Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 81, 2009, стор. 102–113

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 81, 2009, pp. 102–113

ЗБІЖНІСТЬ ЗА ПАРАМЕТРОМ СЕРІЇ ТА ДИФЕРЕНЦІЙОВНІСТЬ ЗА БАР'ЄРОМ ЦІН БАР'ЄРНИХ ОПЦІОНІВ

УДК 519.21

О. М. КУЛИК, Ю. С. МІШУРА І О. М. СОЛОВЕЙКО

Анотація. Встановлено слабку збіжність мір, пов'язаних з ціновим процесом, та доведено неперервність за параметром серії справедливої ціни бар'єрного опціону купівлі "up-and-out" з коефіцієнтами, залежними від часу і параметру серії, в моделі Блека-Шоулса повного ринку. При цьому не треба знати явного вигляду ціни вказаного бар'єрного опціону. Цей результат дозволив одержати неперервність за параметром серії розв'язку відповідної крайової задачі для параболічного рівняння з частинними похідними. За допомогою числення Маллявена встановлено існування неперервної обмеженої щільності звуження розподілу вінерівського інтегралу зі зсувом на будь-який "додатний " промінь і доведено також диференційовність вказаної справедливої ціни за бар'єром (диференційовність за іншими параметрами є класичним результатом).

Abstract. Continuity with respect to the parameter of series for the fair price of barrier call option "up-and- out" with the coefficients depending on time and on the parameter of series, is established. The explicit form of the price of this option is not necessary to know for this purpose. This result allows to obtain the continuity with respect to the parameter of series of the solution of the corresponding boundary-value problem for the equation with the partial derivatives of the hyperbolic type. With the help of Malliavin calculus, the existence of continuous bounded density of the restriction of the distribution of Wiener integral with the drift on any "positive" semiaxes is established and the differentiability of the mentioned fair price with respect to the value of barrier is also proved (the differentiability of this price with respect to other parameters is a classical result).

Аннотация. Установлена слабая сходимость мер, связанных с ценовым процессом, и доказана непрерывность относительно параметра серии справедливой цены барьерного опциона покупки "up-and-out" с коэффициентами, зависящими от времени и параметра серии, в модели полного рынка Блека-Шоулса. При этом не нужно знать явного вида цены указанного барьерного опциона. Этот результат позволил доказать непрерывность по параметру серии решения соответствующей краевой задачи для параболического уравнения с частными производными. С помощью исчисления Маллявена доказано существование непрерывной ограниченной плотности сужения распределения винеровского интеграла со сносом на любой "положительный" луч и доказана также дифференцируемость по барьеру указанной справедливой цены опциона (дифференцируемость цены по другим параметрам – это классический результат).

1. Вступ

Бар'єрний опціон — це тип опціону, за яким виплата залежить від факту виходу за деякий відомий бар'єр траєкторії базового активу (перетину бар'єру). Вони є частинним випадком екзотичного опціону, що залежить від траєкторії базового активу. Бар'єрні опціони можуть бути опціонами купівлі чи продажу, Європейськими чи Американськими опціонами.

Бар'єрні опціони поділяють на опціони виходу ("knock-out") та входу ("knock-in"). Виплата за опціоном виходу відбувається, якщо ціна акції не вийде за бар'єр, такі опціони поділяються на два типи: коли ціна акції в початковий момент знаходиться

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 91B28; Secondary 60F17, 60G15, 60H07.
Ключові слова і фрази. Бар'єрний опціон купівлі, модель Блека-Шоулса, слабка збіжність мір, збіжність за параметром серії, крайова задача для параболічного рівняння, числення Маллявена, диференційовність ціни за бар'єром.

нижче бар'єра і виплата відбувається, якщо ціна акції не перетинає бар'єр, то такий опціон називається "up-and-out", коли ціна акції в початковий момент знаходиться вище бар'єра і виплата відбувається, якщо ціна акції не перетинає бар'єр – то "down-and-out". Виплата за опціони входу відбувається, якщо ціна акції вийде за бар'єр, вони також поділяються відповідно на опціони "up-and-in" та "down-and-in". Всього є вісім типів бар'єрних опціонів.

Наприклад, для бар'єрного опціону купівлі "up-and-out" функція виплат має вигляд:

$$C = \begin{cases} (S_T - K)^+, & \text{якщо } \max_{0\le t\le T} S_t < H, \\ 0 & \text{інакше,} \end{cases}$$

де H — бар'єр ($H > S_0$ і $H > K$), K — страйкова ціна. Аналогічно можна визначити функції виплат для решти типів бар'єрних опціонів.

Розглянемо модель Блека-Шоулса, тобто неперервну модель фінансового ринку з одним ризиковим активом (акцією з ціною $S(t)$ в момент t) і безризиковим активом (облігацією з ціною $B(t)$ в момент t). Назвемо таку модель моделлю (A_0). Ризиковий актив розглядається на повному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ з фільтрацією $\{\mathcal{F}_t, t \ge 0\}$. Ціна $B(t)$ визначається як розв'язок диференціального рівняння

$$dB(t) = r_0(t)B(t)dt, \tag{1.1}$$

де $r_0 = r_0(t)$, $t \ge 0$, — невід'ємна функція, інтегровна за Лебегом на будь-якому відрізку. Нехай $B(0) = 1$, тоді $B(t) = \exp\left\{\int_0^t r_0(s)ds\right\}$ для $t \ge 0$.

Рівняння для ціни акції у диференціальній формі має вигляд

$$dS(t) = S(t)(\mu_0(t)dt + \sigma_0(t)dW(t)), \tag{1.2}$$

де $\mu_0(t)$ і $\sigma_0(t)$ – невипадкові функції, а $W(t)$ – стандартний вінерівський процес відносно міри P. Крім того, припускаємо, що умови $\int_0^t \sigma_0^2(s)ds < \infty$, $\int_0^t |\mu_0(s)|\, ds < \infty$ виконуються для всіх $t \ge 0$.

Далі розглядаємо звуження вказаної моделі на інтервал $[0, T]$, де T – дата виконання опціону.

2. Неперервність ціни бар'єрного опціону за параметром серії

В реальних ринках параметри μ_0, σ_0, K^0, H^0, r_0 вимірюються з деякою точністю. Ми хочемо встановити стійкість, робастність ціни Європейського бар'єрного опціону відносно зміни чи неточності вимірювання параметрів, що визначають модель.

Розглянемо сім'ю (A_n) фінансових ринків з неперервним часом, що описуються послідовностями невипадкових вимірних функцій σ_n, μ_n, r_n, а також числові послідовності H^n, K^n, $n \ge 0$. Припустимо, що для них виконуються всі ті ж умови, що й для параметрів моделі (A_0). Функції μ_0, σ_0, r_0, як правило, називають параметрами рівнянь (1.1)–(1.2), тому будемо називати n *параметром серії.*

Інтегральна форма рівняння (1.2) має вигляд

$$S_n(t) = S_n^0 \exp\left\{\int_0^t (\mu_n(s) - \frac{1}{2}\sigma_n^2(s))ds + \int_0^t \sigma_n(s)dW(s)\right\}.$$

Нагадаємо, що за виконання умови (B_n)

$$\int_0^T \left(\frac{\mu_n(s) - r_n(s)}{\sigma_n(s)}\right)^2 ds < \infty$$

модель ринку (A_n) є повною та безарбітражною, тобто існує єдина мартингальна міра, відносно якої дисконтована ціна акції $S_n(t)\exp\left\{-\int_0^t r_n(s)ds\right\}$ є мартингалом. Справді,

$$X_n(t) = S_n(t)\exp\Big\{-\int_0^t r_n(s)ds\Big\} =$$
$$S_n^0\exp\Big\{\int_0^t (\mu_n(s) - r_n(s) - \frac{\sigma_n^2(s)}{2})ds + \int_0^t \sigma_n(s)dW_n(s)\Big\} =$$
$$S_n^0\exp\Big\{-\int_0^t \frac{\sigma_n^2(s)}{2}ds + \int_0^t \sigma_n(s)dW_n^*(s)\Big\},$$

де $W_n^*(s) = W_n(s) + \frac{\mu_n(s)-r_n(s)}{\sigma_n(s)}$ – вінерівський процес відносно міри P_n^*, для якої щільність Радона–Нікодима має вигляд

$$\frac{dP_n^*}{dP}\Big|_{\mathcal{F}_t} = \exp\Big\{\int_0^t \frac{\mu_n(s)-r_n(s)}{\sigma_n(s)}dW_n(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \Big(\frac{\mu_n(s)-r_n(s)}{\sigma_n(s)}\Big)^2 ds\Big\}.$$

Аналогічно, для граничного ринку існує єдина мартингальна міра і вона знаходиться подібним чином. Отже, за виконання умови (B_n) для всіх $n \geq 0$, дограничний і граничний ринки повні (кожне платіжне зобов'язання є досяжним) та безарбітражні (не існує портфеля з капіталом V_t, $t \in [0,T]$, для якого $V_0 = 0$, $P(V_T \geq 0) = 1$, $P(V_T \neq 0) > 0$).

Міра P_n^* – це ймовірнісна міра, нейтральна до ризику, тобто поточна вартість всіх фінансових активів дорівнює очікуваному значенню майбутньої виплати активу, дисконтованої відносно безризикової ставки $r_n(t)$. В нашій моделі справедлива ціна опціону визначається як математичне сподівання відносно нейтральної до ризику міри P_n^* дисконтованої виплати за опціоном з дисконтуючим множником $\exp\big\{\int_0^T r_n(t)dt\big\}$, тобто справедлива ціна Європейського бар'єрного опціону купівлі "up-and-out" в дограничній моделі має вигляд

$$C^n = E_{P_n^*}\Big(\exp\Big\{-\int_0^T r_n(t)dt\Big\}(S_n(T) - K^n)^+\mathbb{I}\{\max_{0\leq t\leq T} S_n(t) < H^n\}\Big), \qquad (2.1)$$

де K^n – страйкова ціна, $H^n > S_0^n$ – бар'єр, через $\mathbb{I}_A$ будемо позначати індикатор події A. Справедлива ціна відповідного опціону в граничній моделі має вигляд

$$C^0 = E_{P_0^*}\Big(\exp\Big\{-\int_0^T r_0(t)dt\Big\}(S(T) - K^0)^+\mathbb{I}\{\max_{0\leq t\leq T} S(t) < H^0\}\Big), \qquad (2.2)$$

де $H^0 > S_0^0$. Використаємо цей вигляд для доведення збіжності ціни опціону за параметром серії.

Теорема 2.1.

Нехай виконуються умови:

1. *Числові коефіцієнти збігаються:* $S_0^n \to S_0^0$, $K^n \to K^0$, $H^n \to H^0$ *при* $n \to \infty$;
2. σ_n *збігається до* σ_0 *в* $L_2[0,T]$, r_n *збігається до* r_0 *в* $L_1[0,T]$.
3. *Для всіх* $n \geq 0$ *виконується умова* (B_n).
4. $\int_0^t \sigma_0^2(s)\,ds > 0$ *для кожного* $t > 0$.

Тоді, якщо параметр серії $n \to \infty$, *то ціна Європейського бар'єрного опціону купівлі "up-and-out" в дограничній моделі* C^n, *що задається формулою* (2.1), *збігається до відповідної ціни* C^0, *що задається формулою* (2.2).

Доведення. В силу умови 3, використовуючи рівності (2.1) та (2.2), можна записати

$$\begin{aligned} C^n - C^0 \;&=\; \exp\Big\{-\textstyle\int_0^T r_0(s)ds\Big\}E_{P_0^*}\Big((S(T) - K^0)^+\mathbb{I}\{\max_{0\leq t\leq T} S(t) < H^0\}\Big) \\ &-\; \exp\Big\{-\textstyle\int_0^T r_n(s)ds\Big\}E_{P_n^*}\Big((S_n(T) - K^n)^+\mathbb{I}\{\max_{0\leq t\leq T} S_n(t) < H^n\}\Big). \end{aligned} \qquad (2.3)$$

Введемо позначення

$$X(t) := S(t)\exp\Big\{-\int_0^t r_0(s)ds\Big\},\ X_n(t) := S_n(t)\exp\Big\{-\int_0^t r_n(s)ds\Big\}.$$

Тоді, якщо внести відповідні множники дисконтування в правій частині (2.3) під знак математичних сподівань і використати той факт, що для будь-якого $n \geq 0$ розподіл X_T^n відносно міри P_n^* відомий, то (2.3) можна переписати в наступному вигляді

$$C^n - C^0 = E_{P_n^*}\Big(\Big(X_n(T) - K^n\exp\Big\{-\int_0^T r_n(s)ds\Big\}\Big)^+\times$$
$$\mathbb{I}\Big\{\max_{0\leq t\leq T} X_n(t)\exp\Big\{\int_0^t r_n(s)ds\Big\} < H^n\Big\}\Big)-$$
$$E_{P_0^*}\Big(\Big(X(T) - K^0\exp\Big\{-\int_0^T r_0(s)ds\Big\}\Big)^+\mathbb{I}\Big\{\max_{0\leq t\leq T} X(t)\exp\Big\{\int_0^t r_0(s)ds\Big\} < H^0\Big\}\Big) =$$
$$E\Big(S_0^n\exp\Big\{\int_0^T \sigma_n(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^T \sigma_n^2(s)ds\Big\} - K^n\exp\Big\{-\int_0^T r_n(s)ds\Big\}\Big)^+\times$$
$$\mathbb{I}\Big\{\max_{0\leq t\leq T} X_n(t)\exp\Big\{\int_0^t r_n(s)ds\Big\} < H^n\Big\}\Big)-$$
$$E\Big(S_0^0\exp\Big\{\int_0^T \sigma_0(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^T \sigma_0^2(s)ds\Big\} - K^0\exp\Big\{-\int_0^T r_0(s)ds\Big\}\Big)^+\times$$
$$\mathbb{I}\Big\{\max_{0\leq t\leq T} X(t)\exp\Big\{\int_0^t r_0(s)ds\Big\} < H^0\Big\}\Big),$$

де математичне сподівання береться за мірою, відносно якої W – вінерівський процес. В силу умови 2 має місце збіжність $\int_0^T r_n(s)ds \to \int_0^T r_0(s)ds$, $\int_0^T \sigma_n^2(s)ds \to \int_0^T \sigma_0^2(s)ds$. Зі збіжності σ_n до σ в $L_2[0,T]$ випливає збіжність в рівномірній топології гауссівських інтегралів $(\int_0^t \sigma_n(s)dW(s), \Rightarrow \int_0^t \sigma_0(s)dW(s);\ 0 \leq t \leq T)$, отже, і відповідна збіжність процесів

$$Y_n(t) := \Big(S_0^n\exp\Big\{\int_0^t \sigma_n(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_n^2(s)ds\Big\} - K^n\exp\Big\{-\int_0^t r_n(s)ds\Big\}\Big)^+ \Rightarrow$$

$$Y_0(t) := \Big(S_0^0\exp\Big\{\int_0^t \sigma_0(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_0^2(s)ds\Big\} - K^0\exp\Big\{-\int_0^t r_0(s)ds\Big\}\Big)^+.$$

Рівномірна інтегровність сукупності підінтегральних виразів у (2.1) очевидна, оскільки в силу умов теореми вони мають моменти всіх порядків, для кожного порядку обмежені в сукупності. Тому в силу теореми 5.3 [9] для доведення шуканого твердження достатньо довести слабку збіжність мір, що відповідають сукупності процесів

$$\Big(Y_n(t), \mathbb{I}\Big\{\max_{0\leq t\leq T} X_n(t)\exp\Big\{\int_0^t r_n(s)ds\Big\} < H^n\Big\}\Big).$$

Ця збіжність, в свою чергу, випливатиме з теореми 5.1 [9] в силу неперервності функціоналу max в рівномірній топології та того факту, що

$$P\left(\max_{0\leq t\leq T}\Big(X(t)\exp\Big\{\int_0^t r_0(s)ds\Big\}\Big) = H^0\right) = 0. \tag{2.4}$$

Доведемо (2.4); цього, як ми продемонстрували, достатньо для доведення твердження теореми. Відносно міри P_0^* випадковий процес $[S_0^0]^{-1}X_t$ однаково розподілений з процесом

$$\exp\Big\{-\frac{1}{2}\int_0^t \sigma_0^2(s)\,ds + \int_0^t \sigma_0(s)\,dW(s)\Big\},$$

де W – вінерів процес. Тому рівність (2.4) еквівалентна до

$$P\left(\max_{0\le t\le T}\left\{\int_0^t r_0(s)ds - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_0^2(s)\,ds + \int_0^t \sigma_0(s)\,dW(s)\right\} = \ln\left(\frac{H^0}{S_0^0}\right)\right) = 0. \quad (2.5)$$

За умовою теореми $H^0 > S_0^0$, а отже

$$\ln\left(\frac{H^0}{S_0^0}\right) > 0.$$

Тому (2.5) випливає з наведеного нижче наслідку 4.1. Теорему доведено. □

3. Ціна бар'єрного опціону як розв'язок крайової задачі. Гранична теорема для розв'язків першої крайової задачі для параболічних рівнянь з коефіцієнтами, залежними від часу.

Розглянемо справедливу ціну $C(S,t)$ Європейського бар'єрного опціону купівлі "up-and-out" як функцію ціни акції в початковий момент та часу, що залишився до дати виконання опціону. В роботі Мертона [5] виведене рівняння для справедливої ціни $C(S,t)$ у випадку, коли параметри моделі є сталими. При цьому виявилось, що рівняння для справедливої ціни звичайного і бар'єрного опціону має один і той же вигляд. З іншого боку, в [8] виведене рівняння для ціни звичайного опціону у випадку параметрів, що задовольняють умову (B_0), воно має вигляд наступний вигляд

$$-\frac{\partial C(S,t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(t)S^2\frac{\partial^2 C(S,t)}{\partial S^2} + r(t)S\frac{\partial C(S,t)}{\partial S} - r(t)C(S,t) = 0 \quad (3.1)$$

і розглядається на множині $[0,T]\times(0,H]$. Тому крайова задача для вказаного бар'єрного опціону складається з рівняння (3.1) та граничних умов

$$C(H,t) = 0, C(S,0) = (S-K)^+,\ 0 < x < H.\ . \quad (3.2)$$

Тут K – страйкова ціна, а H – значення бар'єру. Ця крайова задача має принаймні один розв'язок, а саме, ціну опціону. Якщо припустити, що вона має ще один розв'язок, то різниця цих розв'язків задовольнятиме те саме рівняння з нульовими граничними умовами. Згідно з [12] (теорема 9.1, розділ IV), при неперервних і обмежених коефіцієнтах $\sigma(t)$ та $r(t)$, $\sigma(t) > 0$ для всіх $t\in[0,T]$, задача має єдиний розв'язок, тобто різниця буде нульовою, а тоді початкова крайова задача має єдиний розв'язок.

Але, аналогічно до (2.1), $C(S,t)$– це ціна відповідного опціону,

$$C(S,t) = E_{P^*}\Big(\exp\Big\{-\int_t^T r(s)ds\Big\}(S_T-K)^+\mathbb{I}\{\max_{t\le s\le T} S(s) < H^n\}\Big), \quad (3.3)$$

де S – ціна акції в момент t; отже, якщо задача (3.1), (3.2) має єдиний розв'язок, то цей розв'язок задається формулою (3.3). Для нього ми довели неперервність за параметром серії. Цим самим ми довели неперервність за параметром серії розв'язку задачі (3.1), (3.2), не знаходячи цього розв'язку явно, і відповідний результат можна сформулювати наступним чином.

Теорема 3.1. *Розглянемо на* $[0,T]\times(0,H_n]$ *крайову задачу, що складається з рівняння*

$$-\frac{\partial C(S,t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_n^2(t)S^2\frac{\partial^2 C(S,t)}{\partial S^2} + r_n(t)S\frac{\partial C(S,t)}{\partial S} - r_n(t)C(S,t) = 0 \quad (3.4)$$

з крайовими умовами

$$C(H_n, t) = 0, C(S, 0) = (S - K_n)^+,\ 0 < S < H_n,\ C(H_n, 0) = 0. \tag{3.5}$$

Нехай для кожного $n \geq 0$ *коефіцієнти рівняння* (3.4) *є обмеженими і неперервними, і, додатково, коефіцієнти задачі* (3.4)–(3.5) *задовольняють умови теореми 2.1, де умову 1 замінено на* $K^n \to K^0$, $H^n \to H^0$ *при* $n \to \infty$. *Тоді розв'язок дограничної крайової задачі збігається поточково до розв'язку граничної крайової задачі.*

Зауваження 3.1. Рівняння (3.1) можна звести до рівняння теплопровідності, для чого треба зробити заміну $S = HKe^x$, $C = HKv$, а також ввести нову змінну $\hat{\tau}$, таку що $\frac{1}{2}\sigma^2(t)dt = d\hat{\tau}$. Після проведення всіх перетворень отримаємо наступну задачу: рівняння

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial V}{\partial \hat{\tau}}$$

з граничними умовами

$$V_0(x) = V(x, 0) = \frac{1}{H}\max(He^x - 1, 0),$$

$$V(f(\hat{\tau}), \hat{\tau}) = V\Big(-\ln K + \int_0^{\hat{\tau}} \frac{r(s)}{\frac{1}{2}\sigma^2(s)} ds - \hat{\tau}, \tau\Big) = 0.$$

Отримана задача – це рівняння теплопровідності з нелінійними крайовими умовами, і ця задача еквівалентна задачі (3.1), (3.2).

Отже, не знаходячи явний вигляд розв'язку задачі (3.1), (3.2), та еквівалентної їй задачі, ми встановили неперервність їх розв'язку за параметром серії.

4. Диференційовність ціни бар'єрного опціону як функції бар'єру

Розглянемо ціну опціону $C = C(S, T; H)$ як функцію від бар'єру H та дослідимо диференційовність цієї функції за змінною H. У наших міркуваннях ми будемо спиратись на методи числення Маллявена на просторі вінерових функціоналів. Читачеві, не знайомому з цими методами, ми рекомендуємо книгу [7], в якій наведено стислий та повний огляд тематики. Цю ж книгу ми будемо використовувати для посилань на основні об'єкти, позначення та конструкції теорії.

Почнімо з доведення кількох проміжних результатів. Нехай $f \in C[0, T]$, $\sigma \in L_2[0, T]$ — детерміновані функції, причому $f(0) = 0$ і $\int_0^t \sigma^2(s)\,ds > 0$ для кожного $t > 0$. Покладемо

$$Y(t) = \int_0^t \sigma(s)\,dW(s), \quad t \in [0, T],$$
$$M_T = \max_{0 \leq t \leq T} [f(t) + Y(t)].$$

Лема 4.1. *Випадкова величина* M_T *належить до кожного з класів* $\mathbb{D}^{1,p}$, $p \geq 1$, *диференційовних вінерових функціоналів (означення див. у* [7], *розділ 1.1), причому*

$$DM_T = \sigma \mathbb{I}_{[0,\theta]}, \tag{4.1}$$

де $\theta = \min\{t : f(t) + Y(t) = M_T\}$.

Доведення. Безпосередньо з означення стохастичної похідної на просторі вінерових функціоналів ([7], розділ 1.1) випливає, що кожна з випадкових величин $Y(t)$, $t \in [0, T]$, належить до кожного з класів $\mathbb{D}^{1,p}$, $p \geq 1$, і відповідні стохастичні похідні дорівнюють

$$D[Y(t)] = \sigma \mathbb{I}_{[0,t]} \in L_2[0, T], \quad t \in [0, T].$$

Позначимо $\mathbb{T}_n = \{0, 2^{-n}T, \ldots, T\}$,

$$M_T^n = \max_{t \in \mathbb{T}_n} [f(t) + Y(t)], \quad \theta_n = \min\{t \in \mathbb{T}_n : f(t) + Y(t) = M_T^n\}.$$

Згідно з ланцюговим правилом ([7], твердження 1.1.3), для $g \in C_b^1(\mathbb{R}^{2^n})$ має місце рівність

$$Dg(f(2^{-n}T) + Y(2^{-n}T), \ldots, f(T) + Y(T)) =$$

$$= \sum_{k=1}^{2^n} g_k'(f(2^{-n}T) + Y(2^{-n}T), \ldots, f(T) + Y(T))\sigma \mathbb{I}_{[0,k2^{-n}T]}. \tag{4.2}$$

Розглянемо функцію

$$g = \max(0, x_1, x_2, \ldots, x_{2^n}) = \max(x_1 \vee 0, \ldots, x_{2^n} \vee 0).$$

Вона не є неперервно диференційовною, тому прямо підставити її у попередню формулу не можна. Але можна наблизити її гладкими функціями, наприклад, наступним чином:

$$g_N(x_1, \ldots, x^{2^n}) = \left(\sum_{k=1}^{2^n} [\phi_N(x_k)]^N\right)^{1/N}, \quad N \geq 1$$

де

$$\phi_N(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{N}{2}x^2, & x \in (0, N^{-1}] \\ x - \frac{1}{2N}, & x > N^{-1}. \end{cases}$$

Тоді при $N \to \infty$, за побудовою, маємо $g_N \uparrow g$ і

$$\frac{\partial}{\partial x_k} g_N \uparrow \mathbb{I}_{A_k^n}, \quad k = 1, \ldots, 2^n,$$

де $A_k^n = \{x \in \mathbb{R}^{2^n} : x_1, \ldots, x_{k-1} < x_k, x_k \geq x_{k+1}, \ldots, x_{2^n}\}$. Тому, підставивши g_N у (4.2), спрямувавши $N \to \infty$ та використавши замкненість оператора стохастичного диференціювання ([7], розділ 1.1), отримуємо, що $M_T^n \in \mathbb{D}^{1,p}$, $p \geq 1$, та

$$DM_T^n = \sigma \mathbb{I}_{[0,\theta_n]}. \tag{4.3}$$

Ясно, що $M_T^n \uparrow M_T$, $n \to \infty$, а отже $M_T^n \to M_T$ в середньому степеня p для кожного $p \geq 1$. Дослідимо граничну поведінку величин θ_n, $n \to +\infty$.

Позначимо $\underline{\theta} = \liminf_{n\to\infty} \theta_n$, $\overline{\theta} = \limsup_{n\to\infty} \theta_n$. Ясно, що $\underline{\theta} \geq \theta$ м.н. (в силу неперервності траєкторій процесу $f + Y$). З іншого боку, для довільних $s < t$ маємо

$$\{\theta \leq s, \overline{\theta} \geq t\} \subset \{\max_{t\leq r\leq T}[f(r) + Y(r)] \geq \max_{0\leq r\leq s}[f(r) + Y(r)], \theta \leq s\} =$$

$$= \{\max_{t\leq r\leq T}[f(r) + Y(r)] = \max_{0\leq r\leq s}[f(r) + Y(r)], \theta \leq s\},$$

в останній рівності ми врахували, що подія $\{\theta \leq s\}$ унеможливлює нерівність

$$\max_{t\leq r\leq T}[f(r) + Y(r)] > \max_{0\leq r\leq s}[f(r) + Y(r)].$$

Введемо позначення

$$s \sim t \overset{df}{\Leftrightarrow} \int_s^t \sigma^2(r)\, dr = 0, \quad s \nsim t \overset{df}{\Leftrightarrow} \int_s^t \sigma^2(r)\, dr \neq 0.$$

Для довільних $s < t$, випадкова величина $\max_{0\leq r\leq s}[f(r)+Y(r)]$ є вимірною відносно $\mathcal{F}_s = \sigma(W(r), 0 \leq r \leq s)$, а випадкова величина $\max_{t\leq r\leq T}[f(r)+Y(r)]$ розкладається у суму трьох доданків

$$Y(s), \quad Y(t) - Y(s), \quad \max_{t\leq r\leq T}[f(r) + Y(r) - Y(t)],$$

перший з яких є $\mathcal{F}_s$-вимірним, а другий та третій – незалежні у сукупності з $\mathcal{F}_s$. Окрім того, якщо $s \nsim t$, то розподіл другого доданку є абсолютно неперервним, а отже

$$P(\max_{t\leq r\leq T}[f(r) + Y(r)] = \max_{0\leq r\leq s}[f(r) + Y(r)]) = 0.$$

Таким чином, для довільних $s < t$, $s \nsim t$ маємо

$$P(\theta \le s, \overline{\theta} \ge t) = 0.$$

Зауважимо, що для довільних $s \sim t$ на проміжку $[s \wedge t, s \vee t]$ функція σ дорівнює 0 м.н. відносно міри Лебега. Тому, перебираючи всі пари раціональних s, t, з останньої рівності отримуємо, що

$$\sigma \mathbb{I}_{[0,\theta_n]} \to \sigma \mathbb{I}_{[0,\theta]}, \quad n \to \infty \tag{4.4}$$

у $L_2[0,T]$ з ймовірністю 1. Оскільки норми у $L_2[0,T]$ випадкових елементів $\sigma \mathbb{I}_{[0,\theta_n]}$ обмежені сталою $\|\sigma\|_{L_2[0,T]}$, звідси випливає, що збіжність у (4.4) має місце у кожному з просторів $L_p(\Omega; L_2[0,T])$, $p \ge 1$. Тому шукане твердження випливає із замкнености оператора D. □

Нехай $x > 0$ фіксоване, покладемо

$$h_x(t) = \sigma(t) \left(\max_{0 \le s \le t} [f(s) + Y(s)] - x \right)_-, \quad t \in [0,T],$$

(тут використано позначення $z_- = \max(0, -z)$),

$$g_x(t) = h_x(t) \left[\int_0^T \sigma(r) h_x(r)\, dr \right]^{-1}, \quad t \in [0,T].$$

Лема 4.2. *Випадковий елемент $g_x = \{g_x(t), t \in [0,T]\}$ зі значеннями у $L_2[0,T]$ належить до області визначення стохастичного інтеграла Скорохода δ (означення див. у [7], розділ 1.2).*

Доведення. Випадковий процес $h_x = \{h_x(t), t \in [0,T]\}$ є узгодженим з фільтрацією, породженою вінеровим процесом. Крім того, $|h_x(t)| \le x|\sigma(t)|$, $t \in [0,T]$, а отже $\int_0^T h_x^2(t)\, dt \le x^2 \|\sigma\|^2$ м.н. Тому процес h_x є стохастично інтегровним за Іто, а отже й за Скороходом.

За формулою винесення випадкової сталої з-під стохастичного інтегралу ([7], формула (1.2.12)) маємо

$$\delta(\eta h_x) = \eta \delta(h_x) - (D\eta, h_x)_{L_2[0,T]} \tag{4.5}$$

для довільної простої гладкої величини η, тобто величини, що має вид

$$\eta = F(W(t_1), \dots, W(t_m)), \quad F \in C^1(\mathbb{R}^m), \quad t_1, \dots, t_m \in [0,T], m \ge 1.$$

Зауважимо, що $\delta(h_x)$ має всі моменти в силу умови $\int_0^T h_x^2(t)\, dt \le x^2 \|\sigma\|^2$ м.н. ([10], гл 3, теорема 6). Тому права частина рівності (4.5) є квадратично інтегровною випадковою величиною, якщо $\eta \in \mathbb{D}^{1,p}$ для деякого $p > 2$. Відповідно, стандартні апроксимаційні міркування з використанням замкнености оператора δ забезпечують, що рівність (4.5) справджується для кожного $\eta \in \mathbb{D}^{1,p}$ з деяким $p > 2$. Тому для доведення твердження леми достатньо перевірити, що

$$\left[\int_0^T \sigma(r) h_x(r)\, dr \right]^{-1} \in \mathbb{D}^{1,p}, \quad p \ge 1. \tag{4.6}$$

Використовуючи результат попередньої леми та апроксимаційні аргументи, аналогічні до наведених у її доведенні, неважко пересвідчитись у тому, що $\int_0^T \sigma(r) h_x(r)\, dr \in \mathbb{D}^{1,p}$, $p \ge 1$, і

$$D \left[\int_0^T \sigma(r) h_x(r)\, dr \right] (\cdot) = \int_0^T \sigma(r) D[h_x(r)](\cdot)\, dr = - \int_0^T \sigma^2(r) \mathbb{I}_{h_x(r) \ne 0} \mathbb{I}_{[0,\theta_r]}(\cdot)\, dr,$$

де $\theta_r = \min\{t \in [0,r] : f(t) + Y(t) = \max_{s\in[0,r]}[f(s) + Y(s)]\}$. Оскільки величина $\int_0^T \sigma(r)h_x(r)\,dr$, як показує наведена вище формула, має м.н. обмежену стохастичну похідну, для доведення (4.6) залишилось пересвідчитись у тому, що

$$E\left[\int_0^T \sigma(r)h_x(r)\,dr\right]^{-p} < +\infty, \quad p \geq 1. \tag{4.7}$$

Маємо

$$\sigma(t)h_x(t) = \sigma^2(t)\left(\max_{0\leq s\leq t}[f(s)+Y(s)] - x\right)_- \geq \sigma^2(t)\left(\max_{0\leq s\leq t} f(s) + \max_{0\leq s\leq t} Y(s) - x\right)_- .$$

Виберемо $Q \in (0,T]$ так, щоб $\max_{0\leq s\leq Q} f(s) \leq x/2$; це можна зробити, оскільки $f(0) = 0$ і f неперервна. Тоді

$$\int_0^T \sigma(r)h_x(r)\,dr \geq \int_0^Q \sigma^2(r)\left(\max_{0\leq s\leq r} Y(s) - \frac{x}{2}\right)_- dr.$$

Процес Y має однаковий розподіл з процесом $W(\int_0^t \sigma^2(s)\,ds)$, $t \geq 0$. Тому, зробивши заміну часу $u = \int_0^r \sigma^2(s)\,ds$ і поклавши $U = \int_0^Q \sigma^2(s)\,ds$, маємо для довільного $\varepsilon > 0$

$$P\left(\int_0^T \sigma(r)h_x(r)\,dr < \varepsilon\right) \leq P\left(\int_0^Q \sigma^2(r)\left(\max_{0\leq s\leq r} Y(s) - \frac{x}{2}\right)_- dr < \varepsilon\right) =$$

$$= P\left(\int_0^U \left(\max_{0\leq v\leq u} W(v) - \frac{x}{2}\right)_- du < \varepsilon\right).$$

За умовою, накладеною на σ, $U > 0$. Позначимо $\tau = U \wedge \min\{u : W(u) = \frac{x}{4}\}$. Тоді

$$\int_0^U \left(\max_{0\leq v\leq u} W(v) - \frac{x}{2}\right)_- du \geq \frac{x}{4}\tau,$$

а отже

$$P\left(\int_0^T \sigma(r)h_x(r)\,dr < \varepsilon\right) \leq P\left(\tau < \frac{4\varepsilon}{x}\right).$$

Остання ймовірність, принаймні при малих $\varepsilon > 0$, може бути обчислена явно:

$$P\left(\tau < \frac{4\varepsilon}{x}\right) = P\left(\max_{u\leq(4\varepsilon/x)} W(u) \geq \frac{x}{4}\right) = 2P\left(W(4\varepsilon/x) \geq \frac{x}{4}\right) = 2P\left(W(1) \geq \frac{x^{3/2}}{8\sqrt{\varepsilon}}\right).$$

Тому

$$P\left(\int_0^T \sigma(r)h_x(r)\,dr < \varepsilon\right) = o(\varepsilon^m), \quad \varepsilon \to 0+$$

для кожного $m \geq 1$. Це забезпечує (4.7) і закінчує доведення леми. □

Нехай $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_m$ – деякі випадкові величини, що належать до класу $\mathbb{D}^{1,2}$, $F \in C^1(\mathbb{R}^{m+1})$ – деяка функція, причому всі похідні F є обмеженими. Тоді з леми 4.1 та ланцюгового правила ([7], твердження 1.1.3) випливає, що випадкова величина $F(M_T, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_m)$ належить до класу $\mathbb{D}^{1,2}$ і

$$DF(M_T, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_m) = F_1'(M_T, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_m)DM_T + \sum_{j=1}^m F_{j+1}'(M_T, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_m)D\vartheta_j.$$

Тому формула інтегрування частинами ([7], (1.2.7)) дає рівність

$$EF(M_T, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_m)\delta(g_x) = EF_1'(M_T, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_m)(DM_T, g_x)_{L_2[0,T]} +$$

$$+\sum_{j=1}^{m} EF'_{j+1}(M_T, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_m)(D\vartheta_j, g_x)_{L_2[0,T]}.$$

За побудовою,

$$(DM_T, g_x)_{L_2[0,T]} = \int_0^T h_x(t)\sigma(t)\mathbb{I}_{[0,\theta]}(t)\,dt \left[\int_0^T \sigma(r)h_x(r)\,dr\right]^{-1} =$$

$$= \int_0^\theta h_x(t)\sigma(t)\,dt \left[\int_0^T \sigma(r)h_x(r)\,dr\right]^{-1}.$$

При цьому $h_x(t) = 0$ для всіх $t \geq \tau_x \overset{df}{=} \min\{s : f(s)+Y(s) = x\}$. На множині $\{M_T \geq x\}$, очевидно, виконується нерівність $T \geq \theta \geq \tau_x$. Тому на цій множині

$$(DM_T, g_x)_{L_2[0,T]} = \int_0^{\tau_x} h_x(t)\sigma(t)\,dt \left[\int_0^{\tau_x} \sigma(r)h_x(r)\,dr\right]^{-1} = 1.$$

Підсумовуючи наведені вище міркування, отримуємо такий результат.

Твердження 4.1. *Нехай $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_m$ – деякі випадкові величини, що належать до класу $\mathbb{D}^{1,2}$, $F \in C^1(\mathbb{R}^{m+1})$ – деяка функція, причому всі похідні F є обмеженими і F тотожно рівна нулю поза множиною $[x, +\infty) \times \mathbb{R}^m$. Тоді виконується співвідношення*

$$EF'_1(M_T, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_m)$$
$$= EF(M_T, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_m)\Xi_x + \sum_{j=1}^{m} EF'_{j+1}(M_T, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_m)\Theta_x^j, \tag{4.8}$$

де

$$\Xi_x = \delta(g_x) \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, P), \quad \Theta_x^j = -(D\vartheta_j, g_x)_{L_2[0,T]} \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, P), \quad j = 1, \ldots, m.$$

Наслідок 4.1. *Для довільного $x > 0$ звуження розподілу випадкової величини M_T на $[x, +\infty)$ має неперервну обмежену щільність.*

Доведення. Вибираючи функцію F такою, що залежить лише від першої координати, маємо

$$EF'(M_T) = EF(M_T)\Xi_x, \quad F \in C^1, \sup_y |F'(y)| < \infty, F|_{(-\infty,x)} \equiv 0.$$

Тепер шукане твердження легко отримати за допомогою міркувань, повністю аналогічних до наведених у доведенні твердження 3.1.2 [7]. □

Зауважимо, що результат наслідку можна посилити, і для щільності розподілу p_{M_T} величини M_T має місце інтегральне зображення, подібне до вказаного у твердженні 3.1.2 [7]:

$$p_{M_T}(y) = E\mathbb{I}_{M_T > y}\Xi_x, \quad y \geq x.$$

Істотна відмінність вказаного зображення від результату твердження 3.1.2 [7] полягає у тому, що інтегральний множник Ξ_x залежить від проміжку, на якому наведено зображення. Зазначимо, що до функціоналу M_T твердження 3.1.2 [7] не може бути застосоване, оскільки випадковий елемент $\sigma\mathbb{I}_{[0,\theta]}\left[\int_0^\theta \sigma^2(t)\,dt\right]^{-1}$ не є, взагалі кажучи, стохастично інтегровним. Про останнє свідчить, зокрема, той факт, що у найпростішому випадку $f \equiv 0$, $\sigma \equiv 1$ випадкова величина $M_T = \max_{0 \leq t \leq T} W(t)$ не має неперервної щільності розподілу.

Тепер ми можемо сформулювати і довести головний результат даного розділу.

Теорема 4.1. *Нехай $r \in L_1[0,T]$, $\sigma \in L_2([0,T]$, причому $\int_0^t \sigma^2(s)\,ds > 0$ для кожного $t > 0$.*

Тоді для Європейського бар'єрного опціону купівлі "up-and-out" $C(S,T;H)$ у кожній точці $H \in (S,+\infty)$ існує похідна $\frac{dC}{dH}$.

Більше того, для цієї похідної має місце інтегральне зображення

$$\frac{dC}{dH}(S,T;H) = \frac{1}{H}\exp\left(-\int_0^T r(s)\,ds\right)\times$$

$$\times\left[SE\exp\left[Y(T)+f(T)\right]\mathbb{I}_{Y(T)+f(T)\geq \ln\frac{K}{S}}\mathbb{I}_{M_T<\ln\frac{H}{S}}\left(\int_0^T \sigma(t)g_x(t)\,dt\right)-\right.$$

$$\left.-E\Big(S\exp\left[Y(T)+f(T)\right]-K\Big)_+\mathbb{I}_{M_T<\ln\frac{H}{S}}\delta(g_x)\right], \tag{4.9}$$

де $f(t)=\int_0^t r(s)\,ds$, x – довільне число з проміжку $(0,\ln(H/S))$, а g_x та $\delta(g_x)$ – випадковий процес, наведений перед лемою 4.2, та стохастичний інтеграл Скорохода від нього, відповідно.

Зауважимо, що інтегральне зображення (4.9) для похідної за бар'єром дає можливість чисельного обчислення цієї похідної методом Монте-Карло. У літературі наявний широкий спектр застосувань числення Маллявена та методу Монте-Карло до задач фінансової математики (див., зокрема, [3],[6],[2] та [1]). Відзначимо, що отриманий нами результат виходить за межі застосовності стандартної техніки; головна причина цього полягає у неінтегровності випадкового елемента $\sigma\mathbb{I}_{[0,\theta]}\left[\int_0^\theta \sigma^2(t)\,dt\right]^{-1}$.

Доведення. Позначимо $f(t)=\int_0^t[r(s)-\frac{1}{2}\sigma^2(s)]\,ds$. За мірою P^* процес $S(t)$ однаково розподілений з процесом

$$S\exp\left[f(t)+\int_0^t \sigma^2(s)\,dW(s)\right],\quad t\in[0,T],$$

тому у позначеннях, введених раніше у цьому розділі,

$$C(S,T;H)=\exp\left(-\int_0^T r(s)\,ds\right)E\Big(S\exp\left[Y(T)+f(T)\right]-K\Big)_+\mathbb{I}_{M_T<\ln\frac{H}{S}}=$$

$$=\exp\left(-\int_0^T r(s)\,ds\right)E\Big(S\exp\left[Y(T)+f(T)\right]-K\Big)_+-$$

$$-\exp\left(-\int_0^T r(s)\,ds\right)E\Big(S\exp\left[Y(T)+f(T)\right]-K\Big)_+\mathbb{I}_{M_T\geq\ln\frac{H}{S}}.$$

Перший доданок у останній сумі не залежить від H. Для доведення диференційовності за H другого доданку, розглянемо функцію

$$F(y_1,y_2)=\left(y_1-\ln\frac{H}{S}\right)_+\Big(S\exp y_2-K\Big)_+,\quad y_1,y_2\in\mathbb{R}.$$

Ясно, що $F(y_1,y_2)=0$ при $y_1\leq\ln\frac{H}{S}$, і для довільних $y_1\neq\ln\frac{H}{S}$, $y_2\neq\ln\frac{K}{S}$

$$F_1'(y_1,y_2)=\mathbb{I}_{y_1\geq\ln\frac{H}{S}}\Big(S\exp y_2-K\Big)_+,\quad F_2'(y_1,y_2)=S\exp y_2\mathbb{I}_{y_2\geq\ln\frac{K}{S}}\left(y_1-\ln\frac{H}{S}\right)_+.$$

Функція F не є неперервно диференційовною і до неї не можна прямо застосовувати твердження 4.1. Але цю функцію можна наблизити рівномірно неперервно диференційовними функціями так, щоб відповідні похідні збігались поточково. Тоді, використавши твердження 4.1 з $m=1$, $\vartheta_1=f(T)+Y(T)$ та зробивши граничний перехід, отримаємо рівність

$$E\Big(S\exp\left[Y(T)+f(T)\right]-K\Big)_+\mathbb{I}_{M_T\geq\ln\frac{H}{S}}=$$

$$= E\Big(S\exp\left[Y(T)+f(T)\right]-K\Big)_+\Big(M_T-\ln\frac{H}{S}\Big)_+\delta(g_x)-$$

$$-SE\exp\left[Y(T)+f(T)\right]\mathbb{I}_{Y(T)+f(T)\geq\ln\frac{K}{S}}\left[\int_0^T\sigma(t)g_x(t)\,dt\right]\Big(M_T-\ln\frac{H}{S}\Big)_+. \qquad (4.10)$$

З наслідку 4.1 випливає, що для довільного $z>0$

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(M_T-(z+\Delta z))_+-(M_T-z)_+}{\Delta z}=-\mathbb{I}_{M_T<z} \qquad (4.11)$$

з імовірністю 1. Крім того, функція $z\mapsto(M_T-z)_+$ м.н. є ліпшицевою зі сталою Ліпшиця 1. Тому збіжність (4.11) має місце й у середньому довільного степеня $p\geq 1$. Крім цього, $\delta(g_x)\in L_2(\Omega,\mathcal{F},P)$, а величина $\exp\left[Y(T)+f(T)\right]$ є інтегровною з довільним степенем $p\geq 1$. Це дає можливість продиференціювати рівність (4.10) за параметром H, отримавши шукане зображення (4.9). □

5. Висновки

Ми довели неперервність за параметром серії справедливої ціни бар'єрного опціону купівлі "up-and-out" і довели диференційовність ціни як функції від бар'єру. Для похідної за бар'єром ми побудували інтегральне зображення, що дає можливість чисельного обчислення цієї похідної методом Монте-Карло.

Література

1. E. Benhamou, *Smart Monte Carlo: Various tricks using Malliavin calculus*, Quantitative Finance **2** (2002), no. 5, 329–336.
2. B. Bouchard, I. Ekeland, and N. Touzi, *On the Malliavin approach to Monte Carlo approximation of conditional expectations*, Finance and Stochastics **8** (2004), 45–71.
3. E. Fournié, J.-M. Lasry, P.-L. Lions, J. Lebuchoux, and N. Touzi, *Applications of Malliavin calculus to Monte Carlo methods in finance*, Finance and Stochastics **3** (1999), 391–412.
4. H. Föllmer and A. Schied, *Stochastic Finance: An Introduction in Discrete Time*, Second revised and extended edition, Walter de Gruyter, Berlin, 2004.
5. R. C. Merton, *Theory of rational option pricing*, Bell J. Econom. Manage. Sci. **4** (1973), 141–183.
6. M. Mrad, N. Touzi, and A. Zeghal, *Monte Carlo estimation of a joint density using Malliavin calculus*, Computational Economics **27** (2006), no. 4, 497–531.
7. D. Nualart, *Analysis on Wiener space and anticipating stochastic calculus*, Lecture Notes in Mathematics, Ecole d'Ete de Probabilites de Saint-Flour XXV, vol. 1690, Springer, Berlin, 1998.
8. P. Wilmott, S. Howison, and I. Dewynne, *The Mathematics of Financial Derivatives, a Student Introduction*, Cambridge University Press, 1995.
9. П. Биллингсли, *Сходимость вероятностных мер*, "Наука", Москва, 1977.
10. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения*, "Наукова думка", Киев, 1982.
11. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Теория случайных процессов*, т. 1, "Наука", Москва, 1971.
12. О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параметрического типа*, "Наука", Москва:, 1967.

Інститут математики НАН України, вул. Терещенківська, 3, Київ 01601, Україна
Адреса електронної пошти: kulik@imath.kiev.ua

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Національний університет імені Тараса Шевченка, проспект Глушкова, 6, Київ 03127, Україна
Адреса електронної пошти: myus@univ.kiev.ua

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Національний університет імені Тараса Шевченка, проспект Глушкова, 6, Київ 03127, Україна
Адреса електронної пошти: osoloveyko@univ.kiev.ua

Надійшла 01/09/2009