\alpha} + \frac{|z|}{2})}{\ln(e^{\alpha} + \frac{1}{|t-s|})} \right)^{\alpha} |\widehat{\phi}(z)| \, dz \leq \frac{c_1^{\phi}}{\left(\ln(e^{\alpha} + \frac{1}{|t-s|})\right)^{\alpha}},$$

де $c_1^{\phi} = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} (\ln(2e^{\alpha} + |z|))^{\alpha} |\widehat{\phi}(z)| \, dz < \infty$, і тому,

$$\sum_{|l| \leq k_0, l \neq 0} |E\xi_{00}\xi_{0l}| \cdot |\phi_{00}(t) - \phi_{00}(s)| \cdot |\phi_{0l}(t) - \phi_{0l}(s)|$$

$$\leq \sum_{|l|\leq k_0, l\neq 0} \frac{1}{|l|}\cdot A_1^{\phi}\frac{c_1^{\phi}}{\left(\ln(e^{\alpha}+\frac{1}{|t-s|})\right)^{\alpha}}\frac{1}{|l|^{\beta}}\frac{c^{\phi}}{\left(\ln(e^{\alpha}+\frac{1}{|t-s|})\right)^{\alpha}}$$

$$= \frac{A_1^{\phi}\cdot c^{\phi}\cdot c_1^{\phi}\cdot q}{\left(\ln(e^{\alpha}+\frac{1}{|t-s|})\right)^{2\alpha}} \tag{29}$$

та

$$\sum_{|k|\leq k_0, k\neq 0} |E\xi_{00}\xi_{0l}|\cdot|\phi_{00}(t)-\phi_{00}(s)|\cdot|\phi_{0k}(t)-\phi_{0k}(s)| \leq \frac{A_1^{\phi}\cdot c^{\phi}\cdot c_1^{\phi}\cdot q}{\left(\ln(e^{\alpha}+\frac{1}{|t-s|})\right)^{2\alpha}} \tag{30}$$

Використовуючи (28), (29), (30), можемо отримати

$$\left(E|\sum_{|k|\leq k_0}\xi_{0k}(\phi_{0k}(t)-\phi_{0k}(s))|^2\right)^{1/2}$$

$$\leq \left(\frac{A^{\phi}(c^{\phi})^2\hat{q}^2}{\left(\ln(e^{\alpha}+\frac{1}{|t-s|})\right)^{2\alpha}} + 2\frac{A_1^{\phi}\cdot c^{\phi}\cdot c_1^{\phi}\cdot q}{\left(\ln(e^{\alpha}+\frac{1}{|t-s|})\right)^{2\alpha}}\right)^{1/2}$$

$$= \frac{\left[c^{\phi}\left(c^{\phi}A^{\phi}\hat{q}^2+2qc_1^{\phi}A_1^{\phi}\right)\right]^{1/2}}{\left(\ln(e^{\alpha}+\frac{1}{|t-s|})\right)^{\alpha}}, 0<\alpha\leq 1 \tag{31}$$

Нарешті, з (25) та (31) випливає

$$(E|X_{n,k_j}(t)-X_{n,k_j}(s)|^2)^{1/2} \leq \frac{q_1\left[c^{\psi}\left(\hat{q}^2A^{\psi}c^{\psi}+2qc_1^{\psi}A_1^{\psi}\right)\right]^{1/2}}{\left(\ln(e^{\alpha}+\frac{1}{|t-s|})\right)^{\alpha}}$$

$$+\frac{\left[c^{\phi}\left(c^{\phi}A^{\phi}\hat{q}^2+2qc_1^{\phi}A_1^{\phi}\right)\right]^{1/2}}{\left(\ln(e^{\alpha}+\frac{1}{|t-s|})\right)^{\alpha}} = \frac{B}{\left(\ln(e^{\alpha}+\frac{1}{|t-s|})\right)^{\alpha}}, 0<\alpha\leq 1, \tag{32}$$

де

$$B = q_1\left[c^{\psi}\left(\hat{q}^2A^{\psi}c^{\psi}+2qA_1^{\psi}c_1^{\psi}\right)\right]^{1/2} + \left[c^{\phi}\left(\hat{q}^2A^{\phi}c^{\phi}+2qc_1^{\phi}A_1^{\phi}\right)\right]^{1/2}.$$

Остаточно, застосовуємо Теорему 2.1, де $X_{n,k_j}(t)\to X(t)$ при $n\to\infty$, $k_j\to\infty$, $\forall j=0,1,\ldots$ в середньому квадратичному, тоді, враховуючи (32), Теорему 3.2 та Лему 3.1 $X_{n,k_j}(t)\to X(t)$ при $n\to\infty$, $k_j\to\infty$, $\forall j=0,1,\ldots$ рівномірно за ймовірністю на інтервалі $[0,T]$. □

5. Висновки

Отже, отримано умови за яких має місце рівномірна збіжність за ймовірністю на $[0,T]$ вейвлет зображень випадкових строго Орлічевих процесів експоненційного типу. Далі планується застосувати отримані результати для дослідження швидкості збіжності вейвлет зображень випадкових строго Орлічевих процесів.

Література

1. V. V. Buldygin and Yu. V. Kozachenko, *Metric Characterization of Random Variables and Random Processes*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.
2. В. В. Булдыгин, Ю. В. Козаченко, *О субгауссовских случайных величинах*, Укр. мат. журн. **32** (1980), № 6, 723–730.
3. C. K. Chui, *An Introduction to Wavelets*, Academic Press, New York, 1992.
4. I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1992.
5. P. Flandrin, *Time frequency/Time-scale Analysis*, Academic Press, New York, 1999.
6. W. Hardle, G. Kerkyacharian, D. Picard, and A. Tsybakov, *Wavelet. Approximation and Statistical Applications*, Springer, New York, 1998.
7. Yu. V. Kozachenko and O. V. Polosmak, *Uniform convergence in probability of wavelet expansions of random processes from $L_2(\Omega)$*, Random Operators and Stochastic Equations **16** (2008), № 4, 12–37.
8. Yu. V. Kozachenko, M. M. Perestyuk, and O. I. Vasylyk, *On uniform convergence of wavelet expansion of ϕ-sub-Gaussian random processes*, Random operators and Stochastic Equations **14** (2006), № 3, 209–233.
9. Ю. В. Козаченко, *Лекції з вейвлет аналізу*, "ТВіМС", Київ, 2004.
10. Yu. V. Kozachenko and G. I. Slivka, *Justification of the Fourier method for hyperbolic equations with random initial conditions*, Theory of Probability and Math. Statistics **69** (2004), 67–83.
11. Ю. В. Козаченко, М. М. Перестюк, *Про рівномірну збіжність вейвлет-розкладів випадкових процесів із просторів Орліча випадкових величин. I*, Укр. мат. журн. **12** (2007), № 59, 1647–1660.
12. Ю. В. Козаченко, М. М. Перестюк, *Про рівномірну збіжність вейвлет-розкладів випадкових процесів із просторів Орліча випадкових величин. II*, Укр. мат. журн. **6** (2008), № 60, 759–775.
13. Ю. В. Козаченко, Є. В. Турчин, *Умови рівномірної збіжності ϕ-субгауссових випадкових процесів по системам функцій, породженим вейвлетами*, Теорія ймовірн. і мат.статистика **78** (2008), 74–85.
14. E. Barrasa de le Krus and Yu. V. Kozachenko, *Boundary-value problems for equations of mathematical physics with stricly Orlicz random initial conditions*, Random Operators and Stochastic Equations **3** (1995), № 3, 201–220.

Кафедра теорії ймовірностей та математичної статистики, механіко-математичний факультет, Національний університет ім. Тараса Шевченка, проспект Глушкова, 6, Київ 03127, Україна

Адреса електронної пошти: yvk@univ.kiev.ua

Кафедра теорії ймовірностей та математичної статистики, механіко-математичний факультет, Національний університет ім. Тараса Шевченка, проспект Глушкова, 6, Київ 03127, Україна

Адреса електронної пошти: olgapolosmak@yandex.ru

Надійшла 11/03/2009