Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 81, 2009, стор. 88–101

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 81, 2009, pp. 88–101

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗПОДІЛУ МАКСИМУМУ ПОЛЯ ЧЕНЦОВА НА ЛАМАНИХ

УДК 519.21

Н. В. КРУГЛОВА

Анотація. Нехай $X(s,t)$ двопараметричне поле Ченцова. В статті знайдено асимптотичну поведінку "хвоста" розподілу максимуму поля $X(s,t)$ на ламаних з декількома точками злому.

Abstract. Let $X(s,t)$ a two parameter Chentsov random field. In this paper we obtained the asymptotic behavior of the probability distribution of the maximum of $X(s,t)$ on a class of polygonal lines with several points of break.

Аннотация. Пусть $X(s,t)$ двухпараметрическое поле Ченцова. В статье найдено асимптотическое поведение "хвоста" распределения максимума поля $X(s,t)$ на ломанных с несколькими точками излома.

1. Вступ

Ми розглядаємо двопараметричне поле Ченцова $X(s,t)$. Означення цього поля вперше дав Ченцов [1] в 1955 році в термінах щільності розподілу поля $X(s,t)$. Ми користуємося еквівалентним означенням Йеха [9]. Позначимо $D = [0,1] \times [0,1]$.

Означення 1.1. Дійсне сепарабельне гауссівське поле $\{X(s,t)\colon (s,t) \in D\}$ називається полем Ченцова, якщо воно задовольняє такі умови:

(1) $X(0,t) = X(s,0) = 0$ для всіх $s,t \in [0,1]$;
(2) $\mathsf{E}[X(s,t)] = 0$ для всіх $(s,t) \in D$;
(3) $\mathsf{E}[X(s,t)X(s_1,t_1)] = \min\{s,s_1\}\min\{t,t_1\}$ для всіх $(s,t) \in D$ і $(s_1,t_1) \in D$.

До цього часу невідомий явний вираз для розподілу функціоналів від поля Ченцова таких як $\max_{(s,t)\in D} X(s,t)$. Розподіл супремуму $X(s,t)$ на межі одиничного квадрата знайшли Параньяп і Парк [7]. Клесов в [4] розглянув ймовірність виду

$$P(L,g) = \mathsf{P}\left\{\sup_{(s,t)\in L} X(s,t) - g(s,t) < 0\right\}, \tag{1}$$

де X — поле Ченцова на D, L — ламана з однією точкою злому, g — лінійна функція.

В [5] і [6] було розглянуто ймовірність виду

$$P(L,\lambda) = \mathsf{P}\left\{\sup_{(s,t)\in L} X(s,t) > \lambda\right\}, \tag{2}$$

де L — ламана з кількома точками злому. Ймовірність (2) виражається в [5] і [6] складним чином через гауссівську стандартну функцію розподілу, тому інтерес представляють також і оцінки для (2).

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60G15, 60G60.

Ключові слова і фрази. Поле Ченцова, розподіл максимуму, гауссівський процес.

В [3] було отримано хороші нижні оцінки розподілу максимуму поля Ченцова на квадраті. В [2] розглядалися оцінки розподілу максимуму поля Ченцова на одиничному квадраті в околі нуля. Доведено, що не виконується двопараметричний принцип відображення для поля Ченцова.

Основна мета даної роботи — знайти асимптотичну поведінку ймовірностей (2) при $\lambda \to \infty$.

2. Допоміжні результати

2.1. Ймовірність досягнення рівня полем Ченцова. Нехай L — ламана, зображена на рис. 1, має одну точку злому з координатами (x_1, y_1), $0 < x_1 < 1$, $0 < y_1 < 1$. Ламану L зручно задавати як множину точок у D, а саме:

$$L = \left\{(s,t) \colon sa^{-1} + t = 1, s \le k; s + tb^{-1} = 1, s > k, (s,t) \in D\right\}, \tag{3}$$

де $a = x_1/(1-y_1)$, $b = y_1/(1-x_1)$, $k = a(b-1)/(ab-1)$, $a, b > 1$.

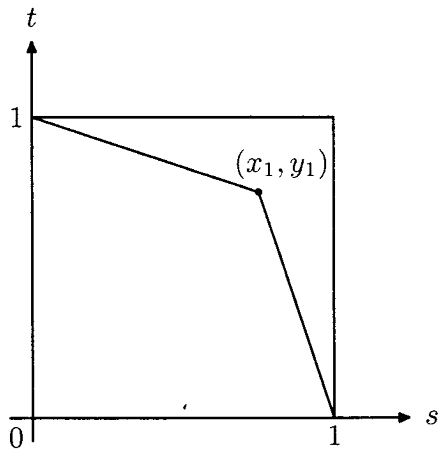

Рис. 1. Ламана з однією точкою злому

В даній статті ми використовуємо наступні позначення:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt, \qquad \Psi(x) = 1 - \Phi(x).$$

Нехай $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt$, $\operatorname{Re} z > 0$, — гамма-функція.

Теорема 2.1 (Параньяп, Парк [7]). *Нехай ламана L задається* (3). *Нехай $X(s,t)$, $(s,t) \in D$, — поле Ченцова. Тоді*

$$\begin{aligned} \mathsf{P}\left\{\sup_{(s,t)\in L} X(s,t) \le \lambda\right\} = \Phi\left(\frac{\lambda(a+c)}{a\sqrt{c}}\right) - \exp\left\{\frac{-2\lambda^2}{a}\right\}\Phi\left(\frac{\lambda(c-a)}{a\sqrt{c}}\right) \\ - \exp\left\{\frac{-2\lambda^2}{b}\right\}\Phi\left(\frac{\lambda(1-bc)}{b\sqrt{c}}\right) \\ + \exp\left\{-2\lambda^2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-2\right)\right\}\Phi\left(\frac{\lambda(1-bc-2b)}{b\sqrt{c}}\right), \end{aligned} \tag{4}$$

де $c = a(b-1)/(b(a-1))$.

2.2. Розподіл максимуму поля Ченцова на ламаних з кількома точками зламу. Нам необхідні деякі результати, отримані в [6]. Зафіксуємо $n \geq 1$. Позначимо

$$x_0 = 0, \qquad x_{n+1} = 1, \qquad y_0 = 1, \qquad y_{n+1} = 0.$$

Нехай ламана L має n точок зламу $Q_1, \dots, Q_n$ з координатами $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ відповідно. Ламану L можна задавати як множину точок у D, а саме:

$$L = \left\{ (s,t)\colon t = I_{\{0\}}(s) + \sum_{i=1}^{n+1} (-sk_i + b_i)\, I_{(x_{i-1};x_i]}(s),\, s \in [0,1] \right\}, \tag{5}$$

$$k_i = \frac{(y_{i-1} - y_i)}{x_i - x_{i-1}}, \qquad b_i = \frac{x_i y_{i-1} - x_{i-1} y_i}{x_i - x_{i-1}},$$

де I_A — це індикатор множини A.

Позначимо $\Delta_0 = 0$, $\Delta_i = x_i / y_i$, $i = 1, \dots, n$.

Теорема 2.2 (Круглова [6]). *Нехай $\{X(s,t)\colon (s,t) \in D\}$ — це поле Ченцова на одиничному квадраті. Нехай ламана L має n точок зламу $Q_1, \dots, Q_n$ з координатами $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ відповідно та задається рівнянням* (5). *Нехай координати цих точок задовольняють умови:*

$$0 < x_1 < \dots < x_n < 1, \qquad 1 > y_1 > \dots > y_n > 0.$$

Тоді для $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} P_n(\lambda) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{P}\left\{ \sup_{(s;t)\in L} X(s;t) < \lambda \right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\frac{\lambda}{y_1}} \dots \int_{-\infty}^{\frac{\lambda}{y_n}} \left(1 - \exp\left\{ -2\lambda \left(\frac{\lambda}{y_n} - u_n \right) \right\} \right) \\ &\qquad \times \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \exp\left\{ -\frac{2\lambda_{i-1}\lambda_i}{(\Delta_i - \Delta_{i-1})} \right\} \right) \varphi_{0,\Delta_i - \Delta_{i-1}} (u_i - u_{i-1})\, du_1 \dots du_n, \end{aligned}$$

де $\lambda_i = \lambda / y_i - u_i$, $0 \leq i \leq n$; $u_0 = 0$, $\varphi_{0,\Delta}(u) = \exp\{-u^2/(2\Delta)\}/\sqrt{2\pi\Delta}$ — щільність гауссівського розподілу з параметрами 0 та Δ.

Зауваження 2.1. Якщо $n = 1$, то з теореми **2.2** отримаємо:

$$P_1(\lambda) = I_1(\lambda) - I_2(\lambda) - I_3(\lambda) + I_4(\lambda), \tag{6}$$

де

$$I_1(\lambda) = \int_{-\infty}^{\frac{\lambda}{y_1}} \varphi_{0,\Delta_1}(u_1)\, du_1 = \Phi\left(\frac{\lambda}{\sqrt{x_1 y_1}} \right),$$

$$\begin{aligned} I_2(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\frac{\lambda}{y_1}} \exp\left\{ -\frac{2\lambda\left(\frac{\lambda}{y_1} - u_1\right)}{\Delta_1} \right\} \varphi_{0,\Delta_1}(u_1)\, du_1 \\ &= \exp\left\{ -\frac{2\lambda^2}{x_1}(1 - y_1) \right\} \Phi\left(\frac{\lambda(1 - 2y_1)}{\sqrt{x_1 y_1}} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\frac{\lambda}{y_1}} \exp\left\{ -2\lambda \left(\frac{\lambda}{y_1} - u_1 \right) \right\} \varphi_{0,\Delta_1}(u_1)\, du_1 \\ &= \exp\left\{ -\frac{2\lambda^2}{y_1}(1 - x_1) \right\} \Phi\left(\frac{\lambda(1 - 2x_1)}{\sqrt{x_1 y_1}} \right), \end{aligned}$$

$$I_4(\lambda) = \int_{-\infty}^{\frac{\lambda}{y_1}} \exp\left\{-2\lambda\left(\frac{\lambda}{y_1} - u_1\right)\right\} \exp\left\{-\frac{2\lambda\left(\frac{\lambda}{y_1} - u_1\right)}{\Delta_1}\right\} \varphi_{0,\Delta_1}(u_1)\, du_1$$
$$= \exp\left\{\frac{2\lambda^2}{x_1 y_1}(x_1 + y_1)(x_1 + y_1 - 1)\right\} \Phi\left(\frac{\lambda(1 - 2x_1 - 2y_1)}{\sqrt{x_1 y_1}}\right).$$

Праві частини (4) та (6) співпадають, оскільки в правій частині (4)

$$a = \frac{x_1}{1 - y_1}, \qquad b = \frac{y_1}{1 - x_1}, \qquad c = \frac{x_1}{y_1}.$$

Тобто, теорема 2.1 є частковим випадком теореми 2.2 при $n = 1$.

2.3. **Асимптотика розподілів гауссівських процесів.** Нехай $Y(t)$, $t \in [0,1]$, — гауссівський процес з нульовим математичним сподіванням і неперервними траєкторіями. Нехай дисперсія $\sigma^2(t) = \mathsf{E}[Y^2(t)]$ досягає свого максимуму в єдиній точці t_0 інтервалу $[0,1]$. Позначимо через $\rho(s,t)$ корреляційну функцію процесу $Y(t)$. Розглянемо наступні умови, представлені в [8].

- E1: Існують константи $\beta > 0$ і $A \geq 0$ такі, що
$$\sigma(t) = \sigma(t_0) - A|t - t_0|^{\beta}(1 + o(1)), \qquad t \to t_0.$$
- E2: Існують константи $\alpha > 0$ і $C > 0$ такі, що
$$\rho(t,s) = 1 - C|t - s|^{\alpha}(1 + o(1)), \qquad t \to t_0, \quad s \to t_0.$$
- E3: Для деяких $\gamma > 0$, G і довільних t, s:
$$\mathsf{E}\left[(Y(t) - Y(s))^2\right] \leq G|t - s|^{\gamma}.$$

Для $0 < \alpha \leq 2$ позначимо через $\chi(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$, гауссівський процес з наступними властивостями:

(1) $\mathsf{E}[\chi(t)] = -|t|^{\alpha}$ для всіх $t \in (-\infty, \infty)$;
(2) $\operatorname{cov}[\chi(s), \chi(t)] = |t|^{\alpha} + |s|^{\alpha} - |t - s|^{\alpha}$ для всіх $s, t \in (-\infty, \infty)$.

Для $b > 0$, $M < B$, $0 < \alpha < 2$ позначимо:

$$H_{\alpha}^{b}(M, B) = \mathsf{E}\left[\exp\left\{\frac{1}{1+b} \max_{[(1+b)^{2/\alpha}M, (1+b)^{2/\alpha}B]} \chi(t)\right\}\right],$$
$$H_{\alpha} = \lim_{B\to\infty} \frac{H_{\alpha}^{0}(0, B)}{B} < \infty,$$
$$0 < H_{\alpha}^{K,1} = \lim_{B\to\infty} H_{\alpha}^{K}(-B, B) < \infty, \qquad K > 0,$$
$$0 < H_{\alpha}^{K,2} = \lim_{B\to\infty} H_{\alpha}^{K}(0, B) < \infty.$$

Скінченність цих границь було доведено Пітербаргом.

Наступний результат було отримано в [8].

Теорема 2.3 (Пітербарг [8]). *Нехай $Y(t)$, $t \in [0,1]$, — гауссівський процес з нульовим математичним сподіванням і неперервними траєкторіями. Нехай його дисперсія $\sigma^2(t) = \mathsf{E}[Y(t)^2]$ досягає свого максимуму $\max_{t\in T} \sigma^2(t) = \sigma_M^2$ в єдиній точці $t_0 \in [0,1]$. Припустимо, що виконуються умови E1–E3 для $\alpha > 0$.*

(1) *якщо $\alpha < \beta$, то*

$$\mathsf{P}\left\{\max_{t\in[0,1]} Y(t) > u\right\} = \begin{cases} 2N\left(\frac{u}{\sigma_M}\right)^{\frac{2}{\alpha}-\frac{2}{\beta}} \Psi\left(\frac{u}{\sigma_M}\right)(1 + o(1)), & t_0 \in (0,1), \\ N\left(\frac{u}{\sigma_M}\right)^{\frac{2}{\alpha}-\frac{2}{\beta}} \Psi\left(\frac{u}{\sigma_M}\right)(1 + o(1)), & t_0 = 0 \text{ або } t_0 = 1 \end{cases}$$

при $u \to \infty$, *де*

$$N = \frac{H_\alpha \Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right) C^{\frac{1}{\alpha}} \sigma_M^{\frac{1}{\beta}}}{\beta A^{\frac{1}{\beta}}}$$

і константи β, A *визначаються з умови E1, а константи* α, C — *з умови E2;*

(2) *якщо* $\alpha = \beta$, *то*

$$\mathsf{P}\left\{\max_{t\in[0,1]} Y(t) > u\right\} = \begin{cases} H_\alpha^{K,1}\Psi\left(\frac{u}{\sigma_M}\right)(1+o(1)), & t_0 \in (0,1), \\ H_\alpha^{K,2}\Psi\left(\frac{u}{\sigma_M}\right)(1+o(1)), & t_0 = 1 \text{ або } t_0 = 0 \end{cases}$$

при $u \to \infty$, *де* $K = A/(C\sigma_M)$;

(3) *якщо* $\alpha > \beta$, *то*

$$\mathsf{P}\left\{\max_{t\in[0,1]} X(t) > u\right\} = \Psi\left(\frac{u}{\sigma_M}\right)(1+o(1))$$

при $u \to \infty$.

3. Основний результат

Розглянемо звуження поля Ченцова на ламану з однією точкою злому. Нехай (x_1, y_1) — координати точки злому ламаної. Покладемо

$$P_1(\lambda) = \mathsf{P}\left\{\sup_{(s,t)\in L} X(s,t) < \lambda\right\},$$

де L — ламана з однією точкою злому, зображена на рис. 1, $\lambda > 0$ – деяка константа.

В наступній теоремі ми отримуємо оцінки розподілу максимуму поля Ченцова на ламаній з однією точкою злому. Зауважимо, що отримані оцінки залежать від положення точки злому.

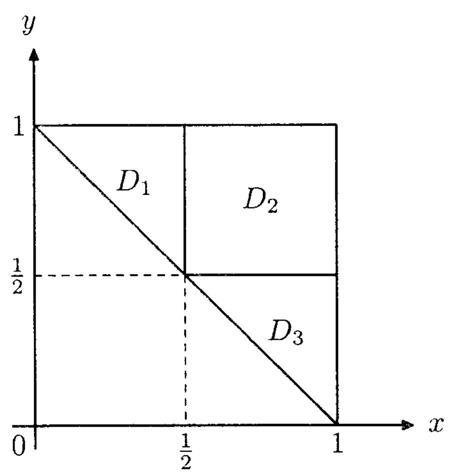

Рис. 2. Області розміщення точки злому

Теорема 3.1. *Нехай* $X(s,t)$ — *це поле Ченцова на одиничному квадраті. Нехай ламана* L, *зображена на рис. 1, має одну точку злому* Q *с координатами* (x_1, y_1).

Нехай

$$D_1 = \{(x,y)|0 \le x \le 1/2, 1/2 < y \le 1, x+y > 1\},$$
$$D_2 = \{(x,y)|1/2 < x \le 1, 1/2 < y \le 1\},$$
$$D_3 = \{(x,y)|0 \le y \le 1/2, 1/2 < x \le 1, x+y > 1\},$$
$$D_4 = \{(x,y)|0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, x+y = 1\},$$

області, зображені на рис. 2.

(1) *Якщо* $Q \in D_1$, *то*

$$e^{-c_1\lambda^2} + e^{-c_2\lambda^2}\left(\frac{B_1}{\lambda} + \frac{B_2}{\lambda^3}\right) < 1 - P_1(\lambda) < e^{-c_1\lambda^2} + e^{-c_2\lambda^2}\left(\frac{B_1}{\lambda} + \frac{B_3}{\lambda^3}\right),$$

де $c_1 = (2(1-x_1))/y_1$; $c_2 = 1/(2x_1y_1)$;

$$B_1 = \begin{cases} \frac{\sqrt{x_1y_1}}{\sqrt{2\pi}}\left(1 + \frac{1}{2x_1-1} + \frac{1}{2y_1-1} - \frac{1}{2y_1+2x_1-1}\right), & y_1 \ne 1/2,\ x_1 \ne 1/2, \\ \frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{4\pi}}\left(1 + \frac{1}{2x_1-1} - \frac{1}{2x_1}\right), & y_1 = 1/2,\ x_1 \ne 1/2, \\ \frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{4\pi}}\left(1 + \frac{1}{2y_1-1} - \frac{1}{2y_1}\right), & x_1 = 1/2,\ y_1 \ne 1/2; \end{cases}$$

$$B_2 = -\frac{(x_1y_1)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\left(1 + \frac{1}{(2y_1-1)^3}\right);$$

$$B_3 = \begin{cases} \frac{(x_1y_1)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{(1-2x_1)^3} + \frac{1}{(2x_1+2y_1-1)^3}\right), & x_1 \ne 1/2, \\ \frac{1}{32y_1^{\frac{3}{2}}\sqrt{\pi}}, & x_1 = 1/2. \end{cases}$$

(2) *Якщо* $Q \in D_2$, *то*

$$e^{-c_2\lambda^2}\left(\frac{B_1}{\lambda} + \frac{B_4}{\lambda^3}\right) < 1 - P_1(\lambda) < e^{-c_2\lambda^2}\left(\frac{B_1}{\lambda} + \frac{B_5}{\lambda^3}\right),$$

де

$$B_4 = -\frac{(x_1y_1)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\left(1 + \frac{1}{(2y_1-1)^3} + \frac{1}{(2x_1-1)^3}\right);$$

$$B_5 = -\frac{(x_1y_1)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{(2x_1+2y_1-1)^3}.$$

(3) *Якщо* $Q \in D_3$, *то*

$$e^{-c_3\lambda^2} + e^{-c_2\lambda^2}\left(\frac{B_1}{\lambda} + \frac{B_6}{\lambda^3}\right) < 1 - P_1(\lambda) < e^{-c_3\lambda^2} + e^{-c_2\lambda^2}\left(\frac{B_1}{\lambda} + \frac{B_7}{\lambda^3}\right),$$

де

$$B_6 = -\frac{(x_1y_1)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\left(1 + \frac{1}{(2x_1-1)^3}\right);$$

$$B_7 = \begin{cases} \frac{(x_1y_1)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{(2y_1-1)^3} + \frac{1}{(2x_1+2y_1-1)^3}\right), & y_1 \ne 1/2, \\ \frac{1}{32\sqrt{\pi}x_1^{\frac{3}{2}}}, & y_1 = 1/2; \end{cases}$$

$c_3 = 2(1-y_1)/x_1$.

(4) *Якщо* $Q \in D_4$, *то*

$$1 - P_1(\lambda) = e^{-2\lambda^2}.$$

Зауваження 3.1. Всі коефіцієнти c_1, c_2, c_3 та $B_1, \dots, B_7$ залежать від координат точки Q.

Доведення. Спершу окремо розглянемо випадок $Q \in D_4$. Підставивши $x_1 = 1 - y_1$ в (6), отримаємо:

$$\begin{aligned}P_1(\lambda) &= \Phi\left(\frac{\lambda}{\sqrt{(1-y_1)y_1}}\right) - e^{-2\lambda^2}\Phi\left(\frac{\lambda(1-2y_1)}{\sqrt{(1-y_1)y_1}}\right)\\ &\quad - e^{-2\lambda^2}\Phi\left(\frac{\lambda(2y_1-1)}{\sqrt{(1-y_1)y_1}}\right) + \Phi\left(-\frac{\lambda}{\sqrt{(1-y_1)y_1}}\right)\\ &= 1 - e^{-2\lambda^2}.\end{aligned}$$

При доведенні інших випадків будемо користуватися нерівностями:

$$\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) < 1 - \Phi(x) < \frac{e^{-x^2/2}}{x\sqrt{2\pi}}, \qquad x > 0. \tag{7}$$

Оскільки $1 - \Phi(x) = \Phi(-x)$, $x > 0$, то аналогічна нерівність виконується і для $\Phi(-x)$, $x > 0$. Для першого доданка в (6) маємо:

$$\frac{\exp\{-\lambda^2/(2x_1y_1)\}\sqrt{x_1y_1}}{\lambda\sqrt{2\pi}}\left(1 - \frac{x_1y_1}{\lambda^2}\right) < 1 - I_1(\lambda) < \frac{\exp\{-\lambda^2/(2x_1y_1)\}\sqrt{x_1y_1}}{\lambda\sqrt{2\pi}}.$$

Подамо $I_2(\lambda)$ у такій формі:

$$I_2(\lambda) = \exp\left\{-\frac{2\lambda^2}{x_1}(1-y_1)\right\} - \exp\left\{-\frac{2\lambda^2}{x_1}(1-y_1)\right\}\left(1 - \Phi\left(\frac{\lambda(1-2y_1)}{\sqrt{x_1y_1}}\right)\right).$$

Тоді у випадку $y_1 < 1/2$ маємо

$$I_2(\lambda) > \exp\left\{-\frac{2\lambda^2}{x_1}(1-y_1)\right\} - \frac{\exp\{-\lambda^2/(2x_1y_1)\}\sqrt{x_1y_1}}{\lambda\sqrt{2\pi}(1-2y_1)},$$

$$I_2(\lambda) < \exp\left\{-\frac{2\lambda^2}{x_1}(1-y_1)\right\} - \frac{\exp\{-\lambda^2/(2x_1y_1)\}\sqrt{x_1y_1}}{\lambda\sqrt{2\pi}(1-2y_1)}\left(1 - \frac{x_1y_1}{(1-2y_1)^2\lambda^2}\right),$$

у випадку $y_1 > 1/2$ —

$$\frac{\exp\{-\lambda^2/(2x_1y_1)\}\sqrt{x_1y_1}}{\lambda\sqrt{2\pi}(2y_1-1)}\left(1 - \frac{x_1y_1}{(2y_1-1)^2\lambda^2}\right) < I_2(\lambda) < \frac{\exp\{-\lambda^2/(2x_1y_1)\}\sqrt{x_1y_1}}{\lambda\sqrt{2\pi}(2y_1-1)},$$

а при $y_1 = 1/2$ —

$$I_2(\lambda) = \frac{1}{2}e^{-\lambda^2/x_1}.$$

Зведемо $I_3(\lambda)$ до такого вигляду:

$$I_3(\lambda) = \exp\left\{-\frac{2\lambda^2}{y_1}(1-x_1)\right\} - \exp\left\{-\frac{2\lambda^2}{y_1}(1-x_1)\right\}\left(1 - \Phi\left(\frac{\lambda(1-2x_1)}{\sqrt{x_1y_1}}\right)\right).$$

У випадку $x_1 < 1/2$ маємо

$$I_3(\lambda) > \exp\left\{-\frac{2\lambda^2}{y_1}(1-x_1)\right\} - \frac{\exp\{-\lambda^2/(2x_1y_1)\}\sqrt{x_1y_1}}{\lambda\sqrt{2\pi}(1-2x_1)},$$

$$I_3(\lambda) < \exp\left\{-\frac{2\lambda^2}{y_1}(1-x_1)\right\} - \frac{\exp\{-\lambda^2/(2x_1y_1)\}\sqrt{x_1y_1}}{\lambda\sqrt{2\pi}(1-2x_1)}\left(1 - \frac{x_1y_1}{(1-2x_1)^2\lambda^2}\right),$$

у випадку $x_1 > 1/2$ —

$$\frac{\exp\{-\lambda^2/(2x_1y_1)\}\sqrt{x_1y_1}}{\lambda\sqrt{2\pi}(2x_1-1)}\left(1 - \frac{x_1y_1}{(2x_1-1)^2\lambda^2}\right) < I_3(\lambda) < \frac{\exp\{-\lambda^2/(2x_1y_1)\}\sqrt{x_1y_1}}{\lambda\sqrt{2\pi}(2x_1-1)},$$

а при $x_1 = 1/2$ —

$$I_3(\lambda) = \frac{1}{2}e^{-\lambda^2/y_1}.$$

Нарешті,

$$\frac{\exp\{-\lambda^2/(2x_1y_1)\}\sqrt{x_1y_1}}{\lambda\sqrt{2\pi}(2x_1+2y_1-1)}\left(1-\frac{x_1y_1}{(2x_1+2y_1-1)^2\lambda^2}\right) < I_4(\lambda) < \frac{\exp\{-\lambda^2/(2x_1y_1)\}\sqrt{x_1y_1}}{\lambda\sqrt{2\pi}(2x_1+2y_1-1)}.$$

Підсумувавши отримані нерівності та використавши (6), доведемо теорему. □

Наступний наслідок показує залежність асимптотичної поведінки розподілу максимуму поля Ченцова на ламаній з однією точкою злому від положення цієї точки.

Наслідок 3.1. (1) *Якщо $Q \in D_1$, то*

$$1-P_1(\lambda) = e^{-c_1\lambda^2} + \frac{B_1 e^{-c_2\lambda^2}}{\lambda} + o\left(\frac{e^{-c_2\lambda^2}}{\lambda}\right) \quad \textit{при } \lambda\to\infty. \tag{8}$$

(2) *Якщо $Q \in D_2$, то*

$$1-P_1(\lambda) = \frac{B_1 e^{-c_2\lambda^2}}{\lambda} + o\left(\frac{e^{-c_2\lambda^2}}{\lambda}\right) \quad \textit{при } \lambda\to\infty.$$

(3) *Якщо $Q \in D_3$, то*

$$1-P_1(\lambda) = e^{-c_3\lambda^2} + \frac{B_1 e^{-c_2\lambda^2}}{\lambda} + o\left(\frac{e^{-c_2\lambda^2}}{\lambda}\right) \quad \textit{при } \lambda\to\infty, \tag{9}$$

(4) *Якщо $Q \in D_4$, то*

$$1-P_1(\lambda) = e^{-2\lambda^2},$$

де константи B_1, c_1, c_2, c_3 визначені у теоремі 3.1.

Зауваження 3.2. Для того, щоб виділити головний член в асимптотичній формулі, визначимо співвідношення між коефіцієнтами в оцінках хвоста розподілу максимуму поля Ченцова на ламану.

(1) якщо $Q \in D_1$, то $c_1 \le c_2$, причому $c_1 = c_2$ тільки у випадку $x_1 = \frac{1}{2}$;
(2) якщо $Q \in D_3$, то $c_3 \le c_2$, причому $c_3 = c_2$ тільки у випадку $y_1 = \frac{1}{2}$.

Тому головний член асимптотики в (8) та (9) визначається першим доданком.

Наслідок 3.2. (1) *Нехай $Q \in D_1$. Якщо $x_1 \ne \frac{1}{2}$, то*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda e^{c_2\lambda^2}\left(1-P_1(\lambda)-e^{-c_1\lambda^2}\right) = B_1;$$

якщо ж $x_1 = \frac{1}{2}$, то

$$\lim_{\lambda\to\infty} e^{c_2\lambda^2}(1-P_1(\lambda)) = \frac{1}{2}.$$

(2) *Нехай $Q \in D_2$. Тоді*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda e^{c_2\lambda^2}(1-P_1(\lambda)) = B_1.$$

(3) *Нехай $Q \in D_3$. Якщо $y_1 \ne \frac{1}{2}$, то*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda e^{c_2\lambda^2}\left(1-P_1(\lambda)-e^{-c_3\lambda^2}\right) = B_1;$$

якщо ж $y_1 = \frac{1}{2}$, то

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda e^{c_2\lambda^2}(1-P_1(\lambda)) = \frac{1}{2}.$$

Зауваження 3.3. Для того, щоб дослідити "максимальну" та "мінімальну" асимптотики, ми спочатку означимо ці поняття.

Нехай D — множина параметрів, $f_Q(\cdot)$ — сім'я функцій, $Q \in D$, а $g(\cdot)$ — фіксована функція. Будемо писати

$$\max_{Q\in D} f_Q(\lambda) = g(\lambda),$$

якщо для всіх $Q \in D$ або $f_Q(\lambda) = g(\lambda)$, або $\lim_{\lambda\to\infty} f_Q(\lambda)/g(\lambda) = 0$.

Аналогічно ми пишемо

$$\min_{Q\in D} f_Q(\lambda) = g(\lambda),$$

якщо для всіх $Q \in D$ або $f_Q(\lambda) = g(\lambda)$, або $\lim_{\lambda\to\infty} g(\lambda)/f_Q(\lambda) = 0$.

Визначимо як міняються порядки асимптотики в різних областях.

- В D_1: $\min_{D_1}(1 - P_1(\lambda)) = e^{-2\lambda^2}$; $\max_{D_1}(1 - P_1(\lambda)) = e^{-\lambda^2}$.
- В D_3: $\min_{D_3}(1 - P_1(\lambda)) = e^{-2\lambda^2}$; $\max_{D_3}(1 - P_1(\lambda)) = e^{-\lambda^2}$.
- В D_2: $\min_{D_2}(1 - P_1(\lambda)) = e^{-2\lambda^2}$; $\max_{D_2}(1 - P_1(\lambda)) = \frac{2^{\frac{5}{2}}}{3\sqrt{\pi}} e^{-\lambda^2/2}/\lambda$.

Максимальною асимптотикою для всього квадрата D є:

$$\max_D(1 - P_1(\lambda)) = \frac{2^{\frac{5}{2}}}{3\sqrt{\pi}} e^{-\lambda^2/2}/\lambda.$$

Цей результат можна використати для нижньої оцінки "хвоста" розподілу максимуму поля Ченцова на квадраті.

$$\mathsf{P}\left\{\max_{(s,t)\in D} X(s,t) > \lambda\right\} > \frac{2^{\frac{5}{2}}}{3\sqrt{\pi}} e^{-\lambda^2/2}/\lambda.$$

Наступна теорема є узагальненням теореми 3.1.

Теорема 3.2. *Нехай $X(s,t)$ — це поле Ченцова на одиничному квадраті. Нехай ламана L має n точок злому $Q_1, \dots, Q_n$ с координатами $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ відповідно. Нехай координати точок злому задовольняють умови теореми 2.2. Введемо позначення $x_i = a_i x_1$, $y_i = b_i y_1$, $i = 2, \dots, n$. Позначимо області в R^{2n}*

$$D_1 = \Bigg\{y_1 > 1/2, a_i b_i < 1, \frac{a_i b_{i-1} - a_{i-1} b_i}{2(b_{i-1} - b_i)} > a_i$$
$$\text{або } a_{i-1} > \frac{a_i b_{i-1} - a_{i-1} b_i}{2(b_{i-1} - b_i)}, \quad a_i x_1 + b_i y_1 \geq 1, i = 2, \dots, n, a_n x_1 \geqslant 1/2\Bigg\},$$

$$D_j = \Bigg\{y_1 > 1/2, a_j b_j > 1, a_i b_i < 1, \frac{a_i b_{i-1} - a_{i-1} b_i}{2(b_{i-1} - b_i)} > a_i$$
$$\text{або } a_{i-1} > \frac{a_i b_{i-1} - a_{i-1} b_i}{2(b_{i-1} - b_i)}, a_i x_1 + b_i y_1 \geq 1, i = 2, \dots, n, i \neq j, a_n x_1 \geqslant 1/2\Bigg\},$$
$$j = 2, \dots, n,$$

$$D_{n+j} = \Bigg\{y_1 > 1/2, a_{j-1} < \frac{a_j b_{j-1} - a_{j-1} b_j}{2(b_{j-1} - b_j)} < a_j, j \neq i, \frac{a_i b_{i-1} - a_{i-1} b_i}{2(b_{i-1} - b_i)} > a_i$$
$$\text{або } a_{i-1} > \frac{a_i b_{i-1} - a_{i-1} b_i}{2(b_{i-1} - b_i)}, a_i x_1 + b_i y_1 \geq 1, i = 2, \dots, n, a_n x_1 \geqslant 1/2\Bigg\},$$

$$D_{n+1} = \Bigg\{y_1 \leqslant 1/2, a_i b_i < 1, \frac{a_i b_{i-1} - a_{i-1} b_i}{2(b_{i-1} - b_i)} > a_i$$
$$\text{або } a_{i-1} > \frac{a_i b_{i-1} - a_{i-1} b_i}{2(b_{i-1} - b_i)}, a_i x_1 + b_i y_1 \geq 1, i = 2, \dots, n, a_n x_1 \geqslant 1/2\Bigg\}$$

$$D_{2n+1} = \{a_n x_1 < 1/2, a_i x_1 + b_i y_1 \geq 1, i = 2, \dots, n\}.$$

Нехай

$$K_1 = 2y_1 - 1, \qquad K_j = \frac{2\,(x_{j-1}y_j + x_j y_{j-1} - 2x_j y_j)}{(x_j y_{j-1} - x_{j-1} y_j)}, \qquad j = 2, \ldots, n.$$

Для скорочення позначимо $(\vec{x}, \vec{y}) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$. *Тоді*

$$1 - P_n(\lambda) = \begin{cases} H_1^{K_j,1}\Psi\left(\frac{\lambda}{\sqrt{x_j y_j}}\right)(1 + o(1)), & (\vec{x}, \vec{y}) \in D_j,\ j = 1, \ldots, n, \\ \exp\left\{-\frac{2(1-y_1)\lambda^2}{x_1}\right\}(1 + o(1)), & (\vec{x}, \vec{y}) \in D_{n+1}, \\ \exp\left\{-\frac{2(b_{j-1}-b_j)(a_j-a_{j-1})\lambda^2}{(a_j b_{j-1} - a_{j-1} b_j)^2 x_1 y_1}\right\}(1 + o(1)), & (\vec{x}, \vec{y}) \in D_{j+n},\ j = 2, \ldots, n, \\ \exp\left\{-\frac{2(1-x_n)\lambda^2}{y_n}\right\}(1 + o(1)), & (\vec{x}, \vec{y}) \in D_{2n+1} \end{cases}$$

при $\lambda \to \infty$.

Доведення. Нехай ламана L задається (5). Коваріаційна функція звуження поля Ченцова на дану ламану дорівнює:

$$r(s,t) = s\left(\sum_{i=2}^{n}\left(-\frac{(y_{i-1} - y_i)t}{x_i - x_{i-1}} + \frac{x_i y_{i-1} - x_{i-1} y_i}{x_i - x_{i-1}}\right) I_{(x_{i-1}, x_i]}(t) + \left(-\frac{(1 - y_1)t}{x_1} + 1\right) I_{[0,x_1]}(t) + \left(-\frac{y_n t}{1 - x_n} + \frac{y_n}{1 - x_n}\right) I_{(x_n,1]}(t)\right),$$
$$s \leqslant t.$$

Звідси знаходимо дисперсію σ^2 цього процесу:

$$\begin{aligned} g(t) &= \sigma^2(t) \\ &= t\left(\sum_{i=2}^{n}\left(-\frac{(y_{i-1} - y_i)t}{x_i - x_{i-1}} + \frac{x_i y_{i-1} - x_{i-1} y_i}{x_i - x_{i-1}}\right) I_{(x_{i-1}, x_i]}(t) \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{(1 - y_1)t}{x_1}\right) I_{[0,x_1]}(t) + \left(-\frac{y_n t}{1 - x_n} + \frac{y_n}{1 - x_n}\right) I_{(x_n,1]}(t)\right). \end{aligned}$$

Знайдемо максимум дисперсії на кожному з проміжків.

Випадок 1. Якщо $t \in [0, x_1]$, то

$$g(t) = t - \frac{(1 - y_1)t^2}{x_1} = \frac{(1 - y_1)}{x_1}\left(t - \frac{x_1}{2(1 - y_1)}\right)^2 + \frac{x_1}{4(1 - y_1)}.$$

Якщо $x_1/(2(1 - y_1)) < x_1$, то

$$\max_{t \in [0,x_1]} g(t) = \frac{x_1}{4(1 - y_1)}.$$

В протилежному випадку функція g зростає на проміжку $[0, x_1]$, і нам необхідно знайти значення функції g в точці x_1.

$$g(x_1) = x_1 y_1.$$

Отже,

$$\max_{t \in [0,x_1]} g(t) = \begin{cases} \frac{x_1}{4(1-y_1)}, & y_1 \leqslant 1/2. \\ x_1 y_1, & y_1 > 1/2, \end{cases}$$

Випадок 2. Якщо $t \in (x_{i-1}, x_i]$, $i = 2, \ldots, n$, то

$$\begin{aligned} g(t) &= -\frac{(y_{i-1} - y_i)t^2}{x_i - x_{i-1}} + \frac{(x_i y_{i-1} - x_{i-1} y_i)\,t}{x_i - x_{i-1}} \\ &= -\frac{(y_{i-1} - y_i)}{x_i - x_{i-1}}\left(t - \frac{(x_i y_{i-1} - x_{i-1} y_i)}{2(y_i - y_{i-1})}\right)^2 + \frac{(x_i y_{i-1} - x_{i-1} y_i)^2}{4(x_i - x_{i-1})(y_i - y_{i-1})}. \end{aligned}$$

Якщо
$$\frac{(x_i y_{i-1} - x_{i-1} y_i)}{2(y_i - y_{i-1})} \in (x_{i-1}, x_i],$$
то
$$\max_{t\in(x_{i-1},x_i]} g(t) = \frac{(x_i y_{i-1} - x_{i-1} y_i)^2}{4(x_i - x_{i-1})(y_i - y_{i-1})}.$$
В протилежному випадку необхідно знайти значення на кінцях проміжку:
$$g(x_{i-1}) = x_{i-1} y_{i-1}, \qquad g(x_i) = x_i y_i.$$
Порівнявши значення функції g на вказаному проміжку, маємо
$$\max_{t\in(x_{i-1},x_i]} g(t) = \begin{cases} a_{i-1} b_{i-1} x_1 y_1, & a_i b_i < 1, A_i > a_i \text{ або } a_{i-1} > A_i, \\ \frac{x_1 y_1 (a_i b_{i-1} - a_{i-1} b_i)^2}{4(a_i - a_{i-1})(b_{i-1} - b_i)}, & a_{i-1} < A_i < a_i, \\ a_i b_i x_1 y_1, & a_i b_i > 1, A_i > a_i \text{ або } a_{i-1} > A_i, \end{cases}$$
де
$$A_i = \frac{a_i b_{i-1} - a_{i-1} b_i}{2(b_{i-1} - b_i)}.$$
Випадок 3. Якщо $t \in (x_n, 1]$, то
$$g(t) = -\frac{y_n t}{1 - x_n}(1 - t) = -\frac{y_n}{1 - x_n}\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{y_n}{4(1 - x_n)}.$$
Якщо $\frac{1}{2} \in (x_n, 1]$, то
$$\max_{t\in(x_n,1]} g(t) = \frac{y_n}{4(1 - x_n)}.$$
В протилежному випадку функція g спадає на інтервалі $(x_n, 1]$, і нам необхідно знайти значення функції g в точці x_n.
$$g(x_n) = x_n y_n = a_n b_n x_1 y_1.$$
Таким чином, можемо обчислити максимум дисперсії.
$$\max_{t\in(x_n,1]} g(t) = \begin{cases} \frac{b_n y_1}{4(1 - a_n x_1)}, & a_n x_1 < 1/2. \\ a_n b_n x_1 y_1, & a_n x_1 \geqslant 1/2, \end{cases}$$
Випадок $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \in D_1$. Тоді
$$\sigma(t) = \sqrt{t\left(1 - \frac{(1 - y_1)t}{x_1}\right)},$$
а максимум функції g досягається в точці x_1, тобто
$$\max_{t\in[0,1]} g(t) = g(x_1) = x_1 y_1.$$
Таким чином
$$\sigma_M = \sqrt{x_1 y_1}.$$
Тоді
$$\sigma(t) = \sqrt{x_1 y_1}\left(1 - \frac{(2y_1 - 1)(t - x_1)}{2x_1 y_1}\right)(o(1) + 1), \qquad t \to x_1. \tag{10}$$
Корреляційна функція має вигляд:
$$\rho(s,t) = \sqrt{\frac{s\left(1 - \frac{(1-y_1)t}{x_1}\right)}{t\left(1 - \frac{(1-y_1)s}{x_1}\right)}}.$$

Крім того
$$\rho(s,t) = 1 - \frac{1}{2x_1y_1}(t-s)(1+o(1)), \qquad s,t \to x_1. \tag{11}$$
Використавши умови E1 і E2 та представлення (10) і (11), знаходимо:
$$\alpha = \beta = 1, \qquad A = \frac{(2y_1-1)}{2\sqrt{x_1y_1}}, \qquad C = \frac{1}{2x_1y_1}, \qquad \sigma_M = \sqrt{x_1y_1}, \qquad K_1 = 2y_1 - 1.$$
Використовуючи теорему 2.3 (випадок 2), отримаємо
$$\mathsf{P}\left\{\max_L X(s,t) > u\right\} = H_1^{K,1}\Psi\left(\frac{u}{\sqrt{x_1y_1}}\right)(1+o(1)).$$
Випадок $(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n) \in D_{n+1}$. Тоді
$$\sigma(t) = \sqrt{t\left(1 - \frac{(1-y_1)t}{x_1}\right)},$$
а максимум функції g досягається в точці $x_1/(2(1-y_1))$, тобто
$$\max_{t\in[0,1]} g(t) = g\left(\frac{x_1}{2(1-y_1)}\right) = \frac{x_1}{4(1-y_1)}.$$
Таким чином
$$\sigma_M = \sqrt{\frac{x_1}{4(1-y_1)}}$$
і тому
$$\sigma(t) = \left(\sqrt{\frac{x_1}{4(1-y_1)}} - \frac{1}{2}\left(\frac{1-y_1}{x_1}\right)^{\frac{3}{2}}\left(t - \frac{x_1}{2(1-y_1)}\right)^2\right)(o(1)+1). \tag{12}$$
Корреляційну функцію можемо подати в такій формі:
$$\rho(s,t) = \left(1 - \frac{2(1-y_1)}{x_1}(t-s)\right)(1+o(1)), \qquad s,t \to \frac{x_1}{2(1-y_1)}. \tag{13}$$
З (12) і (13) отримаємо:
$$\alpha = 1, \qquad \beta = 2, \qquad A = \frac{1}{2}\left(\frac{1-y_1}{x_1}\right)^{\frac{3}{2}}, \qquad C = \frac{2(1-y_1)}{x_1}.$$
Використовуючи теорему 2.3 (випадок 1), отримаємо:
$$P\left\{\max_{(s,t)\in L} X(s,t) > u\right\} = e^{-\frac{2(1-y_1)u^2}{x_1}}(1+o(1)).$$
Випадок $(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n) \in D_{n+j}$, $j = 2,\ldots,n$. Тоді
$$\sigma(t) = \sqrt{t\left(-\frac{(y_{j-1}-y_j)t}{x_j - x_{j-1}} + \frac{x_jy_{j-1} - x_{j-1}y_j}{x_j - x_{j-1}}\right)},$$
Максимум функції g досягається в точці
$$\frac{(a_jb_{j-1} - a_{j-1}b_j)x_1}{2(b_{j-1}-b_j)},$$
тобто
$$\max_{t\in[0,1]} g(t) = g\left(\frac{(a_jb_{j-1} - a_{j-1}b_j)x_1}{2(b_{j-1}-b_j)}\right) = \frac{x_1y_1(a_jb_{j-1} - a_{j-1}b_j)^2}{4(a_j - a_{j-1})(b_{j-1}-b_j)}.$$
Тоді
$$\sigma_M = \sqrt{\frac{x_1y_1(a_jb_{j-1} - a_{j-1}b_j)^2}{4(a_j - a_{j-1})(b_{j-1}-b_j)}},$$

$$\sigma(t) = \left(\sqrt{\frac{x_1 y_1 (a_j b_{j-1} - a_{j-1} b_j)^2}{4(a_j - a_{j-1})(b_{j-1} - b_j)}} - \frac{2\,(b_{j-1} - b_j)\, y_1 \sqrt{(a_j - a_{j-1})\,(b_{j-1} - b_j)}}{x_1 (a_j - a_{j-1})(a_j b_{j-1} - a_{j-1} b_j)\sqrt{x_1 y_1}} \times \left(t - \frac{(a_j b_{j-1} - a_{j-1} b_j) x_1}{2(b_{j-1} - b_j)}\right)^2\right)(o(1) + 1). \tag{14}$$

Корреляційну функцію можна представити у вигляді:

$$\rho(s,t) = \left(1 - \frac{2\,(b_{j-1} - b_j)}{x_1 (a_j b_{j-1} - a_{j-1} b_j)}(t - s)\right)(1 + o(1)). \tag{15}$$

Тоді з (14) і (15) отримаємо: $\alpha = 1$, $\beta = 2$,

$$A = \frac{2\,(b_{j-1} - b_j)\, y_1 \sqrt{(a_j - a_{j-1})\,(b_{j-1} - b_j)}}{x_1 (a_j - a_{j-1})(a_j b_{j-1} - a_{j-1} b_j)\sqrt{x_1 y_1}}, \qquad C = \frac{2\,(b_{j-1} - b_j)}{x_1 (a_j b_{j-1} - a_{j-1} b_j)}.$$

Використавши теорему 2.3, отримаємо:

$$\mathsf{P}\left\{\max_L X(s,t) > u\right\} = e^{-\frac{2(a_j - a_{j-1})(b_{j-1} - b_j) u^2}{x_1 y_1 (a_j b_{j-1} - a_{j-1} b_j)^2}}(1 + o(1)).$$

Випадок $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \in D_j$, $j = 2, \ldots, n$. Тоді

$$\max_{t \in [0,1]} g(t) = g(x_j) = x_j y_j = a_j b_j x_1 y_1.$$

Оскільки

$$\sigma(t) = \left(\sqrt{x_j y_j} - \frac{(x_{j-1} y_j + x_j y_{j-1} - 2 x_j y_j)}{(x_j - x_{j-1})\sqrt{x_j y_j}}(t - x_j)\right)(1 + o(|t - x_j|)),$$

$$\rho(s,t) = \left(1 - \frac{(x_j y_{j-1} - x_{j-1} y_j)}{2(x_j - x_{j-1}) x_j y_j}(t - s)\right)(1 + o(|t - s|)),$$

то $\alpha = 1$, $\beta = 1$,

$$A = \frac{(x_{j-1} y_j + x_j y_{j-1} - 2 x_j y_j)}{(x_j - x_{j-1})\sqrt{x_j y_j}}, \qquad C = \frac{(x_j y_{j-1} - x_{j-1} y_j)}{2(x_j - x_{j-1}) x_j y_j},$$

$$K_j = \frac{2\,(x_{j-1} y_j + x_j y_{j-1} - 2 x_j y_j)}{(x_j y_{j-1} - x_{j-1} y_j)}.$$

Таким чином

$$\mathsf{P}\left\{\max_{(s,t) \in L} X(s,t) > u\right\} = H_1^{K_j,1}\Psi\left(\frac{u}{\sqrt{x_j y_j}}\right)(1 + o(1)), \qquad j = 2, \ldots, n.$$

Випадок $(x_1, \ldots, x_n, y_1 \ldots, y_n) \in D_{2n+1}$. Маємо

$$\max_{t \in [0,1]} g(t) = g\,(1/2) = \frac{b_n y_1}{4(1 - a_n x_1)}$$

і

$$\mathsf{P}\left\{\max_{(s,t) \in L} X(s,t) > u\right\} = e^{-\frac{2(1 - a_n x_1) u^2}{b_n y_1}}(1 + o(1)). \quad \Box$$

4. Висновки

В даній роботі отримано оцінки "хвоста" розподілу максимуму поля Ченцова на ламану з однією точкою злому. Виявлено залежність оцінок від положення точки злому. Знайдено асимптотичну поведінку "хвоста" розподілу максимуму поля $X(s,t)$ на ламаних з декількома точками злому.

Література

1. Н. Н. Ченцов, *Винеровские случайные поля, зависящие от нескольких параметров*, Доклады АН СССР **46** (1956), № 4, 607–609.
2. E. Csaki, D. Khoshnevisan, and Z. Shi, *Boundary crossings and the distribution function of the maximum of Brownian sheet*, Stochastic Process. Appl. (2000), no. 90, 1–18.
3. V. Goodman, *Distribution estimates for functionals of the two-parameter Wiener process*, Ann. Probab. **4** (1976), no. 6, 977–982.
4. І. І. Клесов, *Про ймовірність досягнення криволінійного рівня вінерівським полем*, Теор. ймовірност. та матем. статист. **51** (1995), 63–67.
5. О. І. Клесов, Н. В. Круглова, *Розподіл функціоналів типу максимуму для двопараметричного поля Ченцова*, Наукові вісті НТУУ "КПІ" (2007), № 4, 136–141.
6. N. V. Kruglova, *Distribution of the maximum of the Chentsov random field*, Theor. Stoch. Process. (2008), no. 1, 76–81.
7. S. R. Paranjape and C. Park, *Distribution of the supremum of the two-parameter Yeh–Wiener process on the boundary*, Appl. Probab. **10** (1973), no. 4, 875–880.
8. В. И. Питербарг, *Гауссовские случайные процессы*, Итоги Науки и Техники. Сер. Теор. Вероятн. Мат. Стат. Теор. Киберн. (1982), № 19, 155–199.
9. J. Yeh, *Wiener measure in a space of functions of two variables*, Trans. Amer. Math. Soc. (1960), no. 95, 433–450.

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей, фізико-математичний факультет, Національний технічний університет України "КПІ", проспект Перемоги, 37, Київ 03056, Україна.

Адреса електронної пошти: natahak@ukr.net

Надійшла 22/09/2009