Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 81, 2009, стор. 128–138

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 81, 2009, pp. 128–138

ГРАНИЧНА ТЕОРЕМА ДЛЯ ПОЛІВ З СИНГУЛЯРНІСТЮ У СПЕКТРІ

УДК 519.21

А. Я. ОЛЕНКО І Б. М. КЛИКАВКА

Анотація. У роботі вивчаються однорідні ізотропні випадкові поля, які мають сингулярність у спектрі не у початку координат. Цей клас полів узагальнює випадок сильної залежності коли поле має сингулярність спектральної щільності у нулі. Отримано граничну теорему для вагових інтегральних функціоналів від поля. Обговорюється різниця з випадком сильної залежності.

1. Вступ

Нехай $\xi(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ – дійсне вимірне неперервне в середньому квадратичному однорідне та ізотропне в широкому розумінні випадкове поле (див. [1], [2]) з нульовим математичним сподіванням і кореляційною функцією

$$\mathbf{B}_n(r) = \mathbf{B}_n(|x|) = \mathsf{E}\,\xi(0)\xi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

де $r = |x| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$.

Відомо (див., наприклад [1], [2]), що існує така обмежена неспадна функція $\mathbf{\Phi}(\lambda)$, $\lambda \geq 0$, яку називають спектральною функцією поля $\xi(x)$, що має місце зображення

$$\mathbf{B}_n(r) = 2^{\frac{n-2}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\int_0^\infty \frac{J_{\frac{n-2}{2}}(r\lambda)}{(r\lambda)^{\frac{n-2}{2}}}\,d\mathbf{\Phi}(\lambda), \tag{1}$$

де $J_\nu(z)$ – функція Бесселя першого роду порядку $\nu > -\frac{1}{2}$.

Якщо існує функція $\varphi(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}^n$, така, що

$$\varphi(\lambda) \in L_1(\mathbb{R}^n), \quad \varphi(\lambda) \geq 0,$$

$$\mathbf{B}_n(|x|) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\lambda,x)}\varphi(\lambda)d\lambda, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

то її називають спектральною щільністю випадкового поля. Для однорідного ізотропного випадкового поля спектральна щільність $\varphi(\lambda)$ залежить лише від $|\lambda|$. Далі ми будемо використовувати лише одне позначення $\varphi(\cdot)$ для обох випадків: $\varphi(\lambda)$ і $\varphi(|\lambda|)$. Чи ми розглядаємо $\varphi(\cdot)$ як функцію багатьох чи одного аргумента буде зрозуміло з контексту.

Для функції одного аргументу маємо:

$$\lambda^{n-1}\varphi(\lambda) \in L_1([0, +\infty)),$$

$$\mathbf{\Phi}(\lambda) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}\int_0^\lambda z^{n-1}\varphi(z)dz, \quad \lambda \geq 0. \tag{2}$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60G60; Secondary 60F17.

Ключові слова і фрази. Випадкові поля, гранична теорема, вагові функціонали, спектральні функції, сильна залежність.

Дослідження виконані за сприяння Swedish Institute grant SI-01424/2007.

У роботах [1], [3], [4], [5] вивчались різноманітні властивості випадкових полів із сильною залежністю (довгою памяттю). Ці випадкові поля мають особливість спектру у точці 0. Наприклад, спектральна щільність допускає зображення

$$\varphi(\lambda) = \frac{h_0(|\lambda|)}{|\lambda|^{n-\alpha}}, \tag{3}$$

де $h_0(\cdot)$ – функція визначена на $\mathbb{R}^+ := [0, +\infty)$ і неперервна в деякому околі 0, $h_0(0) \neq 0$, $h_0(\cdot)$ – обмежена на $\mathbb{R}^+$.

Для таких полів були отримані граничні теореми для функціоналів усереднення полів по багатовимірних сфері чи кулі.

У роботі [6] розглядались однорідні та ізотропні поля з особливістю у спектрі в довільній точці a. Вивчалась асимптотична поведінка різниці $\Phi(a+\lambda) - \Phi(a-\lambda)$ за умови $\lambda \to +0$. Якщо розглянути функцію $\mathbf{\Phi}^a(\lambda)$, $\lambda \geq 0$, визначену так

$$\Phi^a(\lambda) := \begin{cases} \Phi(a+\lambda) - \Phi(a-\lambda), & 0 \leq \lambda < a; \\ \Phi(a+\lambda), & \lambda \geq a, \end{cases}$$

то, очевидно, що $\mathbf{\Phi}^a(\cdot)$ буде спектральною функцією і вивчення асимптотичної поведінки $\Phi(\lambda)$ в точці a зводиться до поведінки $\mathbf{\Phi}^a(\lambda)$ в нулі. Тому можемо застосовувати результати [3, 4], які дають звязок асимптотичної поведінки спектральної функціїї в нулі з дисперсією інтегралів від випадкового поля по сфері та кулі, радіус яких прямує до нескінченності.

Було введене позначення

$$\tilde{b}^a(r) := (2\pi)^n \int_0^\infty \frac{J^2_{\frac{n}{2}}(r\lambda)}{(r\lambda)^n} d\mathbf{\Phi}^a(\lambda)$$

і показано, що існує така дійснозначна радіальна функція $f_{n,r,a}(\cdot)$, що

$$\tilde{b}^a(r) = \mathsf{D}\left[\int_{\mathbb{R}^n} f_{n,r,a}(|x|)\xi(x)dx\right] = (2\pi)^n \int_0^\infty \frac{J^2_{\frac{n}{2}}(r(\lambda-a))}{(r(\lambda-a))^n} d\Phi(\lambda).$$

Частковим випадком є поля з сильною залежністю, для яких $a = 0$, $\mathbf{\Phi}^a(\lambda) = \mathbf{\Phi}(\lambda)$,

$$f_{n,r,0}(|x|) \doteq \begin{cases} \frac{1}{r^n}, & |x| < r, \\ 0, & |x| \geq r, \end{cases}$$

див. [6]. У цьому випадку

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_{n,r,0}(|x|)\xi(x)dx = \frac{1}{r^n} \int_{v_n(r)} \xi(x)dx,$$

де $v_n(r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq r\}$ – куля радіуса r в $\mathbb{R}^n$.

Було показано, що у загальному випадку вагова функція $f_{n,r,a}(|x|)$ допускає таке зображення:

$$f_{n,r,a}(|x|) = \frac{1}{|x|^{\frac{n}{2}-1}} \int_0^\infty \lambda^{\frac{n}{2}} \frac{J_{\frac{n}{2}}(r(\lambda-a))}{(r(\lambda-a))^{\frac{n}{2}}} J_{\frac{n}{2}-1}(|x|\lambda)d\lambda, \quad |x| \neq r.$$

У даній роботі нас буде цікавити асимптотична поведінка при $r \to +\infty$ функціоналу від випадкового поля

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_{n,\, rt^{\frac{1}{n}},\, a}(|x|)\, \xi(x)\, dx.$$

Ми будемо вивчати випадкові поля спектр яких $\mathbf{\Phi}(\lambda)$ має особливість у точці $\lambda = a \neq 0$, тобто на сфері

$$S_n(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = a\}.$$

На відміну від випадкових полів з сильною залежністю кореляційні функції таких полів мають затухаючий коливальний характер.

Це демонструє наступний приклад.

Приклад. Нехай $n = 3$, $\alpha = \frac{1}{2}$. Розглянемо випадкове поле з сильною залежністю спектральна щільність якого

$$\varphi(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda^{3-\alpha}}, & 0 \le \lambda \le 1; \\ 0, & \lambda > 1. \end{cases}$$

Тоді за формулами (1), (2) і $J_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(z)}{\sqrt{z}}$, див. [7]:

$$B_3(r) = \frac{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{r}} \int_0^1 \frac{J_{\frac{1}{2}}(r\lambda)}{\lambda} d\lambda = \frac{4\pi}{r} \int_0^1 \frac{\sin(r\lambda)}{\lambda^{\frac{3}{2}}} d\lambda.$$

На Рис. 1a бачимо, що $B_3(r)$ – спадна функція, яка не має осциляцій.

Нехай друге поле має особливість у $\lambda = \frac{1}{2}$ і спектральну щільність

$$\varphi(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|\lambda - \frac{1}{2}|}}, & 0 \le \lambda \le 1; \\ 0, & \lambda > 1. \end{cases}$$

Тоді його кореляційна функція

$$\widetilde{B}_3(r) = \frac{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{r}} \int_0^1 \frac{J_{\frac{1}{2}}(r\lambda)\lambda^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{|\lambda - \frac{1}{2}|}} d\lambda = \frac{4\pi}{r} \int_0^1 \frac{\lambda \sin(r\lambda)}{\sqrt{|\lambda - \frac{1}{2}|}} d\lambda.$$

На Рис. 1b бачимо, що $\widetilde{B}_3(r)$ має затухаючу коливальну поведінку.

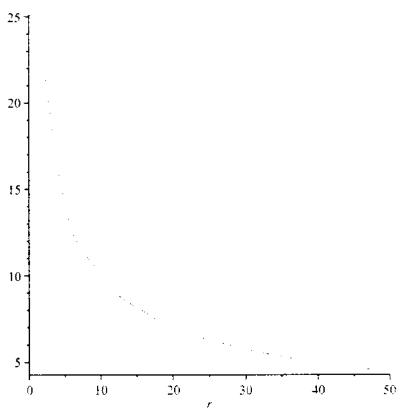

Рис.1a

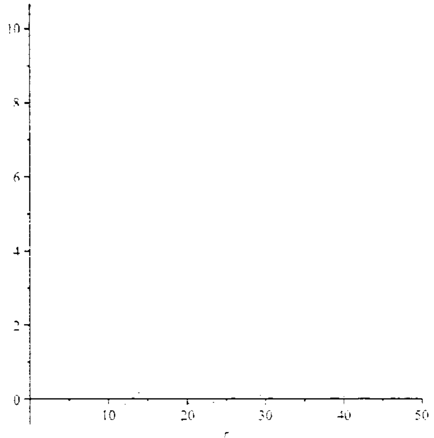

Рис.1b

2. Основний результат

Для полів з особливістю у спектрі $\Phi(\lambda)$ в точці a нам потрібен деякий аналог зображення (3) для спектральної щільності.

Умова А. $\xi : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *– середньо квадратично неперервне однорідне ізотропне гаусове поле з спектральною щільністю*

$$\varphi(\lambda) = \frac{h(|\lambda| - a)}{||\lambda| - a|^{1-\alpha}}, \tag{4}$$

де $\varphi(\lambda) \in L_1(\mathbb{R}^n)$, $\alpha > 0$, $h(\cdot)$ *– функція визначена на* $[-a, +\infty)$, *неперервна в деякому околі* 0, $h(0) \neq 0$, $h(\cdot)$ *– обмежена на* $[-a, +\infty)$.

Як і у випадку функції $\varphi(\cdot)$ будемо вживати єдине позначення $h(\cdot)$ для обох випадків $h(\lambda)$ і $h(|\lambda|)$.

Зауваження 1. У цій роботі ми розглядаємо лише випадок, коли функція $h(\cdot)$ неперервна в деякому околі 0 і степінь α у зображенні (4) однаковий для обох випадків $|\lambda| > a$ і $|\lambda| < a$. Проте всі наступні результати легко узагальнити на випадок, коли існують різні ліва і права границі функції $h(\cdot)$ в нулі, і коли степені α різні для $|\lambda| > a$ і $|\lambda| < a$.

Зауваження 2. У порівнянні з випадковими процесами ($n = 1$) для полів маємо принципову відмінність у особливостях спектру. Для випадкових процесів спектр має особливість лише в одній точці. Для випадкових полів маємо особливість в одній точці лише якщо $a = 0$. При $a \neq 0$ спектральна щільність має особливість на множині, а саме у всіх точках n – вимірної сфери $S_n(a)$.

Зауваження 3. На відміну від результатів для полів із сильною залежністю у нашому випадку степінь у зображенні спектральної щільності (4) становить $1 - \alpha$, порівняйте з $n - \alpha$ у (3). Це пов'язано з тим, що для того щоб мати інтегровану спектральну щільність у зображенні (3), потрібно щоб був скінченний інтеграл з особливістю в нулі

$$\int_0^{+\infty} \lambda^{n-1}\varphi(\lambda)d\lambda = \int_0^{+\infty} \frac{h_0(\lambda)}{\lambda^{1-\alpha}}d\lambda,$$

який отримуємо після сферичної заміни змінних. Щоб отримати інтегровну спектральну щільність у (4) при $a > 0$ має бути скінченним такий інтеграл з особливістю в точці a

$$\int_0^{+\infty} \lambda^{n-1}\varphi(\lambda)d\lambda = \int_0^{+\infty} \lambda^{n-1}\frac{h(|\lambda| - a)}{||\lambda| - a|^{1-\alpha}}\,d\lambda.$$

У обох зображеннях інтеграл від спектральної щільності скінчений лише якщо $\alpha > 0$. Різниця у степенях пов'язана з тим, що у випадку сильної залежності ($a = 0$) спектральна щільність має особливість лише в одній точці $\lambda = 0$, а якщо $a > 0$, то маємо особливості спектральної щільності в усіх точках n вимірної сфери $S_n(a)$.

Теорема 1. *Нехай виконується умова* A *і* $0 < \alpha < 1$. *Тоді при* $r \to \infty$ *скінченновимірні розподіли процесу*

$$X_r(t) = \frac{\sqrt{t}\, r^{\frac{\alpha}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{2h(0)}\, a^{\frac{n-1}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} f_{n,rt^{\frac{1}{n}},a}(|\,x|)\xi(x)dx$$

слабко збігаються до скінченновимірних розподілів процесу

$$X(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{J_{\frac{n}{2}}(|u|t^{\frac{1}{n}})}{|u|^{n-\frac{\alpha}{2}}}dZ(u),$$

де $Z(\cdot)$ *– білий шум в* $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}^n)$.

3. Доведення Теореми

Використаємо спектральний розклад (див. [1]) поля

$$\xi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i<\lambda,x>}\sqrt{\varphi(|\lambda|)}dW(\lambda), \tag{5}$$

де $W(\cdot)$ – вінерівська міра на $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}^n)$.

Розглянемо такий інтеграл від випадкового поля

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_{n,r,a}(|\,x|)\xi(x)dx. \tag{6}$$

Підставляючи спектральний розклад (5) у (6) отримаємо

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n} f_{n,r,a}(x)\int_{\mathbb{R}^n} e^{i<\lambda,x>}\sqrt{\varphi(|\lambda|)}dW(\lambda)dx\\&\stackrel{d}{=}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f_{n,r,a}(x)e^{i<\lambda,x>}dx\sqrt{\varphi(|\lambda|)}dW(\lambda).\end{aligned}\tag{7}$$

Щоб обґрунтувати перетворення у (7) зауважимо, що

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i<\lambda,x>}\sqrt{\varphi(|\lambda|)}dW(\lambda)$$

– це перетворення Фур'є стохастичної міри $\mu(d\lambda)=\sqrt{\varphi(|\lambda|)}dW(\lambda)$, а

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_{n,r,a}(x)e^{i<\lambda,x>}dx$$

– звичайне перетворення Фур'є функції $f_{n,r,a}(x)$.

Отже формула (7) має вигляд

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_{n,r,a}(x)d\widehat{\mu}(x)\stackrel{d}{=}\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}_{n,r,a}(\lambda)d\mu(\lambda)$$

і є стохастичним аналогом формули Парсеваля. Оскільки $f_{n,r,a}(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}^n)$ (див. [6]), $\sqrt{\varphi(|\cdot|)}\in L_2(\mathbb{R}^n)$, то рівність (7) має місце, див. [8].

У [6] функцію $f_{n,r,a}(|x|)$ визначено як розв'язок рівняння

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_{n,r,a}(|x|)e^{i<\lambda,x>}dx=(2\pi)^{\frac{n}{2}}\frac{J_{\frac{n}{2}}(r(|\lambda|-a))}{(r(|\lambda|-a))^{\frac{n}{2}}}.\tag{8}$$

Після підстановки (8) у (7) отримуємо

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f_{n,r,a}(x)e^{i<\lambda,x>}dx\sqrt{\varphi(|\lambda|)}dW(\lambda)\\&\stackrel{d}{=}(2\pi)^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{J_{\frac{n}{2}}(r(|\lambda|-a))}{(r(|\lambda|-a))^{\frac{n}{2}}}\sqrt{\varphi(|\lambda|)}dW(\lambda).\end{aligned}\tag{9}$$

Частка $\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}$ – парна функція. Значення скінченовимірних розподілів стохастичного інтегралу не змінюються при заміні підінтегральної функції на множині міри нуль, якщо спектр є абсолютно неперервним.

Отже, можемо подати інтеграл в (9) як суму двох інтегралів:

$$\begin{aligned}&(2\pi)^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{J_{\frac{n}{2}}(r(|\lambda|-a))}{(r(|\lambda|-a))^{\frac{n}{2}}}\sqrt{\varphi(|\lambda|)}W(d\lambda)\\&\stackrel{d}{=}(2\pi)^{\frac{n}{2}}\int_{|\lambda|>a}\frac{J_{\frac{n}{2}}(r(|\lambda|-a))}{(r(|\lambda|-a))^{\frac{n}{2}}}\sqrt{\varphi(|\lambda|)}dW(\lambda)\\&+(2\pi)^{\frac{n}{2}}\int_{|\lambda|<a}\frac{J_{\frac{n}{2}}(r(a-|\lambda|))}{(r(a-|\lambda|))^{\frac{n}{2}}}\sqrt{\varphi(|\lambda|)}dW(\lambda)=:I_1(r)+I_2(r).\end{aligned}$$

У інтегралі $I_1(r)$ зробимо заміну змінних

$$\begin{cases}u=\lambda\left(1-\frac{a}{|\lambda|}\right), & |u|=|\lambda|-a,\\ \lambda=u\left(1+\frac{a}{|u|}\right), & |\lambda|=|u|+a.\end{cases}\tag{10}$$

Зауважимо, що таке перетворення бієктивно відображає множину

$$\mathbb{R}^n\backslash v_n(a)=\{\lambda\in\mathbb{R}^n:|\lambda|>a\}$$

у множину

$$\mathbb{R}_0^n := \mathbb{R}^n \backslash \{(0, \dots, 0)\}.$$

Оскільки у (10)

$$\lambda_i = u_i + a\frac{u_i}{|u|} = u_i + a\frac{u_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2}},$$

то

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial u_i} = 1 + a\frac{|u|^2 - u_i^2}{|u|^3},$$

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial u_j} = -a\frac{u_i u_j}{|u|^3}, \quad i \neq j,$$

і матриця Якобі перетворення (10) дорівнює

$$J_n(u) = \left(\frac{\partial \lambda_i}{\partial u_j}\right)_{i.j=1}^n =$$

$$= \frac{1}{|u|^3}\begin{pmatrix} |u|^3 + a(|u|^2 - u_1^2) & -au_1u_2 & \dots & -au_1u_n \\ -au_2u_1 & |u|^3 + a(|u|^2 - u_2^2) & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -au_nu_1 & \dots & \dots & |u|^3 + a(|u|^2 - u_n^2) \end{pmatrix}.$$

Лема 1. *Якобіан перетворення* (10) *дорівнює*

$$\det(J_n(u)) = \left(1 + \frac{a}{|u|}\right)^{n-1}, \quad |u| \neq 0.$$

Доведення. Зауважимо, що перетворення (10) радіальне. Тому для будь-яких двох векторів λ^1 та λ^2, які мають однакову довжину: $|\lambda^1| = |\lambda^2|$, спотворення площ в околі цих векторів однакове. Отже, якобіан один і той же для всіх векторів однакової довжини. Тому можемо обчислити якобіан лише вздовж одного напрямку. Якщо обрати напрямок $(u_1, 0, \dots, 0)$, то всі обчислення значно спрощуються. Матимемо:

$$J_n(u) = \frac{1}{|u|^3}\begin{pmatrix} |u|^3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |u|^3 + a|u|^2 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |u|^3 + a|u|^2 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$\det(J_n(u)) = \frac{1}{|u|^{3n}}|u|^3(|u|^3 + a|u|^2)^{n-1} = \left(1 + \frac{a}{|u|}\right)^{n-1}.$$

□

Застосуємо формулу заміни змінних у стохастичному інтегралі [9, Proposition 4.2], [10, Theorem 4.4] і Лему 1. Зауважимо, що для нашого випадку результати [9, Proposition 4.2] та [10, Theorem 4.4] значно спрощуються оскільки ми маємо лише одну функцію.

$$\begin{aligned}
I_1(r) &= (2\pi)^{\frac{n}{2}} \int_{|\lambda|>a} \frac{J_{\frac{n}{2}}(r(|\lambda|-a))}{(r(|\lambda|-a))^{\frac{n}{2}}} \sqrt{\frac{h(|\lambda|-a)}{(|\lambda|-a)^{1-\alpha}}} dW(\lambda) \\
&\stackrel{d}{=} (2\pi)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}_0^n} \frac{J_{\frac{n}{2}}(r|u|)}{(r|u|)^{\frac{n}{2}}} \sqrt{\frac{h(|u|)}{|u|^{1-\alpha}}} dW\left(u\left(1+\frac{a}{|u|}\right)\right) \\
&\stackrel{d}{=} (2\pi)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}_0^n} \frac{J_{\frac{n}{2}}(r|u|)}{(r|u|)^{\frac{n}{2}}} \sqrt{\frac{h(|u|)}{|u|^{1-\alpha}}} \sqrt{\det(J_n(u))} d\widetilde{W}(u) \\
&\stackrel{d}{=} (2\pi)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{J_{\frac{n}{2}}(r|u|)}{(r|u|)^{\frac{n}{2}}} \sqrt{\frac{h(|u|)}{|u|^{1-\alpha}} \left(1+\frac{a}{|u|}\right)^{n-1}} d\widetilde{W}(u),
\end{aligned}$$

де $\widetilde{W}(\cdot)$ – вінерівська міра на $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}^n)$.

Зробимо заміну змінних $ru_i = \widetilde{u}_i$, $i = 1, \dots, n$, в останньому інтегралі і використаємо властивість напівстійкості гаусового білого шуму порядку $\frac{n}{2}$:

$$dW(cx) = c^{\frac{n}{2}} dW(x). \tag{11}$$

Отримаємо таку формулу для інтеграла $I_1(\cdot)$ від аргумента $rt^{\frac{1}{n}}$, $t \in [0,1]$:

$$I_1(rt^{\frac{1}{n}}) \stackrel{d}{=} (2\pi)^{\frac{n}{2}} \frac{r^{\frac{1-\alpha-n}{2}}}{\sqrt{t}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{J_{\frac{n}{2}}(|\widetilde{u}|t^{\frac{1}{n}})}{(|\widetilde{u}|)^{\frac{n}{2}}} \sqrt{\frac{h(\frac{|\widetilde{u}|}{r})}{|\widetilde{u}|^{1-\alpha}} \left(1+\frac{ar}{|\widetilde{u}|}\right)^{n-1}} d\widetilde{W}(\widetilde{u}). \tag{12}$$

Далі гранична поведінка інтеграла $I_1(rt^{\frac{1}{n}})$ досліджується аналогічно Теоремі 2.10.1 із [1].

Нехай

$$Y(t) := \int_{\mathbb{R}^n} \frac{J_{\frac{n}{2}}(|\widetilde{u}|t^{\frac{1}{n}})}{|\widetilde{u}|^{n-\frac{\alpha}{2}}} d\widetilde{W}(\widetilde{u}), \quad t \in [0,1]. \tag{13}$$

Із (12) та (13) випливає, що

$$\begin{aligned}
R_r(t) &:= \mathsf{E}\left(\frac{\sqrt{t}\, r^{\frac{\alpha}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{h(0)}\, a^{\frac{n-1}{2}}} I_1(rt^{\frac{1}{n}}) - Y(t)\right)^2 = \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{J^2_{\frac{n}{2}}(|\widetilde{u}|t^{\frac{1}{n}})}{|\widetilde{u}|^{2n-\alpha}} Q_r(|\widetilde{u}|) d\widetilde{u},
\end{aligned} \tag{14}$$

де

$$Q_r(|\widetilde{u}|) := \left(\sqrt{\frac{h\left(\frac{|\widetilde{u}|}{r}\right)}{h(0)} \left(1+\frac{|\widetilde{u}|}{ar}\right)^{n-1}} - 1\right)^2.$$

Нехай $\psi(r) \to \infty$ так, що $\frac{\psi(r)}{r} \to 0$, якщо $r \to \infty$. Розіб'ємо інтеграл у (14) на суму двох інтегралів $R_r(t) = R_{r,1}(t) + R_{r,2}(t)$. У першому інтегралі $R_{r,1}(t)$ інтегрування здійснюється по множині $B_1 := \{\widetilde{u} \in \mathbb{R}^n : |\widetilde{u}| \le \psi(r)\}$, а у $R_{r,2}(t)$ – по множині $B_2 := \{\widetilde{u} \in \mathbb{R}^n : |\widetilde{u}| > \psi(r)\}$. За умовою A, для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке значення r_0, що $Q_r(|\widetilde{u}|) < \varepsilon$ при $r > r_0$, $\widetilde{u} \in B_1$. Оскільки, див. [7],

$$\frac{J^2_{\frac{n}{2}}(s)}{s^n} \sim \frac{1}{2^n \Gamma^2\left(\frac{n}{2}+1\right)}, \quad \text{при } s \to 0,$$

$$\frac{J^2_{\frac{n}{2}}(s)}{s^n} = O\left(\frac{1}{s^{n+1}}\right), \quad \text{при } s \to +\infty,$$

то інтеграл

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{J^2_{\frac{n}{2}}(|\widetilde{u}|t^{\frac{1}{n}})}{|\widetilde{u}|^{2n-\alpha}} d\widetilde{u} = \left| u = t^{\frac{1}{n}}\widetilde{u} \right|$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{J^2_{\frac{n}{2}}(|u|)}{|u|^{2n-\alpha}} t^{1-\frac{\alpha}{n}} du = \frac{2\pi^{n/2} t^{1-\frac{\alpha}{n}}}{\Gamma(n/2)} \int_0^\infty \frac{J^2_{\frac{n}{2}}(s)}{s^{n+1-\alpha}} ds$$

рівномірно обмежений по t.

Отже $R_{r,1}(t)$ можемо зробити як завгодно малим зменшуючи ε.

Якщо використати обмеженість функцій Бесселя: $\left|J_{\frac{n}{2}}(u)\right| \le 1$, див. [7], то отримаємо, що існує таке значення r^0, що при $r > r^0$ другий інтеграл можемо оцінити так:

$$R_{r,2}(t) \le \frac{\sup_{u\in[-a,+\infty)} h(u)}{h(0)} \int_{B_2} \frac{J^2_{\frac{n}{2}}(|\widetilde{u}|t^{\frac{1}{n}})}{|\widetilde{u}|^{2n-\alpha}} (1+|\widetilde{u}|)^{n-1} d\widetilde{u}$$
$$= O\left(\int_{B_2} \frac{d\widetilde{u}}{|\widetilde{u}|^{1-\alpha+n}}\right) = O\left(\int_{\psi(r)}^{+\infty} \frac{ds}{s^{2-\alpha}}\right).$$

Останній вираз прямує до нуля при $r \to +\infty$. Отже, $\lim_{r\to\infty} R_r(t) = 0$ і для довільних $a_j \in \mathbb{R}$, $t_j \in [0,1]$, $j = 1,\dots,p$:

$$\lim_{r\to+\infty} \mathsf{E} \sum_{j=1}^p a_j \left(\frac{\sqrt{t_j}\, r^{\frac{\alpha}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{h(0)}\, a^{\frac{n-1}{2}}} I_1(r t_j^{\frac{1}{n}}) - Y(t_j) \right)^2 = 0.$$

Звідси випливає збіжність скінченновимірних розподілів інтеграла

$$\frac{\sqrt{t}\, r^{\frac{\alpha}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{h(0)}\, a^{\frac{n-1}{2}}} I_1(r t^{\frac{1}{n}})$$

до скінченовимірних розподілів процеса $Y(t)$, $t \in [0,1]$, при $r \to +\infty$.

Розглянемо тепер аналогічно інтеграл $I_2(r)$. Оскільки функція $\frac{J_{\frac{n}{2}}(x)}{x^{\frac{n}{2}}}$ парна, то інтеграл допускає зображення

$$I_2(r) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \int_{|\lambda|<a} \frac{J_{\frac{n}{2}}(r(a-|\lambda|))}{(r(a-|\lambda|))^{\frac{n}{2}}} \sqrt{\varphi(|\lambda|)} dW(\lambda).$$

Зробимо заміну змінних

$$\begin{cases} u = \lambda\left(\frac{a}{|\lambda|} - 1\right), & |u| = a - |\lambda|, \\ \lambda = u\left(\frac{a}{|u|} - 1\right), & |\lambda| = a - |u|. \end{cases} \tag{15}$$

Теке перетворення бієктивно відображає кулю з виколотим центром $\{\lambda \in \mathbb{R}^n : 0 < |\lambda| < a\}$ у себе.

Із (15) випливає, що:

$$\lambda_i = a\frac{u_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2}} - u_i,$$
$$\frac{\partial\lambda_i}{\partial u_i} = a\frac{|u|^2 - u_i^2}{|u|^3} - 1,$$
$$\frac{\partial\lambda_i}{\partial u_j} = -a\frac{u_i u_j}{|u|^3}, \quad i \ne j.$$

Тому матриця Якобі перетворення (15) дорівнює

$$\widetilde{J}_n(u) = \left(\frac{\partial \lambda_i}{\partial u_j}\right)_{i,j=1}^{n} =$$

$$= \frac{1}{|u|^3}\begin{pmatrix} a(|u|^2 - u_1^2) - |u|^3 & -au_1u_2 & \dots & -au_1u_n \\ -au_2u_1 & a(|u|^2 - u_2^2) - |u|^3 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -au_nu_1 & \dots & \dots & a(|u|^2 - u_n^2) - |u|^3 \end{pmatrix}.$$

Лема 2. *Якобіан перетворення* (15) *дорівнює*

$$\det(\widetilde{J}_n(u)) = -\left(\frac{a}{|u|} - 1\right)^{n-1}, \quad |u| \neq 0.$$

Доведення. Аналогічно до доведення Леми 1 достатньо розглянути матрицю Якобі лише для напрямку $(u_1, 0, \dots, 0)$:

$$\widetilde{J}_n(u) = \frac{1}{|u|^3}\begin{pmatrix} -|u|^3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a|u|^2 - |u|^3 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a|u|^2 - |u|^3 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$\det(\widetilde{J}_n(u)) = -\frac{|u|^3}{|u|^{3n}}(a|u|^2 - |u|^3)^{n-1} = -\left(\frac{a}{|u|} - 1\right)^{n-1}.$$

□

Застосувавши формулу заміни змінних у стохастичному інтегралі і Лему 2 отримуємо:

$$I_2(r) \stackrel{d}{=} (2\pi)^{\frac{n}{2}} \int_{|u|<a} \frac{J_{\frac{n}{2}}(r|u|)}{(r|u|)^{\frac{n}{2}}} \sqrt{\frac{h(-|u|)}{|u|^{1-\alpha}}\left(\frac{a}{|u|} - 1\right)^{n-1}}\, d\overline{W}(u),$$

де $\overline{W}(\cdot)$ – вінерівська міра на $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}^n)$ незалежна з $\widetilde{W}(\cdot)$.

Зробивши в останньому інтегралі заміну змінних $ru_i = \widetilde{u}_i$, $i = 1, \dots, n$, і використавши напівстійкість гаусового білого шуму (11) отримуємо:

$$I_2(rt^{\frac{1}{n}}) \stackrel{d}{=} (2\pi)^{\frac{n}{2}} \frac{r^{\frac{1-\alpha-n}{2}}}{\sqrt{t}} \int_{|\widetilde{u}|<ra} \frac{J_{\frac{n}{2}}(|\widetilde{u}|t^{\frac{1}{n}})}{(|\widetilde{u}|)^{\frac{n}{2}}} \sqrt{\frac{h\left(-\frac{|\widetilde{u}|}{r}\right)}{|\widetilde{u}|^{1-\alpha}}\left(\frac{ar}{|\widetilde{u}|} - 1\right)^{n-1}}\, d\overline{W}(\widetilde{u}). \tag{16}$$

Нехай

$$V(t) := \int_{\mathbb{R}^n} \frac{J_{\frac{n}{2}}(|\widetilde{u}|t^{\frac{1}{n}})}{|\widetilde{u}|^{n-\frac{\alpha}{2}}}\, d\overline{W}(\widetilde{u}), \quad t \in [0, 1]. \tag{17}$$

Із (16) та (17) випливає, що

$$\begin{aligned} R_r^1(t) &:= \mathsf{E}\left(\frac{\sqrt{t}\, r^{\frac{\alpha}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{h(0)}\, a^{\frac{n-1}{2}}} I_2(rt^{\frac{1}{n}}) - V(t)\right)^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{J^2_{\frac{n}{2}}(|\widetilde{u}|t^{\frac{1}{n}})}{|\widetilde{u}|^{2n-\alpha}} Q_r^1(|\widetilde{u}|)\, d\widetilde{u}, \end{aligned} \tag{18}$$

де

$$Q_r^1(|\widetilde{u}|) := \left(\sqrt{\frac{h\left(-\frac{|\widetilde{u}|}{r}\right)}{h(0)}\left(1 - \frac{|\widetilde{u}|}{ar}\right)_+^{n-1}} - 1\right)^2,$$

$$(x)_+ = \begin{cases} x, & \text{якщо} \quad x \geq 0, \\ 0, & \text{якщо} \quad x < 0. \end{cases}$$

Як і у випадку $R_r(t)$ розіб'ємо інтеграл у (18) на суму двох інтегралів $R_r^1(t) = R_{r,1}^1(t) + R_{r,2}^1(t)$ з інтегруванням по множині B_1 у $R_{r,1}^1(t)$ і B_2 у $R_{r,2}^1(t)$.

Аналогічно до $R_{r,1}(t)$ отримуємо, що $R_{r,1}^1(t)$ можна зробити як завгодно малим рівномірно по $t \in [0,1]$.

Для інтеграла $R_{r,2}^1(t)$ використавши знову оцінку $\left|J_{\frac{n}{2}}(u)\right| \leq 1$ і зауваживши, що

$$Q_r^1(|\widetilde{u}|) \leq \frac{\sup_{u\in[-a,+\infty)} h(u)}{h(0)},$$

одержуємо

$$R_{r,2}^1(t) \leq \frac{\sup_{u\in[-a,+\infty)} h(u)}{h(0)} \int_{B_2} \frac{J_{\frac{n}{2}}^2(|\widetilde{u}|t^{\frac{1}{n}})}{|\widetilde{u}|^{2n-\alpha}} d\widetilde{u}$$

$$= O\left(\int_{B_2} \frac{d\widetilde{u}}{|\widetilde{u}|^{2n-\alpha}}\right) = O\left(\int_{\psi(r)}^{+\infty} \frac{ds}{s^{n+1-\alpha}}\right).$$

Останній вираз прямує до нуля при $r \to +\infty$.

Аналогічно до випадку I_1, з наведених вище міркувань випливає збіжність скінченновимірних розподілів інтеграла

$$\frac{\sqrt{t}\, r^{\frac{\alpha}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{h(0)}\, a^{\frac{n-1}{2}}} I_2(rt^{\frac{1}{n}})$$

до скінченновимірних розподілів процеса $V(t)$, $t \in [0,1]$, при $r \to +\infty$.

Отже, скінченновимірні розподіли процеса

$$\sqrt{2}\, X_r(t) \stackrel{d}{=} \frac{\sqrt{t}\, r^{\frac{\alpha}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{h(0)}\, a^{\frac{n-1}{2}}} \left(I_1(rt^{\frac{1}{n}}) + I_2(rt^{\frac{1}{n}})\right)$$

збігаються до скінченновимірних розподілів процеса

$$Y(t) + V(t), \quad t \in [0,1].$$

Оскільки вінерівські міри $\widetilde{W}(\cdot)$ і $\overline{W}(\cdot)$ незалежні, то існує вінерівська міра $Z(\cdot)$ на $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}^n)$ така, що формально

$$\sqrt{2} dZ(\cdot) \stackrel{d}{=} d\widetilde{W}(\cdot) + d\overline{W}(\cdot),$$

і можемо переписати граничний процес так

$$Y(t) + V(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{J_{\frac{n}{2}}(|\widetilde{u}|t^{\frac{1}{n}})}{|\widetilde{u}|^{n-\frac{\alpha}{2}}} d\widetilde{W}(\widetilde{u}) + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{J_{\frac{n}{2}}(|\widetilde{u}|t^{\frac{1}{n}})}{|\widetilde{u}|^{n-\frac{\alpha}{2}}} d\overline{W}(\widetilde{u})$$

$$\stackrel{d}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\sqrt{2} J_{\frac{n}{2}}(|\widetilde{u}|t^{\frac{1}{n}})}{|\widetilde{u}|^{n-\frac{\alpha}{2}}} dZ(\widetilde{u}) = \sqrt{2}\, X(t).$$

Теорему доведено.

4. Висновки та обговорення

У статті одержано граничну теорему для випадкових полів, які мають сингулярність спектра не у початку координат. Теорема узагальнює результати для випадкових полів із сильною залежністю, див. [1, 5], які мають сингулярність спектру у нулі.

Хоча граничні процеси у нашому випадку подібні до граничного процесу для випадку сильної залежності, але одержати цей результат з теореми 1 простим граничним переходом при $a \to 0$ неможливо. Це пов'язано з різницею у множинах сингулярності спектра для цих випадків, див. зауваження 2, 3.

Отримано деякі інші результати, які поглиблюють і роз'яснюють доведену теорему. Зокрема, граничні теореми для функціоналів вигляду

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_{n,rt^{\frac{1}{n}},a}(x)H_m(\xi(x))dx, \quad m > 1,$$

де $H_m(\cdot)$ – m-й многочлен Чебишова - Ерміта. Ці результати будуть опубліковані у окремій статті.

Цікавими відкритими проблемами залишаються:

- отримання граничних теорем для полів з більш ніж однією сингулярністю у спектрі;
- одержання граничних теорем для полів з OR спектром, див. [6];
- отримання різних властивостей розглянутих полів і порівняння їх з відомими результатами для випадку сильної залежності (довгої памяті).

Література

1. N. N. Leonenko and A. V. Ivanov, *Statistical Analysis of Random Fields*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht–Boston–London, 1989.
2. M. I. Yadrenko, *Spectral Theory of Random Fields*, Optimization Software Inc., New York, (1983). (distributed by Springer-Verlag)
3. N. N. Leonenko and A. Ya. Olenko, *Tauberian theorems for correlation functions and limit theorems for spherical averages of random fields*, Random Oper. Stoch. Eqs. **1** (1993), no. 1, 57–67.
4. A. Ya. Olenko, *Tauberian and Abelian theorems for strongly dependent random fields*, Ukrainian Math. Journal **48** (1996), no. 3, 368–383.
5. N. N. Leonenko, *Limit Theorems for Random Fields with Singular Spectrum*. Kluwer Academic Publisher, 1999.
6. A. Ya. Olenko, *Tauberian theorems for random fields with OR asymptotics II*. Theory Probab. and Math. Statistics **74** (2006), 81–97.
7. G. N. Watson, *A Tretise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge University Press, 1944.
8. C. Houdre, *Linear Fourier and stochastic analysis*, Probab. Theory and Related Fields **87** (1990), 167–188.
9. R. L. Dobrushin, *Gaussian and their subordinated self-similar random generalized fields*, The Annals of Probability **7** (1979), no. 1, 1–28.
10. P. Major, *Multiple Wiener–Ito Integrals*, Lecture Notes in Math., vol. 849, Springer, New York, 1981.

Department of Mathematics and Statistics, La Trobe University, Victoria, 3086, Australia

Адреса електронної пошти: a.olenko@latrobe.edu.au

Кафедра теорії ймовірностей та математичної статистики, механіко-математичний факультет, Національний університет ім. Тараса Шевченка, Володимирська, 64, Київ 01033, Україна

Адреса електронної пошти: bklykavka@yahoo.com

Надійшла 31/08/2009