Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 81, 2009, стор. 114–127

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 81, 2009, pp. 114–127

ФУНКЦІОНАЛЬНІ ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ ДЛЯ СТОХАСТИЧНИХ ІНТЕГРАЛІВ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМИ ДО ПРОЦЕСІВ РИЗИКУ ТА ДО КАПІТАЛІВ САМОФІНАНСОВАНИХ СТРАТЕГІЙ НА БАГАТОВИМІРНОМУ РИНКУ. I

УДК 519.21

Ю. С. МІШУРА, Г. М. ШЕВЧЕНКО І Ю. В. ЮХНОВСЬКИЙ

Анотація. У роботі досліджуються достатні умови, які забезпечують слабку збіжність стохастичних інтегралів по процесах обмеженої варіації, мартингалах та семімартингалах. Семімартингальну теорему розповсюджено на багатовимірний випадок. Граничний перехід відносно процесів обмеженої варіації застосовано до процесів ризику. Розв'язано "обернену" задачу слабкої збіжності.

Abstract. Conditions, which provide weak convergence of stochastic integrals with respect to processes of bounded variation, martingales and semimartingales are considered. Example of application of results are given. Semimartingale convergence theorem is generalized to d-dimensional case. Limit theorem for processes of bounded variation is applied to risk processes. "Inverse" problem of weak convergence is considered.

Аннотация. Изучаются условия, которые обеспечивают слабую сходимость стохастических интегралов по процессам ограниченной вариации, мартингалам и семимартингалам. Семимартингальная функциональная предельная теорема обобщена на многомерный случай. Предельная теорема для процессов ограниченной вариации применена к процессам риска. Рассмотрена "обратная" задача на слабую сходимость.

1. Вступ

У першій частині цієї статті розглянуто умови слабкої збіжності стохастичних інтегралів $\int_0^b \xi_n(t)\,dX_n(t)$ по процесах обмеженої варіації, мартингалах та семімартингалах $\{X_n, n \geq 1\}$. Розглянуто збіжність відповідних ймовірнісних мір в просторі Скорохода $D[0,b]$, $b > 0$. Умовам слабкої збіжності стохастичних інтегралів присвячено велику кількість робіт, детальна бібліографія та найбільш загальні умови містяться у книзі [5] (Розділ IX, 5). Існує ряд відмінностей між умовами, наведеними у даній роботі, та умовами з [5]. Перш за все, у даній роботі передбачено інший характер збіжності послідовності підінтегральних випадкових процесів $\xi_n(t)$, а саме, слабку збіжність їхніх скінченновимірних ймовірнісних розподілів. До того ж, більшість умов з роботи [5], які накладаються на послідовність семімартингалів X_n, пов'язані із триплетом передбачуваних характеристик (B, C, ν). Перевірка таких умов вимагає розв'язання додаткової задачі по знаходженню цих характеристик, що спричиняє певні складнощі.

У даній роботі ми не задаємося метою відшукати канонічний розклад та триплет його передбачуваних характеристик; умови, що накладаються на послідовність семімартингалів X_n, стосуються компонент будь-якого фіксованого розкладу

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60G44, 60F05, 60B12.

Ключові слова і фрази. Стохастичні інтеграли, граничні функціональні теореми, слабка збіжність, семімартингали.

Перші два автори вдячні Комісії Європейських спільнот за підтримку в рамках програми "Marie Curie Actions", грант № PIRSES-GA-2008-230804.

на квадратично-інтегровний мартингал M_n та процес обмеженої варіації B_n. У другому розділі статті наведено умови слабкої збіжності стохастичних інтегралів по процесах обмеженої варіації. Наведено приклад застосування отриманої теореми до процесів ризику. Третій розділ описує умови збіжності стохастичних інтегралів по мартингалах. Питання збіжності стохастичних інтегралів по мартингалах було досліджено, зокрема, у статті [2]. З'ясовано відмінності між вказаними результатами. У четвертому розділі міститься основний результат роботи — умови слабкої збіжності стохастичних інтегралів по семімартингалах в просторі Скорохода. Надано не найбільш загальні умови, а ті, що можуть бути легко застосовані. Застосування теореми з п'ятого розділу до капіталів самофінансованих стратегій буде наведено в II частині цієї роботи.

2. Збіжність інтегралів по випадкових процесах обмеженої варіації

Нехай,

$$(\Omega^n, \mathcal{F}^n, (\mathcal{F}_t^n)_{t\in\mathbf{R}_+}, \mathsf{P}^n)$$

— послідовність стохастичних базисів, $\{\mu_n(t), n \in \mathbf{Z}_+, t \in \mathbf{R}_+\}$ — послідовність процесів, траєкторії яких на кожному обмеженому відрізку $[0, b]$ м.н. мають обмежену варіацію, не мають розривів другого роду і є неперервними справа. Також, нехай $\{\xi_n(t), n \in \mathbf{Z}_+, t \in \mathbf{R}_+\}$ — послідовність процесів, траєкторії яких не мають розривів другого роду і є неперервними справа. Зафіксуємо деяку зліченну та скрізь щільну на $\mathbf{R}_+$ множину T. Позначимо $T_b := T \cap [0, b)$.

Позначимо також L_{T_b} клас всіх послідовностей

$$\alpha_k = \{0 = t_{0k} < t_{1k} < \ldots < t_{k_b k} < b\}$$

скінченних розбиттів відрізка $[0, b)$, що задовольняють наступні умови:

1) $\alpha_k \subseteq \alpha_{k+1} \subseteq T_b$,
2) Для будь-якого $t \in T_b$ існує $k(t)$, таке що $t \in \alpha_k$ для $k > k(t)$.

Будемо казати, що виконується умова (A), якщо для кожного $b > 0$, $n \in \mathbf{Z}_+$, і для будь-якої послідовності $\alpha_k \in L_{T_b}$, $\alpha_k = \{0 = t_{0k} < t_{1k} < \ldots < t_{k_b k} < b\}$ з $t_{k_b k} < b \le t_{k_b+1\, k}$ з ймовірністю 1 існує границя

$$S(\xi_n, \mu_n, 0, b) := \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k_b+1} \xi_n(t_{i-1\, k})(\mu_n(t_{i\, k}) - \mu_n(t_{i-1\, k})). \tag{1}$$

Очевидно, що за виконання умови (A) випадкова величина $S(\xi_n, \mu_n, 0, b)$ дорівнює інтегралу Рімана–Стілтьєса $\int_0^b \xi_n(t)\, d\mu_n(t)$, якщо такий інтеграл існує (див. статтю [8]).

Позначимо

$$\triangle_{ik}x := x(t_{i\,k}) - x(t_{i-1\,k}), \qquad \omega_{i\,k}x = \sup_{t_{i-1\,k}\le s<t\le t_{i\,k}} |x(t) - x(s)|,$$

$$k_t = \sup\{i \colon t_{ik} \le t\}.$$

Символом "$\Rightarrow$" будемо позначати слабку збіжність скінченно-вимірних розподілів. Нагадаємо також поняття збіжності ймовірнісних мір в топології Скорохода.

Позначимо $D[0, b]$ простір функцій на $[0, b]$, які не мають розривів другого роду і є неперервними справа. У цьому просторі задається наступна метрика $d_0(\cdot,\cdot)$: для $x, y \in D[0, b]$

$$d_0(x, y) = \inf_{\lambda\in\Lambda} \left\{ \sup_{0\le t\le b} |x(t) - y(\lambda(t))| + \sup_{0\le s<t\le b} \left| \log \frac{\lambda(t) - \lambda(s)}{t - s} \right| \right\},$$

де Λ — множина строго зростаючих неперервних відображень відрізка $[0, b]$ у самого себе. Добре відомо (див, напр., [3], розділ 3), що метрика $d_0(\cdot,\cdot)$ еквівалентна метриці

Скорохода $d(x,y) = \inf_{\lambda\in\Lambda}\{\sup_{0\le t\le b}|x(t) - y(\lambda(t))| + \sup_{0\le t\le b}|\lambda(t) - t|\}$, яка і задає топологію Скорохода.

Розглянемо тепер сім'ю ймовірнісних мір $(Q^n)_{n\ge 1}$, заданих на просторі

$$(D[0,b], \mathcal{D}),$$

де $\mathcal{D}$ — σ-алгебра всіх борелівських множин, породжених метрикою $d_0(\cdot,\cdot)$. Кажуть, що послідовність мір Q^n слабко збігається до деякої ймовірнісної міри Q на $(D[0,b],\mathcal{D})$, якщо для будь-якої обмеженої та неперервної в топології, породженій метрикою Скорохода, дійсної функції $f = f(x)$, $x \in [0,b]$, має місце рівність

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,b]} f(x)\,dQ^n = \int_{[0,b]} f(x)\,dQ.$$

Позначимо символом "$\overset{D[0,b]}{\to}$" вищеописану збіжність імовірнісних мір в топології Скорохода на відрізку $[0,b]$.

Введемо також наступні позначення:

$$\triangle_D(x(\cdot),\delta,b) := \sup_{0\le t<t'<t''<t+\delta\le b}(|x(t'') - x(t')| \wedge |x(t') - x(t)|),$$

$\mathcal{T}_b(\mathcal{F}^n) = \{0 \le \tau \le b, \tau - \mathcal{F}.^n\text{-момент зупинки}\}$.

Теорема 1. *1. Нехай виконується умова (A), а також наступні умови*

(A$_1$) 1) $(\xi_n(t),\mu_n(t))$, $t\in T_b \Rightarrow (\xi_0(t),\mu_0(t))$, $t \in T_b$, *для будь-якого* $b>0$ *при* $n\to\infty$,
2) $\lim_{k\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\mathsf{P}^n\{\sum_{i=1}^{k_b+1}\omega_{i\,k}\xi_n\,\omega_{i\,k}\mu_n > \alpha\} = 0$, *для будь-яких* $b>0$ *та* $\alpha>0$.

Тоді $S(\xi_n,\mu_n,0,b) \Rightarrow S(\xi_0,\mu_0,0,b)$ *для будь-якого* $b>0$.

2. Нехай додатково виконуються умови:

(A$_2$) 1) $\lim_{C\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\mathsf{P}^n\{\sup_{0\le t\le b}|\xi_n(t)|\ge C\} = 0$ *для будь-якого* $b>0$,
2) $\lim_{\delta\to0}\limsup_{n\to\infty}\mathsf{P}^n\{\triangle_D(|\mu_n|(\cdot),\delta,b)>\alpha\} = 0$ *для будь-якого* $\alpha>0$, $b>0$;

або

(A$_3$) 1) $\xi_n(t)$ *та* $\mu_n(t)$ *є* $\mathcal{F}_t^n$*-вимірними*, $t\in\mathbf{R}_+$,
2)

$$\lim_{\delta\to0}\limsup_{n\to\infty}\sup_{\tau\in\mathcal{T}_b(\mathcal{F}^n)}\mathsf{P}^n\left\{\sup_{0\le t\le\delta}\sum_{i=k_\tau}^{k_{\tau+t}+1}|\xi_n(t_{i-1k})||\Delta_{i\,k}\mu_n|>\alpha\right\} = 0$$

для будь-яких $\alpha>0$, $b>0$.

Тоді для будь-якого $b>0$

$$S(\xi_n,\mu_n,0,\cdot)\overset{D[0,b]}{\to}S(\xi_0,\mu_0,0,\cdot),\qquad n\to\infty.$$

Доведення. 1. Розглянемо послідовність випадкових величин $S_{T,n,k} = \sum_{i=1}^{k_b+1}\xi_n(t_{ik})\Delta_{ik}\mu_n$. Зауважимо, що за виконання умови (A)

$$S_{T,0,k}\to\int_0^b\xi_0\,d\mu_0\quad\text{м.н.}$$

З іншого боку, з виконання умови (A$_1$) випливає, що

$$S_{T,n,k}\Rightarrow S_{T,0,k}, \tag{2}$$

при $n\to\infty$ для будь-якого k.

Позначимо

$$S^+(\alpha_k, \xi_n, \mu_n) = \sum_{i=1}^{k_b+1} \sup_{t_{i-1\,k} \le t < t_{i\,k}} \xi_n(t)(\mu_n(t_{i\,k}) - \mu_n(t_{i-1\,k})),$$

$$S^-(\alpha_k, \xi_n, \mu_n) = \sum_{i=1}^{k_b+1} \inf_{t_{i-1\,k} \le t < t_{i\,k}} \xi_n(t)(\mu_n(t_{i\,k}) - \mu_n(t_{i-1\,k})).$$

За означенням, $-\infty < S^-(\alpha_k, \xi_n, \mu_n) \le S^+(\alpha_k, \xi_n, \mu_n) < \infty$ P-м.н., і для будь-якої послідовності розбиттів $\alpha_k \in L_{T_b}$ суми $S^+(\alpha_k, \xi_n, \mu_n)$ $(S^-(\alpha_k, \xi_n, \mu_n))$ не зростають (не спадають) по відношенню до k. Таким чином, м.н. існують скінченні границі:

$$S_T^{\pm}(\xi_n, \mu_n) = \lim_{k\to\infty} S^{\pm}(\alpha_k, \xi_n, \mu_n).$$

Очевидно, що

$$\begin{aligned} S^+(\alpha_k, \xi_n, \mu_n) &\ge S_{T,n,k}, \\ S^-(\alpha_k, \xi_n, \mu_n) &\le S_{T,n,k}. \end{aligned} \tag{3}$$

Застосувавши умову (A_1) 2), ми отримаємо з (2) та (3) наступне:

$$\lim_{k\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} \mathsf{P}^n\{|S_T^{\pm}(\xi_n, \mu_n) - S_{T,n,k}| > \alpha\}$$

$$\le \lim_{k\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} \mathsf{P}^n\{S^+(\alpha_k, \xi_n, \mu_n) - S^-(\alpha_k, \xi_n, \mu_n) > \alpha\} \tag{4}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}^n \left\{ \sum_{i=1}^{k_b+1} \omega_{i\,k} \xi_n \omega_{i\,k} \mu_n > \alpha \right\} = 0. \tag{5}$$

Доведення 1 частини теореми випливає з (2) — (5) (див. Теорему 4.2 з [3]).

2. Нехай виконується умова (A_2). Тоді доведення випливає з очевидної оцінки

$$\triangle_D(S(\xi_n, \mu_n, 0, \cdot), \delta, b) \le \sup_{0\le t\le b} |\xi_n(t)| \cdot \triangle_D(|\mu_n|(\cdot), \delta, b)$$

та слабкої збіжності скінченно-вимірних розподілів $S(\xi_n, \mu_n, 0, \cdot)$.

Нехай виконується умова (A_3). Тоді з теореми 1 ([1], частина 2, розділ 6, §3) випливає, що послідовність $S(\xi_n, \mu_n, 0, \cdot)$ відносно компактна в топології Скорохода. Із слабкої збіжності скінченно-вимірних розподілів послідовності стохастичних інтегралів отримаємо їх збіжність в топології Скорохода. □

Зауваження 1. Зауважимо, що в теоремі 1 μ_0 може бути будь-яким процесом (можливо, необмеженої варіації), таким що границя $S(\xi_0, \mu_0, 0, b)$ з (1) існує м.н. для будь-якого $b > 0$.

Наведемо приклад застосування теореми 1.

Приклад 1. Нехай послідовність процесів прибутку $U_n(t)$, $n \ge 0$, страхової компанії визначається на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ та має вигляд

$$U_n(t, \omega) := \pi_n(t) - \sum_{k=1}^{N_n(t,\omega)} X_k^{(n)}(\omega),$$

де π_n — це послідовність процесів з неперервними та неспадними траєкторіями; ці процеси можна трактувати як процеси надходження страхових премій; $\{X_k^{(n)}, k \ge 1\}$ для будь-яких $n > 0$ — послідовність н.о.р.в.в. з функціями розподілу F_n; $N_n(t, \omega)$ — послідовність точкових процесів, з траєкторіями без розривів другого роду, неперервними справа, $N_n(0, \omega) = 0$. Процеси $\sum_{k=1}^{N_n(t,\omega)} X_k^{(n)}(\omega)$ можна трактувати як послідовність страхових виплат. Позначимо $0 < T_1^n(\omega) < T_2^n(\omega) < \ldots$ — послідовність стрибків N_n, $\triangle N_n(T_k^n) = 1$. Процес резервування капіталу за допомогою акумулятора φ_n визначається наступним чином [4]:

$$R_n(t) := \varphi_n(t)u + \int_0^t \varphi_n(t-s)\,dU_n(s)$$
$$= \varphi_n(t)u + \int_0^t \varphi_n(t-s)\,d\pi_n(s) - \sum_{k=1}^{N_n(t)} \varphi_n(t - T_k^n)X_k^n(\omega),$$

де $u > 0$ — початковий рівень резервування, $\varphi_n\colon \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ — деяка невипадкова неперервна неспадна функція (як правило $\varphi_n(t) = \exp\{\delta t\}$, $\delta > 0$). Наступний результат є прямим наслідком теореми 1 та теореми 4 з [4].

Зафіксуємо деяке $b > 0$ та позначимо $X_n(t) := B_n^{-1}\big(\sum_{k=1}^{[\alpha_n t]} X_k^{(n)} - A_n(t)\big)$, де $\alpha_n \uparrow \infty$, $B_n \uparrow \infty$, $n \to \infty$, де $A_n(t)$ — невипадкова неспадна функція.

Теорема 2. *Нехай виконуються наступні умови*

1) $\varphi_n(t) \to \varphi_0(t)$, $n \to \infty$ *поточково;*
2) $(\pi_n(t), X_n(t), N_n(t)/\alpha_n)$, $t \in T_b \Rightarrow (\pi_0, X_0(t), N_0(t))$, $t \in T_b$;
3) $S(\varphi_0(b - \cdot), X_0(\cdot), 0, b)$ *існує;*
4) $\lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mathsf{P}\big\{\sum_{i=1}^{N_n(b)} \Delta_{l_i^n k}\varphi_n(b - \cdot)|X_i^n| > \alpha\big\} = 0$, $\alpha > 0$, *де* l_i^n *визначається таким чином, що* $t_{l_i^n - 1k} \le T_i^n < t_{l_i^n k}$;
5) $\lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mathsf{P}\big\{\sum_{i=1}^{k} \triangle_{i\,k}\varphi_n(b - \cdot)\triangle_{i\,k}\pi_n > \alpha\big\} = 0$,

Тоді має місце слабка збіжність послідовності процесів резервування капіталу $R_n(b) \Rightarrow \varphi_0(b)u + \int_0^b \varphi_0(b-s)\,d\pi_0(s) - \int_0^b \varphi_0(b-s)\,dY_0(s)$, *де граничний процес має вигляд* $Y_0(t) := X_0(N_0(t))$, $t \in [0, b]$.

3. Збіжність стохастичних інтегралів по мартингалах

Нехай, як і в розділі 2, $(\Omega^n, \mathcal{F}^n, (\mathcal{F}_t^n)_{t\in R_+}, \mathsf{P}^n)$ — послідовність стохастичних базисів, $\{M_n(t), \mathcal{F}_t^n, t \in \mathbf{R}_+, n \ge 0\}$ — послідовність квадратично інтегровних мартингалів, траєкторії яких не мають розривів другого роду та є неперервними справа. Нехай $\mu_n(t) := \langle M_n\rangle(t)$ - квадратичні характеристики вищеописаних мартингалів, і ми розглядаємо їхні модифікації, траєкторії яких не мають розривів другого роду, є неперервними справа та неспадними. Також, нехай $\{\xi_n(t), \mathcal{F}_t^n, t \in \mathbf{R}_+, n \ge 0\}$ — послідовність $\mathcal{F}_\cdot^n$-передбачуваних процесів.

Теорема 3. *Нехай виконуються наступні умови*

(A$_5$) 1) $(\xi_n(t), M_n(t), \mu_n(t)), t \in T_b \Rightarrow (\xi_0(t), M_0(t), \mu_0(t))$, $t \in T_b$, *для будь-якого* $b > 0$;
2) $\sup_{n\ge 0} \mathsf{E}^n \int_0^t \xi_n^2(s)\,d\mu_n(s) < \infty$, $t \in \mathbf{R}_+$;
3) $\lim_{c\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mathsf{P}^n\{\sup_{0\le t\le b} |\xi_n(t)| \ge c\} = 0$ *для будь-якого* $b > 0$;
4) $\lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mathsf{E}^n \sum_{i=1}^{k_b+1} \omega_{i\,k}\xi_n\ \omega_{i\,k}\mu_n = 0$ *для будь-якого* $b > 0$;
5) $\lim_{\delta\to 0} \limsup_{n\to\infty} \sup_{\sigma\in\mathcal{T}_b(\mathcal{F}^n)} \mathsf{E}^n(\mu_n(\sigma + \delta) - \mu_n(\sigma)) = 0$.

Тоді для будь-якого $b > 0$ *слабко збігається як послідовність стохастичних інтегралів*

$$\int_0^{\cdot} \xi_n(t)\,dM_n(t) \overset{D[0,b]}{\to} \int_0^{\cdot} \xi_0\,dM_0(t), \qquad n \to \infty,$$

так і послідовність їхніх квадратичних характеристик

$$\int_0^{\cdot} \xi_n^2(t)\,d\mu_n(t) \overset{D[0,b]}{\to} \int_0^{\cdot} \xi_0^2\,d\mu_0(t), \qquad n \to \infty.$$

Доведення. З умов (A_5), 1) та 4) та теореми 1 випливає збіжність скінченно-вимірних розподілів:

$$\left(\int_0^t \xi_n^2(u)\,d\mu_n(u), t \in T_b\right) \Rightarrow \left(\int_0^t \xi_0^2(u)\,d\mu_0(u), t \in T_b\right), \qquad n \to \infty. \tag{6}$$

Далі з (A_5), 1) випливає, що

$$\sum_{i=1}^{k} \xi_n(t_{i-1\,k})\triangle_{i\,k}M_n \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} \xi_0(t_{i-1\,k})\triangle_{i\,k}M_0, \qquad n \to \infty, \tag{7}$$

а з (A_5), 2) випливає, зокрема, що для кожного $n \geq 0$

$$\sum_{i=1}^{k} \xi_n(t_{i-1\,k})\Delta_{i\,k}M_n \to \int_0^b \xi_n(s)dM_n(s), \qquad k \to \infty \quad \text{за ймовірністю;} \tag{8}$$

далі, для будь-якого $\alpha > 0$

$$\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty}\limsup_{n\to\infty} \mathsf{P}^n\left\{\left|\sum_{i=1}^{k}\xi_n(t_{i-1\,k})\Delta_{i\,k}M_n - \int_0^b \xi_n(s)\,dM_n(s)\right| > \alpha\right\} \\
&\quad= \lim_{k\to\infty}\limsup_{n\to\infty} \mathsf{P}^n\left\{\left|\int_0^b \varphi_n(s)\,dM_n(s)\right| > \alpha\right\} \\
&\quad\leq \lim_{C\to\infty}\limsup_{n\to\infty} \mathsf{P}^n\left\{\sup_{0\leq t\leq b}|\xi_n(t)| \geq C\right\} \\
&\qquad+ \alpha^{-2}\lim_{C\to\infty}\lim_{k\to\infty}\limsup_{n\to\infty} \mathsf{E}^n \int_0^b \left(\varphi_n^C(s)\right)^2\,d\mu_n(s) \\
&\quad\leq \alpha^{-2}\lim_{C\to\infty}\left(C\lim_{k\to\infty}\limsup_{n\to\infty} \mathsf{E}^n \sum_{i=1}^{k_b+1} \omega_{i\,k}\xi_n\ \omega_{i\,k}\mu_n\right) = 0,
\end{aligned} \tag{9}$$

де $\varphi_n(s) := \xi_n(s) - \xi_n(t_{i-1k})$, $\varphi_n^C(s) := \xi_n(s) \wedge C - \xi_n(t_{i-1k}) \wedge C$, $s \in \triangle_{ik}$.

З (7)–(9) та Теореми 4.2 [3] випливає слабка збіжність скінченно-вимірних розподілів:

$$\int_0^b \xi_n(t)\,dM_n(t) \Rightarrow \int_0^b \xi_0\,dM_0(t), \qquad n \to \infty. \tag{10}$$

Крім того, для будь-якого $\delta > 0$ з умови (A_5), 2) випливає співвідношення

$$\begin{aligned}
&\lim_{C\to\infty}\limsup_{n\to\infty} \mathsf{P}^n\left(\sup_{t\leq\delta}\left|\int_0^t \xi_n(u)\,dM_n(u)\right| \geq C\right) \\
&\quad\leq \lim_{C\to\infty}\frac{1}{C^2}\limsup_{n\to\infty} \mathsf{E}^n\left(\sup_{t\leq\delta}\left|\int_0^t \xi_n(u)\,dM_n(u)\right|^2\right) \\
&\quad\leq \lim_{C\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\frac{C_1}{C^2}\,\mathsf{E}^n\int_0^\delta \xi_n^2(u)\,d\mu_n(u) = 0.
\end{aligned} \tag{11}$$

Тепер розглянемо випадковий процес

$$Z_n^\sigma(t, C) = \int_0^{t+\sigma} \xi_n^C(u)\,dM_n(u) - \int_0^\sigma \xi_n^C(u)\,dM_n(u),$$

де $t \geq 0$, $\sigma \in \mathcal{T}_b(\mathcal{F}^n)$, $\xi_n^C(u) = \xi_n(u) \wedge C$. Він є мартингалом відносно потоку σ-алгебр $\mathcal{F}^n_{t+\sigma}$, $t \in \mathbf{R}_+$. Тоді з (A_5), 3) і 5) та нерівності Буркхолдера випливає наступне:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\delta\to 0} \limsup_{n\to\infty} \sup_{\sigma\in\mathcal{T}_b(\mathcal{F}^n)} \mathsf{P}^n \left(\sup_{t\leq\delta} \left| \int_0^{t+\sigma} \xi_n(u)\, dM_n(u) - \int_0^{\sigma} \xi_n(u)\, dM_n(u) \right| \geq \eta \right) \\
&\quad \leq \lim_{C\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mathsf{P}^n(|\xi_n(t)| \geq C) + \frac{C_2}{\eta^2} \lim_{\delta\to 0} \limsup_{n\to\infty} \sup_{\sigma\in\mathcal{T}_b(\mathcal{F}^n)} \mathsf{E}^n [Z_n^\sigma(\delta, c)]^2 \qquad (12) \\
&\quad = \frac{C_2}{\eta^2} \lim_{\delta\to 0} \limsup_{n\to\infty} \sup_{\sigma\in\mathcal{T}_b(\mathcal{F}^n)} \mathsf{E}^n (\mu_n(\sigma+\delta) - \mu_n(\sigma)) = 0.
\end{aligned}
$$

Цілком аналогічно до (12) можна довести, що

$$
\lim_{C\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mathsf{P}^n \left(\sup_{t\leq\delta} \left| \int_0^t \xi_n^2(u)\, d\mu_n(u) \right| \geq C \right) = 0, \tag{13}
$$

та

$$
\lim_{\delta\to 0} \limsup_{n\to\infty} \sup_{\sigma\in\mathcal{T}_b(\mathcal{F}^n)} \mathsf{P}^n \left(\sup_{t\leq\delta} \left| \int_0^{t+\sigma} \xi_n^2(u)\, d\mu_n(u) - \int_0^{\sigma} \xi_n^2(u)\, d\mu_n(u) \right| \geq \eta \right) = 0, \quad \eta > 0. \tag{14}
$$

З (11)–(10) та теореми 1 ([1], частина 2, розділ 6, §3) випливає, що послідовності $\int_0^{\cdot} \xi_n(t)\, dM_n(t)$ та $\int_0^{\cdot} \xi_n^2(t)\, d\mu_n(t)$ відносно компактні в топології Скорохода. Із слабкої збіжності скінченно-вимірних розподілів (співвідношення (7) та (14)) випливає збіжність цих послідовностей в топології Скорохода. □

Зауваження 2. Очевидно, замість умови (A_5), 2) можна було б вимагати виконання наступної умови:

$$
\mathsf{E}^n \int_0^t \xi_n^2(s)\, d\mu_n(s) < \infty, \quad t \in \mathbf{R}_+, \qquad \lim_{C\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mathsf{P}^n(\mu_n(t) \geq C) = 0, \quad t > 0.
$$

Зауваження 3. Як було написано вище, умови збіжності стохастичних інтегралів по мартингалах було досліджено у роботі [2]. Основні розбіжності в умовах статті [2] та умовах теореми 2:

1) У теоремі 3 не вимагається неперервність мартингалів M_n, а у відповідній теоремі з [2] це є однією з умов.
2) Відповідною до умови (A_5), 4) умовою в теоремі з [2] є

$$
\lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mathsf{E}^n \sum_{i=1}^{k_b+1} \int_{t_{i-1\,k}}^{t_{i\,k}} \triangle_{i\,k}\xi_n(t)\, d\mu_n(t) = 0
$$

для будь-якого $b > 0$.

4. Збіжність стохастичних інтегралів по семімартингалах в термінах канонічного розкладу

Нехай тепер $(\Omega^n, \mathcal{F}^n, (\mathcal{F}_t^n)_{t\in\mathbf{R}_+}, \mathsf{P}^n)$ — послідовність стохастичних базисів,

$$
\{X_n(t), \mathcal{F}_t^n, t \in \mathbf{R}_+, n \in \mathbf{Z}_+\}
$$

– послідовність семімартингалів із наступним розкладом

$$
X_n(t) = X_n^0 + M_n(t) + B_n(t), \tag{15}
$$

де $\{M_n(t), \mathcal{F}_t^n, t \in \mathbf{R}_+, n \in \mathbf{Z}_+\}$ – послідовність квадратично інтегровних мартингалів, траєкторії яких не мають розривів другого роду та є неперервними справа; $\{B_n(t), t \in \mathbf{R}_+, n \in \mathbf{Z}_+\}$ — послідовність процесів обмеженої варіації, траєкторії яких не мають розривів другого роду і є неперервними справа. Позначимо $\Delta Y(t) = Y(t) - Y(t-0)$ стрибок у точці t процесу Y з такими траєкторіями.

Нехай $\mu_n(t) := \langle M_n \rangle(t)$ — квадратичні характеристики відповідних мартингалів. Розглянемо також $\{\xi_n(t), \mathcal{F}_t^n, t \in \mathbf{R}_+, n \geq 0\}$ — послідовність $\mathcal{F}_\cdot^n$-передбачуваних процесів, які задовольняють наступні умови

$$\mathsf{E}^n \int_0^b \xi_n^2(t)\, d\mu_n(t) < \infty, \qquad \left| \int_0^b \xi_n(t)\, dB_n(t) \right| < \infty \quad \mathsf{P}^n\text{-м.н.}, \quad b \in \mathbf{R}_+,\ n \in \mathbf{Z}_+;$$

інтеграл $\int_0^b \xi_n(t)\, dB_n(t)$ розуміємо як інтеграл Рімана–Стілтьєса.

Визначимо $\int_0^t \xi_n(s)\, dX_n(s) := \int_0^t \xi_n(s)\, dM_n(s) + \int_0^t \xi_n(s)\, dB_n(s)$. Зауважимо, що це означення коректне, тому що права частина є інваріантною відносно всіх таких розкладів.

Далі будемо використовувати як поняття щільності послідовності випадкових процесів, яка означає щільність послідовності відповідних ймовірнісних мір, так і поняття C-щільності.

Означення 1. Послідовність процесів X_n називається C-щільною, якщо вона щільна, і будь-яка гранична точка послідовності відповідних розподілів є розподілом неперервного процесу.

Теорема 4. *Нехай* $\{X_n(t), \mathcal{F}_t^n, t \in \mathbf{R}_+, n \in \mathbf{Z}_+\}$ *— послідовність семімартингалів із розкладом* (15) *та виконуються наступні умови:*

1) $(\xi_n(t), M_n(t), B_n(t), \mu_n(t))$, $t \in T_b$, $\Rightarrow$ $(\xi_0(t), M_0(t), B_0(t), \mu_0(t))$, $t \in T_b$, *для будь-якого* $b > 0$;
2) $\sup_{n \geq 0} \mathsf{E}^n \int_0^t \xi_n^2(s)\, d\mu_n(s) < \infty$, $t \in \mathbf{R}_+$;
3) $\lim_{C \to \infty} \limsup_{n \to \infty} \mathsf{P}^n\{\sup_{0 \leq t \leq b} |\xi_n(t)| \geq C\} = 0$ *для будь-якого* $b > 0$;
4) $\lim_{k \to \infty} \limsup_{n \to \infty} \mathsf{E}^n \sum_{i=1}^{k_b+1} \omega_{i\,k}\xi_n\ \omega_{i\,k} B_n = 0$ *для будь-якого* $b > 0$;
5) $\lim_{\delta \to 0} \limsup_{n \to \infty} \mathsf{P}^n\{\triangle_D(|B_n|(\cdot), \delta, b) > \alpha\} = 0$ *для будь-яких* $\alpha > 0$, $b > 0$;
6) $\lim_{k \to \infty} \limsup_{n \to \infty} \mathsf{E}^n \sum_{i=1}^{k_b+1} \omega_{i\,k}\xi_n\ \omega_{i\,k} \mu_n = 0$ *для будь-якого* $b > 0$.
7) $\lim_{\delta \to 0} \limsup_{n \to \infty} \sup_{\sigma \in \mathcal{T}_b(\mathcal{F}^n)} \mathsf{E}^n(\mu_n(\sigma + \delta) - \mu_n(\sigma)) = 0$;
8) $\limsup_{n \to \infty} \mathsf{P}^n\{\sup_{t \in [0,b]} |\Delta B_n(t)| > \alpha\} = 0$ *для будь-яких* $\alpha > 0$, $b > 0$.

Тоді сім'я стохастичних інтегралів $\int_0^\cdot \xi_n(t)\, dX_n(t)$ *слабко збігається:*

$$\int_0^\cdot \xi_n(t)\, dX_n(t) \overset{D[0,b]}{\to} \int_0^\cdot \xi_0\, dX_0(t), \qquad n \to \infty.$$

Доведення. Спочатку доведемо збіжність скінченно-вимірних розподілів аналогічно теоремі 1 та теоремі 2. З умови 1) випливає, що

$$\sum_{i=1}^k \xi_n(t_{i-1\,k}) \triangle_{i\,k} M_n + \sum_{i=1}^k \xi_n(t_{i-1\,k}) \triangle_{i\,k} B_n$$
$$\Rightarrow \sum_{i=1}^k \xi_0(t_{i-1\,k}) \triangle_{i\,k} M_0 + \sum_{i=1}^k \xi_0(t_{i-1\,k}) \triangle_{i\,k} B_0, \qquad n \to \infty. \tag{16}$$

Маємо наступну збіжність

$$\sum_{i=1}^{k}\xi_n(t_{i-1\,k})\Delta_{i\,k}M_n+\sum_{i=1}^{k}\xi_n(t_{i-1\,k})\Delta_{i\,k}B_n$$
$$\to\int_0^b\xi_n(s)\,dM_n(s)+\int_0^b\xi_n(s)\,dB_n(s),\qquad k\to\infty\quad\text{за ймовірністю},\tag{17}$$

де збіжність інтегральних сум за M_n випливає з умови 2), а за B_n — з означення інтеграла Рімана–Стілтьєса.

Далі, для будь-якого $\alpha>0$ із співвідношень (5), (9) та умов 4) та 6) маємо

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\mathsf{P}^n\Bigg\{\bigg|\sum_{i=1}^{k}\xi_n(t_{i-1\,k})\Delta_{i\,k}M_n&+\sum_{i=1}^{k}\xi_n(t_{i-1\,k})\Delta_{i\,k}B_n\\&-\int_0^b\xi_n(s)\,dM_n(s)-\int_0^b\xi_n(s)\,dB_n(s)\bigg|>\alpha\Bigg\}\\\le\lim_{k\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\mathsf{P}^n&\left\{\left|\sum_{i=1}^{k}\xi_n(t_{i-1\,k})\Delta_{i\,k}M_n-\int_0^b\xi_n(s)\,dM_n(s)\right|>\frac{\alpha}{2}\right\}\\+\lim_{k\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\mathsf{P}^n&\left\{\left|\sum_{i=1}^{k}\xi_n(t_{i-1\,k})\Delta_{i\,k}B_n-\int_0^b\xi_n(s)\,dB_n(s)\right|>\frac{\alpha}{2}\right\}=0.\end{aligned}\tag{18}$$

З (16)–(18) та Теореми 4.2 [3] випливає слабка збіжність скінченно-вимірних розподілів:

$$\int_0^t\xi_n(s)\,dX_n(s)=\int_0^t\xi_n(s)\,dB_n(s)+\int_0^t\xi_n(s)\,dM_n(s)$$
$$\Rightarrow\int_0^t\xi_0(s)\,dB_0(s)+\int_0^t\xi_0(s)\,dM_0(s)=\int_0^t\xi_0(s)\,dX_0(s),\qquad n\to\infty.\tag{19}$$

З умов 5) та 7) випливає, що послідовності $\int_0^t\xi_n(s)\,dB_n(s)$ та $\int_0^t\xi_n(s)\,dM_n(s)$ — щільні, що доведено у теоремах 1 та 2, відповідно.

З умов 3) та 8) випливає, що для будь-яких $\alpha>0$ та $b>0$

$$\limsup_{n\to\infty}\mathsf{P}^n\left\{\sup_{t\in[0,b]}\left|\Delta\int_0^t\xi_n(s)\,dB_n(s)\right|>\alpha\right\}=0.\tag{20}$$

Зі щільності $\int_0^t\xi_n(s)\,dB_n(s)$ та (20) випливає, що зазначена послідовність інтегралів є C-щільною (див. теорему 3.26, т. 1 [5]).

Зауважимо, що з C-щільності послідовності $\int_0^t\xi_n(s)\,dB_n(s)$ та щільності послідовності $\int_0^t\xi_n(s)\,dM_n(s)$ випливає щільність суми відповідних послідовностей —

$$\int_0^t\xi_n(s)\,dX_n(s)$$

(див. теорему 3.33, т. 1 [5]), звідки і випливає доведення теореми. □

Узагальнимо теорему 4 на багатовимірний випадок. Отже, нехай тепер

$$\{X_n(t),\mathcal{F}_t^n,t\in\mathbb{R}_+\}=\left\{\left(X_n^1(t),X_n^2(t),\dots,X_n^d(t)\right),\mathcal{F}_t^n,t\in\mathbf{R}_+,n\in\mathbf{Z}_+\right\}$$

— послідовність d-вимірних семімартингалів, компоненти яких допускають наступний розклад

$$X_n^j(t)=X_n^j(0)+M_n^j(t)+B_n^j(t),\qquad 1\le j\le d,\tag{21}$$

де $\{M_n^j(t), \mathcal{F}_t^n, t \in \mathbf{R}_+, n \in \mathbf{Z}_+\}$ — послідовність квадратично інтегровних мартингалів, траєкторії яких є неперервними справа та не мають розривів другого роду; $\{B_n^j(t), t \in \mathbf{R}_+, n \in \mathbf{Z}_+\}$ — послідовність процесів обмеженої варіації, траєкторії яких не мають розривів другого роду і є неперервними справа. Нехай $\mu_n^j(t) := \langle M_n^j\rangle(t)$ — квадратичні характеристики відповідних мартингалів. Нехай також

$$\{\xi_n^j(t), \mathcal{F}_t^n, t \in \mathbf{R}_+, n \in \mathbf{Z}_+, 1 \le j \le d\}$$

— послідовність $\mathcal{F}_\cdot^n$-передбачуваних процесів, які задовольняють наступні умови $\mathsf{E}^n \int_0^b (\xi_n^j)^2(t)\, d\mu_n^j(t) < \infty$, $\int_0^b \xi_n^j(t)\, dB_n^j(t) < \infty$ P^n-м.н., $b \in \mathbf{R}_+$, $n \in \mathbf{Z}_+$, $1 \le j \le d$.

Позначимо $\int_0^t (\xi_n(t), dX_n(t)) := \sum_{j=1}^d \int_0^t \xi_n^j(t)\, dX_n^j(t)$.

Теорема 5. *Нехай $\{X_n(t), \mathcal{F}_t^n, t \in \mathbf{R}_+, n \in \mathbf{Z}_+\}$ — послідовність семімартингалів із розкладом (21) та виконуються наступні умови:*

1) *для будь-якого $b > 0$*

$$(\xi_n(t), M_n(t), B_n(t), \mu_n(t)),\ t \in T_b \quad \Rightarrow \quad (\xi_0(t), M_0(t), B_n(0), \mu_0(t)),\ t \in T_b;$$

для всіх $1 \le j \le d$

2) $\sup_{n\ge 0} \mathsf{E}^n \int_0^t (\xi_n^j)^2(s)\, d\mu_n^j(s) < \infty$, $t \in \mathbf{R}_+$;
3) $\lim_{c\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mathsf{P}^n\{\sup_{0\le t\le b} |\xi_n^j(t)| \ge c\} = 0$ *для будь-якого* $b > 0$;
4) $\lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mathsf{E}^n \sum_{i=1}^{k_b+1} \omega_{i\,k}\xi_n^j \omega_{i\,k} B_n^j = 0$ *для будь-якого* $b > 0$;
5) $\lim_{\delta\to 0} \limsup_{n\to\infty} \mathsf{P}^n\{\triangle_D(|B_n^j|(\cdot), \delta, b) > \alpha\} = 0$ *для будь-якого* $\alpha > 0$, $b > 0$;
6) $\lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mathsf{E}^n \sum_{i=1}^{k_b+1} \omega_{i\,k}\xi_n^j \omega_{i\,k}\mu_n^j = 0$ *для будь-якого* $b > 0$;
7) $\lim_{\delta\to 0} \limsup_{n\to\infty} \sup_{\sigma\in\mathcal{T}_b(\mathcal{F}^n)} \mathsf{E}^n(\mu_n^j(\sigma+\delta) - \mu_n^j(\sigma)) = 0$;
8) $\limsup_{n\to\infty} \mathsf{P}^n\{\sup_{t\in[0,b]} |\Delta B_n^j(t)| > \alpha\} = 0$ *для будь-якого* $\alpha > 0$, $b > 0$.

Тоді сім'я стохастичних інтегралів $\int_0^\cdot (\xi_n(s), dX_n(s))$ слабко збігається:

$$\int_0^\cdot (\xi_n(s), dX_n(s)) \overset{D[0,b]}{\to} \int_0^\cdot (\xi_0(s), dX_0(s)), \qquad n \to \infty.$$

Доведення. Доведення проводиться за тією ж схемою, що і доведення Теореми 4. З умови 1) випливає, що

$$\sum_{j=1}^d \sum_{i=1}^k \xi_n^j(t_{i-1\,k}) \triangle_{i\,k} M_n^j + \sum_{j=1}^d \sum_{i=1}^k \xi_n^j(t_{i-1\,k}) \triangle_{i\,k} B_n^j$$
$$\Rightarrow \sum_{j=1}^d \sum_{i=1}^k \xi_0^j(t_{i-1\,k}) \triangle_{i\,k} M_0^j + \sum_{j=1}^d \sum_{i=1}^k \xi_0^j(t_{i-1\,k}) \triangle_{i\,k} B_0^j, \qquad n \to \infty. \tag{22}$$

З умови 2) випливає, зокрема, що для кожного $n \ge 0$

$$\sum_{j=1}^d \sum_{i=1}^k \xi_n^j(t_{i-1\,k}) \Delta_{i\,k} M_n^j + \sum_{j=1}^d \sum_{i=1}^k \xi_n^j(t_{i-1\,k}) \Delta_{i\,k} B_n^j$$
$$\to \int_0^b \sum_{j=1}^d \xi_n^j(s) dM_n^j(s) + \sum_{j=1}^d \int_0^b \xi_n^j(s)\, dB_n^j(s), \qquad k \to \infty \quad \text{за ймовірністю.} \tag{23}$$

Далі, для будь-якого $\alpha > 0$, аналогічно (18) та з умов 4) та 6) маємо

$$
\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mathsf{P}^n \Bigg\{ \Bigg| \sum_{j=1}^{d} \sum_{i=1}^{k} \xi_n^j(t_{i-1\,k}) \Delta_{i\,k} M_n^j + \sum_{j=1}^{d} \sum_{i=1}^{k} \xi_n^j(t_{i-1\,k}) \Delta_{i\,k} B_n^j \\
- \sum_{j=1}^{d} \int_0^b \xi_n^j(s)\, dM_n^j(s) - \sum_{j=1}^{d} \int_0^b \xi_n^j(s)\, dB_n^j(s) \Bigg| > \alpha \Bigg\} \\
\le \sum_{j=1}^{d} \Bigg(\lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mathsf{P}^n \Bigg\{ \Bigg| \sum_{i=1}^{k} \xi_n^j(t_{i-1\,k}) \Delta_{i\,k} M_n^j - \int_0^b \xi_n^j(s)\, dM_n^j(s) \Bigg| > \frac{\alpha}{2d} \Bigg\} \\
+ \lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mathsf{P}^n \Bigg\{ \Bigg| \sum_{i=1}^{k} \xi_n^j(t_{i-1\,k}) \Delta_{i\,k} B_n^j - \int_0^b \xi_n^j(s)\, dB_n^j(s) \Bigg| > \frac{\alpha}{2d} \Bigg\} \Bigg) \\
= 0.
\end{aligned}
\tag{24}
$$

З (22)–(24) та Теореми 4.2 [3] випливає слабка збіжність скінченно-вимірних розподілів:

$$
\begin{aligned}
\int_0^t (\xi_0(s), dX_0(s)) &= \int_0^t (\xi_n(s) dB_n(s)) + \int_0^t (\xi_n(s) dM_n(s)) \\
&= \sum_{j=1}^{d} \int_0^t \xi_n^j(s) dB_n^j(s) + \sum_{j=1}^{d} \int_0^t \xi_n^j(s) dM_n^j(s) \\
\Rightarrow \sum_{j=1}^{d} \int_0^t \xi_0^j(s)\, dB_0^j(s) &+ \sum_{j=1}^{d} \int_0^t \xi_0^j(s)\, dM_0^j(s) \\
= \int_0^t (\xi_0(s), dB_0(s)) &+ \int_0^t (\xi_0(s), dM_0(s)) = \int_0^t (\xi_0(s), dX_0(s)), \\
& n \to \infty.
\end{aligned}
\tag{25}
$$

З умов 5) та 7) випливає, що для всіх $1 \le j \le d$ послідовність $\int_0^t \xi_n^j(s)\, dB_n^j(s)$ — щільна та послідовність $\int_0^t \xi_n^j(s)\, dM_n^j(s)$ — щільна.

Із написаного вище та із умов 7) та 8) аналогічно до попередньої теореми випливає, що для всіх $1 \le j \le d$ послідовності $\int_0^t \xi_n^j(s)\, dB_n^j(s)$ та $\int_0^t \xi_n^j(s)\, dX_n^j(s)$ є C-щільними (див. теорему 3.26, т. 1 [5]).

Далі, з теореми 3.33 (том 1 [5]) випливає C-щільність (а отже і щільність) послідовності $\int_0^t \xi_n(s)\, dX_n(s)$, звідки, в свою чергу, випливає доведення теореми. □

5. Умови робастності підінтегральних функцій в багатовимірному випадку

В цьому розділі наведемо умови на інтегратори та підінтегральні процеси для багатовимірного випадку, що забезпечують слабку збіжність останніх за умови збіжності інтегралів, тобто розв'яжемо, в деякому сенсі, "обернену" задачу на слабку збіжність. Вона виникає у фінансовій математиці, коли потрібно за збіжністю капіталів дослідити граничну поведінку певного класу стратегій. Для одновимірного випадку така задача розв'язана у роботі [6]. У цьому розділі ми будемо розглядати багатовимірний випадок. Детальне застосування отриманих результатів буде описано у другій частині цієї роботи.

Отже, нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — повний імовірнісний простір.

Нехай процес $X(t)$ є квадратично інтегровним семімартингалом, що допускає розклад

$$X^j(t) = B^j(t) + M^j(t), \tag{26}$$

причому для всіх $1 \le j \le d$ M^j — квадратично інтегровний мартингал з квадратичною характеристикою μ^j, B^j — передбачуваний процес інтегровної варіації. Припустимо, що фільтрація $\{\mathcal{F}_t, t \in [0,T]\}$ породжена процесом X.

В якості підінтегральних будемо розглядати такі $\mathcal{F}_t$-передбачувані процеси

$$\xi(t) = (\xi^1(t), \dots, \xi^d(t)) \in \mathbf{R}^d,$$

для яких

$$\mathsf{E}\int_0^T \left(\xi^j(s)\right)^2 d\mu^j(s) < \infty, \qquad \mathsf{E}\left(\int_0^T \left|\xi^j(s)\right| d\left|B^j\right|(s)\right)^2 < \infty, \qquad 1 \le j \le d. \tag{27}$$

Припускатимемо, що процеси X^j лінійно незалежні в тому розумінні, що для будь-якого $\mathcal{F}_t$-передбачуваного процесу $\zeta \in \mathbb{R}^d$ з того, що

$$\sum_{j=1}^d \int_0^t \zeta^j(s)\, dX^j(s) = 0$$

для всіх $t \in [0,T]$ м.н., випливає, що $(\zeta^1(t), \dots, \zeta^d(t)) = 0$ для всіх $t \in [0,T]$ м.н.

Позначимо, як і раніше, $\int_0^t (\xi(s), dX(s)) := \sum_{j=1}^d \int_0^t \xi^j(s)\, dX^j(s)$.

Лема 1. *Нехай випадкові процеси $(\xi(t), X(t))$ задовольняють вищенаведені умови, і для деяких процесів ζ, Y, Z*

$$\left(\xi(t), X(t), \int_0^t (\xi(s), dX(s)), t \in [0,T]\right) \stackrel{d}{=} \left(\zeta(t), Y(t), Z(t), t \in [0,T]\right).$$

Тоді Y є семімартингалом та $Z(t) = \int_0^t (\zeta(s), dY(s))$ для всіх $t \in [0,T]$.

Доведення. Зауважимо, що семімартингалом відносно $\{\mathcal{F}_t, t \in [0,T]\}$ є $\mathcal{F}_t$-узгоджений процес S такий, що для будь-якої послідовності $\{H_n, n \ge 1\}$ простих $\mathcal{F}_t$-передбачуваних процесів, рівномірно збіжних до H за ймовірністю, має місце збіжність інтегралів $\int_0^T H_n(t)\, dS(t) \to \int_0^T H(t)\, dS(t)$ (див. [9]). Тому властивість бути семімартингалом відносно природної фільтрації залежить лише від розподілу процесу. Тому Y є семімартингалом. Далі, якщо процеси ξ, X задовольняють вищевказані умови, тоді інтеграл $\int_0^t (\xi(s), dX(s))$ існує як границя за ймовірністю при подрібненні розбиття $\pi = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t\}$ інтегральних сум

$$S(\pi, \xi, X) = \sum_{k=1}^n \left(\xi(t_{k-1}), X(t_k) - X(t_{k-1})\right).$$

Але сумісний розподіл цих сум та $\int_0^t \xi(s)\, dX(s)$ такий самий, як сумісний розподіл сум $S(\pi, \zeta, Y)$ та $Z(t)$. Тому $S(\pi, \zeta, Y) \xrightarrow{\mathsf{P}} Z(t)$, $|\pi| \to 0$, отже,

$$Z(t) = \int_0^t (\zeta(s), dY(s)). \quad \square$$

Нехай $\{\xi_n(t), n \in \mathbf{Z}_+\} = \{(\xi_n^1(t), \dots, \xi_n^d(t)), n \in \mathbf{Z}_+\}$ — послідовність передбачуваних d-вимірних процесів, що задовольняють умову (27).

Теорема 6. *Нехай X, ξ_n задовольняють вищевказані умови і також*

1) *для всіх* $0 \le t \le T$

$$\int_0^t (\xi_n(s), dX(s)) \xrightarrow{\mathsf{P}} \int_0^t (\xi_0(s), dX(s))$$

при $n \to \infty$;

2) *послідовність мір, що відповідає процесам* $\{\xi_n(\cdot), n \in \mathbf{Z}_+\}$, *слабко передкомпактна в* $D[0,T]$.

Тоді має місце слабка в $D[0,T]$ *збіжність* $\xi_n(\cdot) \to \xi_0(\cdot)$, $n \to \infty$.

Доведення. Достатньо довести, що з будь-якої підпослідовності $\{\xi_n, n \ge 0\}$ можна вибрати підпослідовність, слабко збіжну до ξ_0. Отже, нехай $\{\xi_{n_k}, k \ge 0\}$ — підпослідовність $\{\xi_n, n \ge 0\}$. Зі слабкої передкомпактності випливає, що певна підпослідовність послідовності $\{\xi_{n_k}, k \ge 0\}$ є слабко збіжною. Для спрощення записів ми вважатимемо, що сама послідовність $\{\xi_n, n \ge 0\}$ слабко збіжна в $D[0,T]$.

Більше того, ми будемо вважати, що слабко збіжною є послідовність векторів $\left(\xi_0(\cdot), \int_0^\cdot (\xi_0(s), dX(s)), \xi_n(\cdot), X(\cdot)\right)$ (зі слабкої передкомпактності $\{\xi_n, n \ge 0\}$ випливає слабка передкомпактність цієї послідовності). Позначимо її границю

$$\left(\zeta_0(\cdot), Z(\cdot), \zeta(\cdot), Y(\cdot)\right).$$

З леми 1 маємо $Z(t) = \int_0^t (\zeta_0(s), dY(s))$.

Покажемо тепер, що $\xi_0 \stackrel{d}{=} \zeta$.

Згідно з [7, теорема 2.2] маємо слабку збіжність в $D[0,T]$:

$$\begin{aligned}\left(\xi_0(\cdot), \int_0^\cdot (\xi_0(s), dX(s)), \xi_n(\cdot), X(\cdot), \int_0^\cdot \xi_n(s)\, dX(s)\right)&\\ \Rightarrow \left(\zeta_0(\cdot), \int_0^\cdot (\zeta_0(s), dY(s)), \zeta(\cdot), Y(\cdot), \int_0^\cdot (\zeta(s), dY(s))\right).&\end{aligned} \tag{28}$$

Насправді, у [7] стверджується лише сумісна збіжність трьох останніх компонент — підінтегральних функцій, інтеграторів та інтегралів. Тим не менш, ми можемо стверджувати збіжність розширених векторів: додаткові компоненти можна приєднати до підінтегрального процесу, а інтегратор доповнити нулями, тоді стохастичний інтеграл матиме ту ж величину.

Збіжність за ймовірністю означає, що для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}\left(\left|\int_0^t (\xi_n(s), dX(s)) - \int_0^t (\xi_0(s), dX(s))\right| > \varepsilon\right) \to 0, \qquad n \to \infty.$$

З іншого боку, зі слабкої збіжності (28) випливає

$$\mathsf{P}\left(\left|\int_0^t (\zeta(s), dY(s)) - \int_0^t (\zeta_0(s), dY(s))\right| > \varepsilon\right) = 0.$$

Таким чином, для всіх t маємо

$$\int_0^t (\zeta(s), dY(s)) = \int_0^t (\zeta_0(s), dY(s)).$$

Зауважимо, що умова "лінійної незалежності" процесів X^j формулюється в термінах $\mathcal{F}_t$-передбачуваних процесів, але фільтрація $\{\mathcal{F}_t, t \in [0,t]\}$ породжена процесом X, тому ця умова зберігається при переході до процесу Y з таким самим розподілом. Зокрема, з останньої рівності випливає, що для всіх $t \in [0,T]$ $\zeta(t) = \zeta_0(t)$ м.н. Звідси $\xi_0 \stackrel{d}{=} \zeta$ і отже, завдяки слабкій збіжності $\xi_n \to \zeta$, $n \to \infty$, теорему доведено. □

Зауваження 4. Збіжність за ймовірністю в умові 1) теореми 6 не можна замінити слабкою збіжністю. Дійсно, якщо взяти $d = 1$, $X = B$ — броунівський рух, $\xi_n \equiv -1$, $\xi_0 \equiv 1$, то

$$\left\{\int_0^t \xi_n(t)\,dX(t), t \in [0,T]\right\} \stackrel{d}{=} \left\{\int_0^t \xi_0(t)\,dX(t), t \in [0,T]\right\},$$

але збіжності ξ_n до ξ не можна стверджувати у жодному сенсі.

6. Висновки

У роботі досліджено достатні умови, які забезпечують слабку збіжність стохастичних інтегралів по процесах обмеженої варіації, мартингалах та семімартингалах. Зокрема, доведено збіжність відповідних ймовірнісних мір в просторі Скорохода $D[0,b]$, $b > 0$, для багатовимірного випадку. Умови, які накладаються на інтегратори стосуються компонентів будь-якого фіксованого розкладу, не обов'язково канонічного, на квадратично-інтегровний мартингал та процес обмеженої варіації. Наведено приклад застосування теореми про збіжність стохастичних інтегралів по процесах обмеженої варіації до процесів ризику. Розв'язано також "обернену" задачу на слабку збіжність, яка виникає у фінансовій математиці, коли за збіжністю капіталів потрібно дослідити поведінку певного класу стратегій. Більш детально приклади такого застосування будуть описані в другій частині цієї роботи.

Література

1. Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев, *Теория мартингалов*, "Наука", 1986.
2. Ю. С. Мишура, *Некоторые предельные теоремы для стохастических интегралов по мартингалу и их приложения*, Теория вероятностей и математическая статистика **35** (1978), 104–117.
3. P. Billingsley, *Convergence of Probability Measures*, John Wiley & Sons, 1968.
4. J. Garrido, *Weak convergence of risk processes*, Insurance and Risk Theory, Nato Anvanced Study Institute on Insurance and Risk Theory, 1985, pp. 349–360.
5. J. Jacod and A. N. Shiryaev, *Limit Theorem for Stochastic Processes*, Springer-Verlag, 1987.
6. J. Jacod, S. Meleard, and P. Protter, *Explicit form and robustness of martingale representations*, The Annals of Probability **28** (2000), no. 4, 1747–1780.
7. T. Kurtz and P. Protter, *Weak limit theorems for stochastic integrals and stochastic differential equations*, The Annals of Probability **19** (1991), no. 3, 1035–1070.
8. Yu. S. Mishura and D. S. Silvestrov, *Limit theorems for stochastic Riemann–Stieltjes integrals*, Theory of Stochastic Processes **10 (26)** (2004), no. 1-2, 122–140.
9. P. Protter, *Stochastic Integration and Differential Equations*, 2nd ed., Applications of Mathematics, vol. 21, Springer, Berlin.

01601, Київ, вул. Володимирська, 64, Київський університет імені Тараса Шевченка, механіко-математичний факультет, кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики

Адреса електронної пошти: myus@univ.kiev.ua

01601, Київ, вул. Володимирська, 64, Київський університет імені Тараса Шевченка, механіко-математичний факультет, кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики

Адреса електронної пошти: zhora@univ.kiev.ua

01601, Київ, вул. Володимирська, 64, Київський університет імені Тараса Шевченка, механіко-математичний факультет, кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики

Адреса електронної пошти: Yuhnovskiy@hq.eximb.com

Надійшла 10/07/2009