Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 81, 2009, стор. 139–154

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 81, 2009, pp. 139–154

СИНГУЛЯРНІСТЬ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ, ЗОБРАЖЕНОЇ ЛАНЦЮГОВИМ A_2-ДРОБОМ З НЕЗАЛЕЖНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ

УДК 519.21

М. В. ПРАЦЬОВИТИЙ І Д.В. КЮРЧЕВ

Аннотация. Изучается свойства распределения случайной величины

$$\xi = \frac{1}{\eta_1 + \frac{1}{\eta_2 + \dots}},$$

где η_k — независимые и $P\{\eta_k = \alpha_1\} = p_{\alpha_1 k} \geq 0$, $P\{\eta_k = \alpha_2\} = p_{\alpha_2 k} \geq 0$, $0 < \alpha_1 < \alpha_2$, $\alpha_1\alpha_2 \geq \frac{1}{2}$, $p_{\alpha_1 k} + p_{\alpha_2 k} = 1$. Доказано, что распределение ξ не может быть абсолютно непрерывным. Найдены критерии принадлежности к одному из типов сингулярных распределений (канторовскому, салемовскому) в зависимости от тополого-метрических свойств спектра.

1. Вступ

Нагадаємо [7], що розподіл випадкової величини (в.в.) називається сингулярним, якщо він є неперервним і зосередженим на множині нульової міри Лебега. Інтерес до сингулярних розподілів в останній час обумовлюється значною мірою їх тісним зв'язком з фракталами [7]. Проте існують певні труднощі в заданні, вивченні та використанні таких розподілів, оскільки вони не мають власного універсального аналітичного апарату. Для вирішення цієї проблеми використовують різні системи числення та способи кодування чисел, в тому числі зображення дійсних чисел за допомогою ланцюгових дробів (див. [2, 9, 10]).

Існує ряд робіт (напр., [2, 5, 6]), присвячених дослідженню структури (вмісту дискретної, абсолютно неперервної та сингулярно неперервної компонент) і тополого-метричних властивостей спектра розподілу в.в.

$$\xi = \cfrac{1}{\eta_1 + \cfrac{1}{\eta_2 + \dots}}, \tag{1}$$

де η_k є незалежними в.в. Структура розподілу в.в. ξ найбільш повно вивчена у випадку, коли η_k приймають натуральні значення. Доведено[6], що розподіл в.в. ξ, представленої елементарним ланцюговим дробом з незалежними елементами η_k, не може мати абсолютно неперервної компоненти (а отже, у випадку неперервності, є сингулярним).

В даній роботі ми вивчаємо властивості розподілу випадкового ланцюгового дробу ξ з незалежними елементами η_k, що мають розподіли: $P\{\eta_k = \alpha_1\} = p_{\alpha_1 k} \geq 0$,

---

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 11K55; Secondary 11K50, 60E05, 26A30, 28A80.
Ключові слова і фрази. Випадковий ланцюговий дріб, ланцюговий A_2-дріб, сингулярний розподіл канторівського типу, сингулярний розподіл салемівського типу.
Дослідження першого автора виконані за сприяння DFG 436 UKR Project #113/80, 97.
Дослідження другого автора виконані за сприяння DFG 436 UKR Project #113/80.

$P\{\eta_k = \alpha_2\} = p_{\alpha_2 k} \geq 0$, $0 < \alpha_1 < \alpha_2$, $\alpha_1\alpha_2 \geq \frac{1}{2}$, $p_{\alpha_1 k} + p_{\alpha_2 k} = 1$. Основною задачею є вивчення лебегівської структури розподілу та його властивостей.

В [2] доводився факт чистоти розподілу в.в., представленої ланцюговим дробом з незалежними (не обов'язково натуральними) елементами, а також критерій дискретності.

Ми наводимо незалежне обґрунтування чистоти розподілу та критерію дискретності ξ, і більше того, доводимо, що розподіл в.в. ξ є або чисто дискретним, або чисто сингулярно неперервним. Також встановлюється належність розподілу ξ до окремих класів сингулярних розподілів в залежності від тополого-метричних властивостей спектра.

2. Випадковий ланцюговий A_2-дріб з незалежними елементами

Нехай

$$\xi = \cfrac{1}{\eta_1 + \cfrac{1}{\eta_2 + \dots}} \equiv [\eta_1, \eta_2, \dots],$$

де η_k — незалежні випадкові величини, що мають розподіли $P\{\eta_k = \alpha_1\} = p_{\alpha_1 k} \geq 0$, $P\{\eta_k = \alpha_2\} = p_{\alpha_2 k} \geq 0$, $0 < \alpha_1 < \alpha_2$, $p_{\alpha_1 k} + p_{\alpha_2 k} = 1$.

Нагадаємо[3], що нескінченний ланцюговий дріб виду $[a_1, a_2, \dots, a_k, \dots]$, де $a_k \in A_2 = \{\alpha_1, \alpha_2\}$, $0 < \alpha_1 < \alpha_2$, $k = 1, 2, \dots$, називається ланцюговим A_2-дробом. Позначимо $\beta_1 = [\alpha_2, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_1, \dots] \equiv [(\alpha_2, \alpha_1)]$, $\beta_2 = [(\alpha_1, \alpha_2)]$. В [3] було доведено, що достатньо виконання умови $\alpha_1\alpha_2 = \frac{1}{2}$ для того, щоб зчисленна множина точок відрізка $[\beta_1, \beta_2]$ мала два різних ланцюгових A_2-зображення (A_2-раціональні точки), а решта точок цього відрізка — єдине зображення ланцюговим A_2-дробом (A_2-ірраціональні точки). У першому випадку два зображення одного числа x мають вигляд:

$$x = [\underbrace{c_1, c_2, \dots}_{n}, \alpha_1, (\alpha_1, \alpha_2)] = [\underbrace{c_1, c_2, \dots}_{n}, \alpha_2, (\alpha_2, \alpha_1)],$$

де перші n елементів співпадають ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Нехай $L_{A_2} = \{x \colon x = [a_1, a_2, \dots, a_k, \dots], a_k \in A_2, k = 1, 2, \dots\}$. Неважко переконатися, що при $\alpha_1\alpha_2 > \frac{1}{2}$ кожна точка $x \in [\beta_1, \beta_2]$ або не має ланцюгового A_2-зображення ($x \notin L_{A_2}$), або ж має єдине таке зображення.

Лема 2.1. *Якщо $\alpha_1\alpha_2 \geq \frac{1}{2}$ і число $x \in [\beta_1, \beta_2]$ має єдине ланцюгове A_2-зображення $[a_1, a_2, \dots, a_k, \dots]$, то*

$$P\{\xi = x\} = \prod_{k=1}^{\infty} p_{a_k k}.$$

Доведення. Очевидно, що подія $\{\xi = x\}$ рівносильна одночасному виконанню рівностей $\eta_k = a_k$, $k = 1, 2, \dots$. Тоді з незалежності $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k, \dots$ маємо:

$$P\{\xi = x\} = P\{\eta_1 = a_1, \eta_2 = a_2, \dots, \eta_k = a_k, \dots\} = \prod_{k=1}^{\infty} P\{\eta_k = a_k\} = \prod_{k=1}^{\infty} p_{a_k k}. \quad \square$$

Лема 2.2. *Якщо $\alpha_1\alpha_2 = \frac{1}{2}$, а вирази $[a_1, \dots, a_k, \dots]$ і $[b_1, \dots, b_k, \dots]$ є двома різними ланцюговими A_2-зображеннями одного числа x, то*

$$P\{\xi = x\} = \prod_{k=1}^{\infty} p_{a_k k} + \prod_{k=1}^{\infty} p_{b_k k}, \tag{2}$$

причому принаймні один із нескінченних добутків дорівнює нулю.

Доведення. Рівність (2) очевидна. Якщо x не є атомом розподілу, то $P\{\xi = x\} = 0$ і обидва добутки дорівнюють нулю. У випадку, коли $P\{\xi = x\} > 0$, принаймні один із добутків більший за нуль. Нехай

$$\prod_{k=1}^{\infty} p_{a_k k} > 0.$$

За необхідною умовою збіжності нескінченного добутку, $p_{a_k k} \to 1$ $(k \to \infty)$. Оскільки $b_k \neq a_k$ для всіх $k > n$, де n дорівнює кількості перших співпадаючих елементів двох зображень, а множина A_2 містить лише 2 елементи, то $p_{b_k k} \to 0$ і нескінченний добуток $\prod_{k=1}^{\infty} p_{b_k k}$ розбігається до нуля. □

Нехай $c_1, \ldots, c_n$ — фіксований набір елементів з множини A_2. Нагадаємо[3], що циліндричною множиною (циліндром) рангу n з основою $c_1 \ldots_n$ називається множина

$$\Delta_{c_1 \ldots n} = \{x : \; x = [c_1, \ldots, c_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots], \; a_{n+k} \in A_2, \; k = 1, 2, \ldots\}.$$

Визначимо множину $\nabla_{c_1 \ldots n}$ наступним чином:

$$\nabla_{c_1 \ldots n} = \Delta_{c_1 \ldots n} \setminus \{[c_1, \ldots, c_n, (\alpha_1, \alpha_2)], [c_1, \ldots, c_n, (\alpha_2, \alpha_1)]\}.$$

Зауважимо, що при $\alpha_1 \alpha_2 = \frac{1}{2}$ множини $\Delta_{c_1 \ldots n}$ $(\nabla_{c_1 \ldots n})$ являють собою відрізки (інтервали) (див. [3]). Тому в цьому разі будемо також називати їх циліндричними відрізками (циліндричними інтервалами).

Лема 2.3. *Якщо $\alpha_1 \alpha_2 \geq \frac{1}{2}$, то імовірність множини $\nabla_{c_1 c_2 \ldots c_n}$ визначається за формулою:*

$$P\{\xi \in \nabla_{c_1 c_2 \ldots c_n}\} = p_{c_1 1} p_{c_2 2} \cdot \ldots \cdot p_{c_n n}. \tag{3}$$

Доведення. Очевидно, що настання події $\{\xi \in \nabla_{c_1 c_2 \ldots c_n}\}$ еквівалентно одночасному настанню подій $\{\eta_1 = a_1\}, \{\eta_2 = a_2\}, \ldots, \{\eta_n = a_n\}$. Оскільки випадкові величини η_k, $k = 1, \ldots, n$, незалежні, то

$$P\{\xi \in \nabla_{c_1 c_2 \ldots c_n}\} = P\{\eta_1 = c_1, \eta_2 = c_2, \ldots, \eta_n = c_n\} =$$
$$= P\{\eta_1 = c_1\} \cdot P\{\eta_2 = c_2\} \cdot \ldots \cdot P\{\eta_n = c_n\} = p_{c_1 1} p_{c_2 2} \cdot \ldots \cdot p_{c_n n}. \quad \square$$

3. Критерії чистої дискретності та чистої неперервності розподілу ξ

Теорема 3.1. *Для того щоб при $\alpha_1 \alpha_2 \geq \frac{1}{2}$ розподіл випадкової величини ξ був дискретним, необхідно і достатньо, щоб*

$$M \equiv \prod_{k=1}^{\infty} \max\{p_{\alpha_1 k}, p_{\alpha_2 k}\} > 0. \tag{4}$$

У випадку дискретності точковий спектр розподілу випадкової величини ξ складається з тих чисел $x \in [\beta_1, \beta_2]$, що мають ланцюгове A_2-зображення, яке відрізняється від зображення числа

$$x_0 = [b_1, b_2, \ldots, b_k, \ldots], \tag{5}$$

де $P\{\eta_k = b_k\} = \max\{p_{\alpha_1 k}, p_{\alpha_2 k}\}$ для всіх $k \in \mathbb{N}$, не більш ніж скінченною кількістю елементів a_k, таких що $p_{a_k k} > 0$.

Доведення. У випадку дискретності розподілу ξ існує точка $x = [a_1, \ldots, a_k, \ldots]$ така, що

$$\prod_{k=1}^{\infty} p_{a_k k} > 0.$$

Тоді
$$\prod_{k=1}^{\infty} \max\{p_{\alpha_1 k}, p_{\alpha_2 k}\} \geq \prod_{k=1}^{\infty} p_{a_k k} > 0.$$
Отже, якщо розподіл випадкової величини ξ має атоми, то (4) виконується.

Припустимо тепер, що має місце (4). Розглянемо довільну точку $x \in [\beta_1, \beta_2]$, для якої існує ланцюгове A_2-зображення таке, що відрізняється від зображення x_0 не більш ніж скінченним числом елементів a_k, яким відповідають $p_{a_k k} > 0$. Очевидно, що тоді x є атомом розподілу ξ.

Нехай $x_i^{(k)} \in [\beta_1, \beta_2]$, причому $x_i^{(k)}$ має ланцюгове A_2-зображення, елементи якого співпадають з елементами зображення (5) числа x_0, починаючи з $(k+1)$-го.

Тоді
$$P\left\{\xi \in \{x_i^{(k)}\}\right\} = \sum_{\substack{a_1 : p_{a_1 1} > 0 \\ \cdots \\ a_k : p_{a_k k} > 0}} \left(p_{a_1 1} \cdot \ldots \cdot p_{a_k k} \prod_{j=k+1}^{\infty} p_{b_j j} \right) =$$
$$= \sum_{a_1 : p_{a_1 1} > 0} p_{a_1 1} \cdot \ldots \cdot \sum_{a_k : p_{a_k k} > 0} p_{a_k k} \prod_{j=k+1}^{\infty} p_{b_j j} = \frac{M}{p_{b_1 1} \cdot \ldots \cdot p_{b_k k}}.$$
Очевидно, що множина $D = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \left\{x_i^{(m)}\right\}$ не більш ніж зчисленна і
$$P\{\xi \in D\} = \lim_{m \to \infty} P\left\{\xi \in \left\{x_i^{(m)}\right\}\right\} = \lim_{m \to \infty} \frac{M}{p_{b_1 1} \cdot \ldots \cdot p_{b_m m}} = 1.$$

Таким чином, випадкова величина ξ зосереджена на не більш ніж зчисленній множині і є дискретною за означенням. □

Наслідок 3.1. *Для того щоб при $\alpha_1\alpha_2 \geq \frac{1}{2}$ розподіл випадкової величини ξ був неперервним, необхідно і достатньо, щоб*
$$M \equiv \prod_{k=1}^{\infty} \max\{p_{\alpha_1 k}, p_{\alpha_2 k}\} = 0.$$

4. Властивості неперервно розподіленої випадкової величини ξ

Нагадаємо[7], що спектром розподілу в.в. ξ називається множина
$$S_\xi = \{x : \ P\{\xi \in (x - \varepsilon, \ x + \varepsilon)\} > 0, \quad \forall \varepsilon > 0\}. \tag{6}$$

Лема 4.1. *Якщо $\alpha_1\alpha_2 \geq \frac{1}{2}$, то спектр розподілу неперервно розподіленої в.в. ξ співпадає з множиною*
$$A = \{x : \quad x = [a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots], \quad p_{a_k k} > 0, \quad \forall k \in N\}.$$

Доведення. Доведемо, що $S_\xi \subset A$. Нехай $x = [a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots] \in S_\xi$, де x — точка, що має єдине ланцюгове A_2-зображення. Тоді $\nabla_{a_1 a_2 \ldots a_k} \cap S_\xi \neq \varnothing$ і
$$P\{\xi \in \nabla_{a_1 a_2 \ldots a_k}\} = \prod_{i=1}^{k} p_{a_i i} > 0$$
для довільного натурального k. Звідси випливає, що $p_{a_k k} > 0$ для $\forall k \in N$, тобто $x \in A$.

Нехай x — точка S_ξ, що має два різних ланцюгових A_2-зображення $[a_1, a_2, \ldots]$ і $[b_1, b_2, \ldots]$. Оскільки
$$P\{\xi \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)\} > 0$$

для $\forall\varepsilon > 0$, то існує принаймні одне зображення, нехай $[a_1, a_2, \ldots]$, таке, що для кожного натурального k $P\{\xi \in \nabla_{a_1 a_2 \ldots a_k}\} > 0$. Звідси випливає, що $p_{a_k k} > 0$ для $\forall k \in N$, тобто $x \in A$.

Доведемо, що $A \subset S_\xi$. Нехай $x = [a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots]$, де $p_{a_k k} > 0$ $\forall k \in N$, тобто $x \in A$. Тоді для всіх k

$$P\{\xi \in \nabla_{a_1 a_2 \ldots a_k}\} = \prod_{i=1}^{k} p_{a_i i} > 0.$$

Оскільки для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна вказати таке k, що $\nabla_{a_1 a_2 \ldots a_k} \subset (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, то $x \in S_\xi$. □

Теорема 4.1. *Якщо $\alpha_1\alpha_2 > \frac{1}{2}$ і в.в. ξ розподілена неперервно, то розподіл ξ є сингулярним канторівського типу.*

Доведення. Нехай $F_0 = [\beta_1, \beta_2]$, $F_k = \bigcup\limits_{c_1, \ldots, c_k \in A_2} F_{c_1, \ldots, c_k}$, де

$$F_{c_1, \ldots, c_k} = [\min \Delta_{c_1, \ldots, c_k}, \max \Delta_{c_1, \ldots, c_k}].$$

Тоді $S_\xi \subseteq \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k$ і міра Лебега спектра $\lambda(S_\xi)$ задовільняє співвідношенням:

$$\lambda(S_\xi) \leq \lim_{k\to\infty} \lambda(F_k) = (\beta_2 - \beta_1) \lim_{k\to\infty} \frac{\lambda(F_k)}{\lambda(F_{k-1})} \cdot \frac{\lambda(F_{k-1})}{\lambda(F_{k-2})} \cdot \ldots \cdot \frac{\lambda(F_1)}{\lambda(F_0)} =$$
$$= (\beta_2 - \beta_1) \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(F_k)}{\lambda(F_{k-1})}.$$

Нехай

$$D_{c_1, \ldots, c_k} = F_{c_1, \ldots, c_k} \setminus (F_{c_1, \ldots, c_k, \alpha_1} \cup F_{c_1, \ldots, c_k, \alpha_2}).$$

Тоді очевидно, що

$$D_{c_1 \ldots c_k} = [\min\{[c_1, \ldots, c_{k-1}, \alpha_1, (\alpha_1, \alpha_2)], [c_1, \ldots, c_{k-1}, \alpha_2, (\alpha_2, \alpha_1)]\},$$
$$\max\{[c_1, \ldots, c_{k-1}, \alpha_1, (\alpha_1, \alpha_2)], [c_1, \ldots, c_{k-1}, \alpha_2, (\alpha_2, \alpha_1)]\}]$$

Покладемо $D_k = \bigcup\limits_{c_1, \ldots, c_k \in A_2} D_{c_1 \ldots c_k}$, тоді $D_k = F_{k-1} \setminus F_k$, $F_{k-1} = F_k \cup D_k$, $D_k \cap S_\xi = \varnothing$ і тому

$$\lambda(F_{k-1}) = \lambda(F_k) + \lambda(D_k).$$
$$\frac{\lambda(F_{k-1})}{\lambda(F_{k-1})} = \frac{\lambda(F_k)}{\lambda(F_{k-1})} + \frac{\lambda(D_k)}{\lambda(F_{k-1})},$$
$$\frac{\lambda(F_k)}{\lambda(F_{k-1})} = 1 - \frac{\lambda(D_k)}{\lambda(F_{k-1})}.$$

Отже,

$$\lambda(S_\xi) \leq (\beta_2 - \beta_1) \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda(D_k)}{\lambda(F_{k-1})}\right). \tag{7}$$

Покажемо, що ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(D_k)}{\lambda(F_{k-1})}$ розбігається. Застосовуючи формулу довжини циліндра (див. [3]), маємо:

$$\lambda(F_{k-1}) = \sum_{c_1, \ldots, c_{k-1} \in A_2} \frac{\beta_2 - \beta_1}{(q_{k-1} + \beta_1 q_{q-2})(q_{k-1} + \beta_2 q_{k-2})},$$

$$\lambda(D_k) = \sum_{c_1,\ldots,c_{k-1}\in A_2} |[c_1,\ldots,c_{k-1},\alpha_1+\beta_2] - [c_1,\ldots,c_{k-1},\alpha_2+\beta_1]| =$$
$$= \sum_{c_1,\ldots,c_{k-1}\in A_2} \left| \frac{(\alpha_1+\beta_2)p_{k-1}+p_{k-2}}{(\alpha_1+\beta_2)q_{k-1}+q_{k-2}} - \frac{(\alpha_2+\beta_1)p_{k-1}+p_{k-2}}{(\alpha_2+\beta_1)q_{k-1}+q_{k-2}} \right| =$$
$$= \sum_{c_1,\ldots,c_{k-1}\in A_2} \frac{|(\alpha_2-\alpha_1)-(\beta_2-\beta_1)|}{((\alpha_1+\beta_2)q_{k-1}+q_{k-2})((\alpha_2+\beta_1)q_{k-1}+q_{k-2})}.$$

Тоді

$$\frac{D_{c_1\ldots c_{k-1}}}{F_{c_1\ldots c_{k-1}}} = \frac{|(\alpha_2-\alpha_1)-(\beta_2-\beta_1)|((\alpha_1+\beta_2)q_{k-1}+q_{k-2})((\alpha_2+\beta_1)q_{k-1}+q_{k-2})}{((\alpha_1+\beta_2)q_{k-1}+q_{k-2})((\alpha_2+\beta_1)q_{k-1}+q_{k-2})(\beta_2-\beta_1)} =$$
$$= \frac{|(\alpha_2-\alpha_1)-(\beta_2-\beta_1)|\left(1+\beta_1\frac{q_{k-2}}{q_{k-1}}\right)\left(1+\beta_2\frac{q_{k-2}}{q_{k-1}}\right)}{\left(\alpha_1+\beta_2+\frac{q_{k-2}}{q_{k-1}}\right)\left(\alpha_2+\beta_1+\frac{q_{k-2}}{q_{k-1}}\right)(\beta_2-\beta_1)}.$$

Оскільки $\alpha_1\alpha_2 > \frac{1}{2}$, то $(\alpha_2-\alpha_1)-(\beta_2-\beta_1) = \theta > 0$ (див. [3]). Враховуючи також, що

$$\theta_1 \le \frac{q_{k-2}}{q_{k-1}} = [a_{k-1}, a_{k-2}, \ldots, a_1] \le \theta_2,$$

де $\theta_1 = \frac{1}{\alpha_2+\frac{1}{\alpha_1}}$, $\theta_2 = \frac{1}{\alpha_1}$ при $k = 2, 3, \ldots$, то

$$\frac{D_{c_1,\ldots,c_{k-1}}}{F_{c_1,\ldots,c_{k-1}}} > \frac{\theta(1+\beta_1\theta_1)(1+\beta_2\theta_1)}{(\alpha_1+\beta_2+\theta_2)(\alpha_2+\beta_1+\theta_2)(\beta_2-\beta_1)} = \delta > 0.$$

Тоді

$$\frac{\lambda(D_k)}{\lambda(F_{k-1})} = \frac{\sum\limits_{c_1,\ldots,c_{k-1}\in A_2} D_{c_1\ldots c_{k-1}}}{\sum\limits_{c_1,\ldots,c_{k-1}\in A_2} F_{c_1\ldots c_{k-1}}} \ge \frac{\sum\limits_{c_1,\ldots,c_{k-1}\in A_2} \delta F_{c_1\ldots c_{k-1}}}{\sum\limits_{c_1,\ldots,c_{k-1}\in A_2} F_{c_1\ldots c_{k-1}}} = \delta > 0.$$

і нескінченний добуток в (7) розбігається до нуля. Отже, $\lambda(S_\xi) = 0$ і розподіл в.в. ξ є сингулярним канторівського типу. □

Лема 4.2. *Якщо $\alpha_1\alpha_2 = \frac{1}{2}$ і випадкова величина ξ розподілена неперервно, то її функція розподілу представляється у вигляді:*

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \le \beta_1; \\ \beta_{a_1(x)} + \sum\limits_{m=2}^{\infty}\left(\beta_{a_m(x)}\prod_{i=1}^{m-1} p_{a_i(x)i}\right) & \text{при} \quad x \in L_{A_2}; \\ 1, & \text{якщо} \quad x > \beta_2. \end{cases} \tag{8}$$

де $a_m(x)$ — елементи ланцюгового A_2-зображення числа x, що визначаються однозначно, якщо x має єдине зображення, і відповідають одному із зображень x, якщо x має два зображення; $\beta_{a_m(x)}$ визначаються рівностями:

$$\beta_{a_m(x)} = \begin{cases} \sum\limits_{\substack{j\in A_2 \\ j<a_m(x)}} p_{jm} & \text{при} \quad m = 2k; \\ \sum\limits_{\substack{j\in A_2 \\ j>a_m(x)}} p_{jm} & \text{при} \quad m = 2k+1. \end{cases}$$

Доведення. Нехай $x \in L_{A_2}$. За означенням, $F_\xi(x) = P\{\xi < x\}$. Очевидно, що

$$\{\xi < x\} = \{\eta_1 > a_1(x)\} \cup \{\eta_1 = a_1(x),\ \eta_2 < a_2(x)\} \cup \dots$$
$$\dots \cup \{\eta_i = a_i(x), i = \overline{1, 2k-1},\ \eta_{2k} < a_{2k}(x)\} \cup$$
$$\cup \{\eta_i = a_i(x), i = \overline{1, 2k},\ \eta_{2k+1} > a_{2k+1}(x)\} \cup \dots,$$

де події в правій частині рівності попарно несумісні. Тоді

$$P\left\{\eta_i = a_i(x), i = \overline{1, 2k-1},\ \eta_{2k} < a_{2k}(x)\right\} =$$
$$= \left(\prod_{i=1}^{2k-1} P\{\eta_i = a_i(x)\}\right) \sum_{\substack{j \in A_2 \\ j < a_{2k}(x)}} P\{\eta_{2k} = j\} = \left(\prod_{i=1}^{2k-1} p_{a_i(x)i}\right) \beta_{a_{2k}(x)},$$
$$P\left\{\eta_i = a_i(x), i = \overline{1, 2k},\ \eta_{2k+1} > a_{2k+1}(x)\right\} =$$
$$= \left(\prod_{i=1}^{2k} P\{\eta_i = a_i(x)\}\right) \sum_{\substack{j \in A_2 \\ j > a_{2k+1}(x)}} P\{\eta_{2k+1} = j\} = \left(\prod_{i=1}^{2k} p_{a_i(x)i}\right) \beta_{a_{2k+1}(x)}.$$

Таким чином,

$$F_\xi(x) = P\{\xi < x\} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\beta_{a_{2k}(x)} \prod_{i=1}^{2k-1} p_{a_i(x)i} + \beta_{a_{2k+1}(x)} \prod_{i=1}^{2k} p_{a_i(x)i}\right) =$$
$$= \beta_{a_1(x)} + \sum_{m=2}^{\infty} \left(\beta_{a_m(x)} \prod_{i=1}^{m-1} p_{a_i(x)i}\right). \quad \square$$

Теорема 4.2. *При $\alpha_1\alpha_2 = \frac{1}{2}$ розподіл ξ є чистим, тобто в розкладі функції розподілу $F_\xi(x)$ на дискретну, абсолютно неперервну та неперервно сингулярну компоненти*

$$F_\xi(x) = aF_d(x) + bF_{ac}(x) + cF_{sc}(x) \quad (a + b + c = 1) \tag{9}$$

один із коефіцієнтів дорівнює 1, а два інших — 0.

Доведення. За теоремою 3.1, розподіл в.в. ξ є або чисто дискретним, або чисто неперервним. Покажемо, що у випадку неперервності розподіл є або чисто абсолютно неперервним, або чисто сингулярно неперервним.

Нехай W_{A_2} — множина всіх циліндричних відрізків та інтервалів ланцюгового A_2-зображення. Мінімальна σ-алгебра $\mathfrak{F}$, що містить W_{A_2}, співпадає з σ-алгеброю борелівських множин відрізка $[\beta_1, \beta_2]$.

Нехай $\delta_1, \dots, \delta_n$ — фіксовані числа з множини A_2. Позначимо через $T_{\delta_1\dots\delta_n}(x)$ перетворення точки $x = [a_1, \dots, a_k, \dots]$ таке, що

$$T_{\delta_1\dots\delta_n}(x) = [\delta_1, \dots, \delta_n, a_1, \dots, a_k, \dots].$$

Для довільної борелівської множини $E \subset [\beta_1, \beta_2]$ покладемо:

$$T_{\delta_1\dots\delta_n}(E) = \{y :\ y = T_{\delta_1\dots\delta_n}(x),\ x \in E\}, \quad T_0(E) = E,$$
$$T_n(E) = \bigcup_{\delta_1,\dots,\delta_n \in A_2} T_{\delta_1\dots\delta_n}(E), \quad T(E) = \bigcup_{n=0}^{\infty} T_n(E).$$

Розглянемо подію $A = \{\xi \in T(E)\}$. Оскільки випадкові величини η_k є незалежними, то подія A є залишковою відносно всіх σ-алгебр $\mathfrak{B}_k$, породжених першими k елементами $\eta_1, \dots, \eta_k$ (для довільного скінченного k). Тоді за законом 0 і 1 Колмогорова $P(A) = 0$ або $P(A) = 1$.

Легко бачити, що міри Лебега множин $T_{\delta_1\ldots\delta_n}(E)$ і E додатні або рівні нулю одночасно, оскільки функція $y=[\delta_1,\ldots,\delta_n+x]$ є абсолютно неперервною і строго монотонною на $[\beta_1,\beta_2]$. Якщо $\lambda(T_{\delta_1\ldots\delta_n}(E))=0$, то $\lambda(T_n(E))=0$ і $\lambda(T(E))=0$. Оскільки $E\subseteq T(E)$, то з нерівності $P\{\xi\in E\}>0$ випливає, що $P\{\xi\in T(E)\}\geq P\{\xi\in E\}>0$, а тому $P\{\xi\in T(E)\}=1$.

Оскільки в.в. ξ неперервно розподілена, можливий один із наступних двох випадків:

1) Існує множина E така, що $\lambda(E)=0$, але $P\{\xi\in E\}>0$. Тоді

$$P\{\xi\in T(E)\}=1$$

і $\lambda(T(E))=0$, тобто розподіл ξ є чисто неперервно сингулярним за означенням.

2) Для довільної множини E з того, що $\lambda(E)=0$ випливає, що

$$P\{\xi\in E\}=0.$$

Тоді розподіл ξ є абсолютно неперервним за означенням.

Таким чином, розподіл ξ є чистим. □

5. Сингулярність розподілу ξ при $\alpha_1\alpha_2=\frac{1}{2}$

Будемо далі вважати, що в.в. ξ розподілена неперервно, а $\alpha_1\alpha_2=\frac{1}{2}$. Знаменник підхідного дробу порядку k ланцюгового дробу $[a_1,\ldots,a_k\ldots]$ будемо позначати $q(a_1,\ldots,a_k)\equiv q_k(x)\equiv q_k$.

Лема 5.1. *Якщо в A_2-ірраціональній точці $x=[a_1,a_2,\ldots,a_k\ldots]$ функція розподілу $F_\xi(x)$ має скінченну похідну, причому $\alpha_1\alpha_2=\frac{1}{2}$, то її значення можна обчислити за формулою:*

$$F'_\xi(x)=\frac{1}{\beta_2-\beta_1}\lim_{k\to\infty}(q_k(x)+\beta_1q_{k-1}(x))(q_k(x)+\beta_2q_{k-1}(x))\prod_{i=1}^{k}p_{a_i(x)i}. \tag{10}$$

Доведення. Очевидно, що

$$F'_\xi(x)=\lim_{k\to\infty}\frac{P\{\xi\in\Delta_{a_1\ldots a_k}\}}{|\Delta_{a_1\ldots a_k}|}.$$

Оскільки в.в. ξ має неперервний розподіл, то $P\{\xi\in\Delta_{a_1\ldots a_k}\}=P\{\xi\in\nabla_{a_1\ldots a_k}\}$. Враховуючи формулу (3) імовірності циліндра та формулу довжини циліндра (див. [3]), отримаємо:

$$\begin{aligned}F'_\xi(x)&=\lim_{k\to\infty}\frac{\prod_{i=1}^{k}p_{a_i(x)i}}{|\Delta_{a_1\ldots a_k}|}\\&=\frac{1}{\beta_2-\beta_1}\lim_{k\to\infty}(q_k(x)+\beta_1q_{k-1}(x))(q_k(x)+\beta_2q_{k-1}(x))\prod_{i=1}^{k}p_{a_i(x)i}.\end{aligned}$$ □

Теорема 5.1. *Для майже всіх (в смислі міри Лебега) $x\in[\beta_1,\beta_2]$ має місце нерівність:*

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[k]{q_k(x)}\leq\sqrt{2}.$$

Доведення. Нехай $p_{\alpha_1k}=p_{\alpha_2k}=\frac{1}{2}$ для всіх $k=1,2,\ldots$. Відомо, що кожна функція розподілу майже всюди в розумінні міри Лебега має скінченну похідну, отже,

$$F'_\xi(x)=\frac{1}{\beta_2-\beta_1}\lim_{k\to\infty}Q_k(x)\left(\frac{1}{2}\right)^k=c,$$

де $0 \le c < +\infty$ і $Q_k(x) = (q_k(x) + \beta_1 q_{k-1}(x))(q_k(x) + \beta_2 q_{k-1}(x))$. Звідси випливає, що

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{Q_k(x)\left(\frac{1}{2}\right)^k} \le 1,$$

або

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{Q_k(x)} \le 2.$$

Тому

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{q_k^2(x)} \le \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{Q_k(x)} \le 2$$

і $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{q_k(x)} \le \sqrt{2}$. □

Нехай $\widetilde{q}(\eta_1, \dots, \eta_n) = \widetilde{q}_n$ — випадкова величина, визначена рекурентно:

$$\widetilde{q}_0 \equiv 1;$$
$$\widetilde{q}_1 \equiv \eta_1;$$
$$\widetilde{q}_n = \eta_n \widetilde{q}_{n-1} + \widetilde{q}_{n-2},\ n \ge 2.$$

Лема 5.2. *Якщо в.в. η_k — незалежні однаково розподілені, то математичне сподівання в.в. $\widetilde{q}_n$ обчислюється за формулою:*

$$M\widetilde{q}_n = \frac{1}{\sqrt{a^2+4}}\left(\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2}\right)^{n+1}\right), \tag{11}$$

де $a = M\eta_k$.

Доведення. Очевидно, що $M\widetilde{q}_0 = 1$, $M\widetilde{q}_1 = M\eta_1 = a$. Оскільки $\widetilde{q}_n = \eta_n\widetilde{q}_{n-1} + \widetilde{q}_{n-2}$, де η_n і $\widetilde{q}_{n-1}$ — незалежні, то

$$M\widetilde{q}_n = M\eta_n M\widetilde{q}_{n-1} + M\widetilde{q}_{n-2} = aM\widetilde{q}_{n-1} + M\widetilde{q}_{n-2}.$$

Значення $M\widetilde{q}_n$ співпадає із значенням знаменника $q(\underbrace{a, \dots, a}_{n})$, тому, застосувавши формулу для обчислення значення $q(\underbrace{a, \dots, a}_{n})$ (див. [4]), отримуємо формулу (11). □

Лема 5.3. *Для довільного натурального k має місце наступна рівність:*

$$q(a_k, a_{k-1}, \dots, a_1) = q(a_1, a_2, \dots, a_k). \tag{12}$$

Доведення. Застосовуючи правило утворення знаменників підхідних дробів (див. [3]), легко впевнитися, що при $k = 1, 2, 3, 4$ рівність (12) виконується:

$$q(a_1) = a_1 = q(a_1);$$
$$q(a_1, a_2) = a_1a_2 + 1 = q(a_2, a_1);$$
$$q(a_1, a_2, a_3) = a_1a_2a_3 + a_3 + a_1 = q(a_3, a_2, a_1);$$
$$q(a_1, a_2, a_3, a_4) = a_1a_2a_3a_4 + a_3a_4 + a_1a_4 + a_1a_2 + 1 = q(a_4, a_3, a_2, a_1).$$

Припустимо, що рівність (12) виконується при всіх $k < n$, де $n > 4$. Тоді при $k = n$ маємо:

$$\begin{aligned}
&q(a_1, \dots, a_n) = a_n q(a_1, \dots, a_{n-1}) + q(a_1, \dots, a_{n-2}) = \\
&= a_1 a_n q(a_{n-1}, \dots, a_2) + a_n q(a_{n-1}, \dots, a_3) + q(a_1, \dots, a_{n-2}) = \\
&= a_1 a_n q(a_{n-1}, \dots, a_2) + a_n q(a_{n-1}, \dots, a_3) + \\
&+ a_1 q(a_2, \dots, a_{n-2}) + q(a_3, \dots, a_{n-2}); \\
&q(a_n, \dots, a_1) = a_1 q(a_n, \dots, a_2) + q(a_n, \dots, a_3) = \\
&= a_1 a_n q(a_{n-1}, \dots, a_2) + a_1 q(a_{n-2}, \dots, a_2) + q(a_n, \dots, a_3) = \\
&= a_1 a_n q(a_{n-1}, \dots, a_2) + a_1 q(a_{n-2}, \dots, a_2) + \\
&+ a_n q(a_{n-1}, \dots, a_3) + q(a_3, \dots, a_{n-2}),
\end{aligned}$$

звідки випливає рівність $q(a_1, \dots, a_n) = q(a_n, \dots, a_1)$. Отже, рівність (12) має місце для всіх натуральних k. □

Покладемо за означенням $q(\varnothing) = 1$.

Лема 5.4. *Для довільних натуральних k і m має місце рівність:*

$$q(a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_m) = q(a_1, \dots, a_k) q(b_1, \dots, b_m) + q(a_1, \dots, a_{k-1}) q(b_2, \dots, b_m). \tag{13}$$

Доведення. Враховуючи рівність $q(a_1) = a_1$ і лему 5.3, у випадку $k = 1$ і $m = 1$ маємо:

$$q(a_1, b_1) = a_1 b_1 + 1 = q(a_1) q(b_1) + q(\varnothing) q(\varnothing),$$

тобто рівність (13) виконується.

Якщо $k = 2$ і $m = 2$, то:

$$\begin{aligned}
&q(a_1 a_2 b_1 b_2) = a_1 a_2 b_1 b_2 + b_1 b_2 + a_1 b_2 + a_1 a_2 + 1 = \\
&= b_1 b_2 (a_1 a_2 + 1) + a_1 b_2 + a_1 a_2 + 1 = (a_1 a_2 + 1)(b_1 b_2 + 1) + a_1 b_2 = \\
&= q(a_1, a_2) q(b_1 b_2) + q(a_1) q(b_2),
\end{aligned}$$

тобто рівність (13) також виконується.

Припустимо, що рівність (13) виконується у випадку $k \le s$, $m \le t$. Розглянемо випадок $k = s$, $m = t + 1$:

$$\begin{aligned}
&q(a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_t, b_{t+1}) = \\
&= b_{t+1} q(a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_t) + q(a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_{t-1}) = \\
&= b_{t+1} (q(a_1, \dots, a_s) q(b_1, \dots, b_t) + q(a_1, \dots, a_{s-1}) q(b_2, \dots, b_t)) + \\
&+ q(a_1, \dots, a_s) q(b_1, \dots, b_{t-1}) + q(a_1, \dots, a_{s-1}) q(b_2, \dots, b_{t-1}) = \\
&= q(a_1, \dots, a_s)(b_{t+1} q(b_1, \dots, b_t) + q(b_1, \dots, b_{t-1})) + \\
&+ q(a_1, \dots, a_{s-1})(b_{t+1} q(b_2, \dots, b_t) + q(b_2, \dots, b_{t-1})) = \\
&= q(a_1, \dots, a_s) q(b_1, \dots, b_{t+1}) + q(a_1, \dots, a_{s-1}) q(b_2, \dots, b_{t+1}).
\end{aligned}$$

Нехай тепер $k = s + 1$, $m = t$. Беручи до уваги, що рівність (13) виконується у випадку $k \le s$, $m \le t + 1$, маємо:

$$\begin{aligned}
&q(a_1, \dots, a_{s+1} b_1, \dots, b_t) = \\
&= q(a_1, \dots, a_s) q(a_{s+1}, b_1, \dots, b_t) + q(a_1, \dots, a_{s-1}) q(b_1, \dots, b_t) = \\
&= q(a_1, \dots, a_s)(a_{s+1} q(b_1, \dots, b_t) + q(b_t, \dots, b_2)) + \\
&+ q(a_1, \dots, a_{s-1}) q(b_1, \dots, b_t) = (a_{s+1} q(a_1, \dots, a_s) + \\
&+ q(a_1, \dots, a_{s-1}) q(b_1, \dots, b_t) + q(a_1, \dots, a_s) q(b_t, \dots, b_2) = \\
&= q(a_1, \dots, a_{s+1}) q(b_1, \dots, b_t) + q(a_1, \dots, a_s) q(b_2, \dots, b_t).
\end{aligned}$$

Таким чином, з припущення, що рівність (13) виконується у випадку $k \le s$, $m \le t$ випливає, що рівність (13) має місце, якщо $k \le s$, $m \le t + 1$ і якщо $k \le s + 1$, $m \le t$. Отже, рівність (13) виконується для всіх натуральних k і m. $\square$

Лема 5.5. *Для довільних натуральних $n \ge 2$ і $k \ge 2$ має місце подвійна нерівність:*

$$\prod_{j=1}^{n} q(a_{(j-1)k+1}, \dots, a_{(j-1)k+k}) < q_{nk} < \left(\frac{\alpha_1^2 + 1}{\alpha_1^2}\right)^{n-1} \prod_{j=1}^{n} q(a_{(j-1)k+1}, \dots, a_{(j-1)k+k}), \tag{14}$$

де $q_{nk} = q(a_1, \dots, a_{nk})$.

Доведення. Оскільки $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$ (див. [3]), то $q_n > a_n q_{n-1}$ і $q_{n-1} < \frac{1}{\alpha_1} q_n$. Тоді, враховуючи рівності (12) і (13), маємо:

$$\begin{aligned}
&q(a_1, a_2, \dots, a_{nk}) = \\
&= q(a_1, \dots, a_k) q(a_{k+1}, \dots, a_{nk}) + q(a_1, \dots, a_{k-1}) q(a_{k+2}, \dots, a_{nk}) < \\
&< q(a_1, \dots, a_k) q(a_{k+1}, \dots, a_{nk}) + \frac{1}{\alpha_1} q(a_1, \dots, a_k) \frac{1}{\alpha_1} q(a_{k+1}, \dots, a_{nk}) = \\
&= \left(\frac{\alpha_1^2 + 1}{\alpha_1^2}\right) q(a_1, \dots, a_k) q(a_{k+1}, \dots, a_{nk}) < \dots < \\
&< \left(\frac{\alpha_1^2 + 1}{\alpha_1^2}\right)^{n-1} \prod_{j=1}^{n} q(a_{(j-1)k+1}, a_{(j-1)k+2}, \dots, a_{jk}).
\end{aligned}$$

Доведемо ліву частину:

$$\begin{aligned}
&q(a_1, a_2, \dots, a_{nk}) = \\
&= q(a_1, \dots, a_k) q(a_{k+1}, \dots, a_{nk}) + q(a_1, \dots, a_{k-1}) q(a_{k+2}, \dots, a_{nk}) > \\
&> q(a_1, \dots, a_k) q(a_{k+1}, \dots, a_{nk}) > \dots > \\
&> \prod_{j=1}^{n} q(a_{(j-1)k+1}, a_{(j-1)k+2}, \dots, a_{jk}). \quad \square
\end{aligned}$$

Лема 5.6. *Якщо в.в. η_k незалежні однаково розподілені, то для в.в. ξ має місце рівність:*

$$P\left\{\xi \in \left\{x : \lim_{m \to \infty} \sqrt[m]{q_m(x)} = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4}}{2}\right\}\right\} = 1,$$

де a — математичне сподівання в.в. η_k.

Доведення. Враховуючи, що для всіх $x \in [\beta_1, \beta_2]$

$$\frac{1}{q_n(x)} = \prod_{k=1}^{n} [a_k, a_{k+1}, \dots, a_n]$$

(див. [1]) і застосовуючи мультиплікативну ергодичну теорему, маємо, що з імовірністю 1 існує скінченна границя $\lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{q_m(x)}$. Обчислимо її значення.

З леми 5.5 випливає, що

$$q(a_1, a_2, \dots, a_{nk}) < \left(\frac{\alpha_1^2+1}{\alpha_1^2}\right)^n q(a_1, \dots, a_k) q(a_{k+1}, \dots, a_{2k}) \cdot \ldots \cdot q(a_{(n-1)k+1}, \dots, a_{nk}),$$

де n, k — додатні цілі. Використавши нерівності для середніх, отримаємо

$$q^{\frac{1}{nk}}(a_1, a_2, \dots, a_{nk}) <$$
$$< \left(\frac{\alpha_1^2+1}{\alpha_1^2}\right)^{\frac{1}{k}} \left(\sqrt[n]{q(a_1, \dots, a_k) q(a_{k+1}, \dots, a_{2k}) \cdot \ldots \cdot q(a_{(n-1)k+1}, \dots, a_{nk})}\right)^{\frac{1}{k}} \le$$
$$\le \left(\frac{\alpha_1^2+1}{\alpha_1^2}\right)^{\frac{1}{k}} \left(\frac{q(a_1, \dots, a_k) + q(a_{k+1}, \dots, a_{2k}) + \ldots + q(a_{(n-1)k+1}, \dots, a_{nk})}{n}\right)^{\frac{1}{k}}.$$

Нехай

$$F = \left\{x : \lim_{n\to\infty} \frac{q(a_1, \dots, a_k) + q(a_{k+1}, \dots, a_{2k}) + \ldots + q(a_{(n-1)k+1}, \dots, a_{nk})}{n} = M\widetilde{q}_k\right\}.$$

Оскільки всі η_k незалежні і однаково розподілені, то в.в.

$$\widetilde{q}^{(i)} = \widetilde{q}(\eta_{(i-1)(k+1)}, \dots, a\eta_{ik}),$$

де $i = 1, \dots, n$, також є незалежними однаково розподіленими, для яких виконується посилений закон великих чисел:

$$\frac{\widetilde{q}^{(1)} + \ldots + \widetilde{q}^{(n)}}{n} \to M\widetilde{q}(\eta_1, \dots, \eta_k) = M\widetilde{q}_k$$

при $n \to \infty$ з імовірністю 1. Оскільки $\xi = [\eta_1, \dots, \eta_k, \dots]$, то $P\{\xi \in F\} = 1$. Використовуючи формулу (11) для математичного сподівання $M\widetilde{q}(\eta_1, \dots, \eta_k)$, для всіх $x \in F$ і k — натурального отримаємо:

$$\lim_{n\to\infty} q^{\frac{1}{nk}}(a_1, \dots, a_{nk}) \le$$
$$\le \left(\frac{\alpha_1^2+1}{\alpha_1^2}\right)^{\frac{1}{k}} \left(\frac{1}{\sqrt{a^2+4}}\left(\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2}\right)^{k+1}\right)\right)^{\frac{1}{k}}.$$

Тут порядок знаменника зростає по числах, кратних k. Але оскільки

$$q^{\frac{1}{m}}(a_1, \dots, a_m) < \left(q(a_1, \dots, a_k) q(a_{k+1}, \dots, a_{2k}) \cdot \ldots \cdot q(a_{(n-1)k+1}, \dots, a_{nk})\right)^{\frac{1}{k(n-1)}},$$

де $k(n-1) \le m < kn$, то для всіх натуральних k

$$\lim_{\substack{k(n-1)\le m<kn \\ n\to\infty}} q^{\frac{1}{m}}(a_1, \dots, a_m) \le$$
$$\le \left(\frac{\alpha_1^2+1}{\alpha_1^2}\right)^{\frac{1}{k}} \left(\frac{1}{\sqrt{a^2+4}}\left(\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2}\right)^{k+1}\right)\right)^{\frac{1}{k}}.$$

Переходячи до границі в правій частині при $k \to \infty$, отримуємо, що для всіх $x \in F$

$$\lim_{m\to\infty} q^{\frac{1}{m}}(a_1, \dots, a_m) \le \frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}. \tag{15}$$

Таким чином, $P\{\xi \in F\} = 1$.

Нехай

$$G = \left\{x : \quad \lim_{m\to\infty} q^{\frac{1}{m}}(a_1, \dots, a_m) < \frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}\right\}.$$

Тоді для $\forall x \in G$ $\lim_{m\to\infty}\left(\frac{q_m}{\tau^m}\right)^{\frac{1}{m}} < 1$, де $\tau = \frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}$. Тому ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{q_m}{\tau^m}$ збігається. Але очевидно, що ряд, складений з математичних сподівань, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} M\frac{\widetilde{q}_m}{\tau^m}$ розбігається з імовірністю 1. Оскільки з (15) слідує, що існує достатньо велике $c > 0$ таке, що $P\left\{\frac{\widetilde{q}_m}{\tau^m} \le c\right\} = 1$, $m = 1, 2, \ldots$, то, як випливає з теореми Колмогорова про два ряди, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\widetilde{q}_m}{\tau^m}$ розбігається з імовірністю 1, а тому $P\{\xi \in G\} = 0$.

Таким чином,

$$P\left\{\xi \in \left\{x: \quad \lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{q_m(x)} = \frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}\right\}\right\} = 1. \quad \square$$

Наслідок 5.1. *Для майже всіх (в смислі міри Лебега) $x \in [\beta_1, \beta_2]$ має місце рівність:*

$$\lim_{k\to\infty}\frac{q_k}{(\sqrt{2})^k} = 0.$$

Доведення. Нехай $p_{\alpha_1 k} = p_{\alpha_2 k} = \frac{1}{2}$ для всіх $k = 1, 2, \ldots$. Розглянемо множину

$$E = \left\{x: \quad \lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{q_m(x)} = \frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}\right\},$$

де $a = M\eta_k = \frac{3}{4}$. Очевидно, що розподіл ξ є неперервним. З теореми 5.1 випливає, що міра Лебега множини E $\lambda(E) = 0$, а з леми 5.6 — що $P\{\xi \in E\} = 1$. Тому розподіл ξ є чисто сингулярним, і для майже всіх $x \in [\beta_1, \beta_2]$

$$F'_\xi(x) = \frac{1}{\beta_2-\beta_1}\lim_{k\to\infty}(q_k(x)+\beta_1 q_{k-1}(x))(q_k(x)+\beta_2 q_{k-1}(x))\left(\frac{1}{2}\right)^k \ge$$
$$\ge \frac{1}{\beta_2-\beta_1}\lim_{k\to\infty}q_k^2(x)\left(\frac{1}{2}\right)^k = 0,$$

звідки випливає (5.1). $\square$

Теорема 5.2. *Нехай в.в. ξ має неперервний розподіл, тобто $M = 0$, і $\alpha_1\alpha_2 = \frac{1}{2}$. Якщо кількість нулів в матриці $\|p_{ik}\|$ скінченна, то ξ має сингулярний розподіл салемівського типу (S-типу).*

Доведення. За умовою, η_k — незалежні дискретно розподілені випадкові величини, такі що $p\{\eta_k = \alpha_1\} = p_{\alpha_1 k}$, $p\{\eta_k = \alpha_2\} = p_{\alpha_2 k}$, $p_{\alpha_1 k} + p_{\alpha_2 k} = 1$ $\forall k = 1, 2, \ldots$,

$$\prod_{k=1}^{\infty}\max\{p_{\alpha_1 k}, p_{\alpha_2 k}\} = 0,$$

і існує номер k_0 такий, що для всіх $k > k_0$ $p_{\alpha_1 k} > 0$ і $p_{\alpha_2 k} > 0$.

З теорем 4.2 і 3.1 випливає, що ξ має чисто абсолютно неперервний або чисто сингулярний розподіл. Припустимо, що розподіл ξ є абсолютно неперервним. Тоді функція розподілу $F_\xi(x)$ повинна мати скінченну похідну, відмінну від нуля, на множині додатної міри Лебега.

Нехай $\ln\widetilde{p}_{a_i}$ $(i = 1, 2, \ldots)$— незалежні випадкові величини, де $\widetilde{p}_{a_i} = p_{\alpha_1 i}$, якщо $\eta_i = \alpha_1$, і $\widetilde{p}_{a_i} = p_{\alpha_2 i}$, якщо $\eta_i = \alpha_2$. Знайдемо математичне сподівання та дисперсію в.в. $\ln\widetilde{p}_{a_i}$:

$$M\ln\widetilde{p}_{a_i} = \ln p_{\alpha_1 i}^{p_{\alpha_1 i}}(1-p_{\alpha_1 i})^{1-p_{\alpha_1 i}},$$
$$D\ln\widetilde{p}_{a_i} = \ln^2 p_{\alpha_1 i}^{p_{\alpha_1 i}} + \ln^2(1-p_{\alpha_1 i})^{1-p_{\alpha_1 i}} - \ln^2\left(p_{\alpha_1 i}^{p_{\alpha_1 i}}(1-p_{\alpha_1 i})^{1-p_{\alpha_1 i}}\right).$$

Оскільки на проміжку $(0,1)$ функція $y = \ln^2 x^x + \ln^2(1-x)^{1-x} - \ln^2\left(x^x(1-x)^{1-x}\right)$ є обмеженою, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{D \ln \widetilde{p}_{a_k}}{k^2}$ збігається, і має місце посилений закон великих чисел: $P\{\xi \in W\} = 1$, де множина W визначена наступним чином:

$$W = \left\{ x : \quad \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k-k_0+1} \sum_{i=k_0}^{k>k_0} \ln p_{a_i(x)i} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k-k_0+1} \sum_{i=k_0}^{k>k_0} M \ln \widetilde{p}_{a_i} \right\}.$$

За припущенням, розподіл ξ є абсолютно неперервним, тому міра Лебега $\lambda(W) = \lambda(S_\xi) > 0$. Визначимо множину $L = \{x : \quad \lim_{k\to\infty} \frac{q_k(x)}{(\sqrt{2})^k} = 0\}$. За наслідком 5.1, $\lambda(L) = \beta_2 - \beta_1$, тому $\lambda(W \cap L) = \lambda(S_\xi) > 0$.

Для кожного $x \in W \cap L$ мають місце співвідношення:

$$F'_\xi(x) = \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} \lim_{k\to\infty} (q_k(x) + \beta_1 q_{k-1}(x))(q_k(x) + \beta_2 q_{k-1}(x)) \prod_{i=1}^{k} p_{a_i(x)i} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} \lim_{k\to\infty} (q_k(x) + \beta_1 q_{k-1}(x))(q_k(x) + \beta_2 q_{k-1}(x)) \prod_{i=k_0}^{k>k_0} p_{a_i(x)i} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} \lim_{k\to\infty} q_k^2 e^{\ln \prod_{i=k_0}^{k>k_0} p_{a_i(x)i}} = \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} \lim_{k\to\infty} q_k^2 e^{\sum\limits_{i=k_0}^{k>k_0} \ln p_{a_i(x)i}} =$$

$$= \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} \lim_{k\to\infty} q_k^2 e^{\sum\limits_{i=k_0}^{k>k_0} M \ln \widetilde{p}_{a_i}} = \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} \lim_{k\to\infty} q_k^2 e^{\sum\limits_{i=k_0}^{k>k_0} \ln p_{\alpha_1 i}^{p_{\alpha_1 i}} (1-p_{\alpha_1 i})^{1-p_{\alpha_1 i}}} =$$

$$= \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} \lim_{k\to\infty} q_k^2 e^{\ln \prod_{i=k_0}^{k>k_0} p_{\alpha_1 i}^{p_{\alpha_1 i}} (1-p_{\alpha_1 i})^{1-p_{\alpha_1 i}}} =$$

$$= \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} \lim_{k\to\infty} q_k^2 \prod_{i=k_0}^{k>k_0} p_{\alpha_1 i}^{p_{\alpha_1 i}} (1-p_{\alpha_1 i})^{1-p_{\alpha_1 i}}.$$

Оскільки функція $y = x^x(1-x)^{1-x}$ на $(0,1)$ набуває найбільшого значення, що дорівнює $\frac{1}{2}$, то

$$F'_\xi(x) \leq \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} \lim_{k\to\infty} q_k^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{k-k_0+1} = 0$$

для всіх $x \in W \cap L$, тобто майже всюди на S_ξ, що суперечить припущенню про абсолютну неперервність розподілу ξ. Таким чином, в.в. ξ має чисто сингулярний розподіл. Оскільки кількість нулів в матриці $\|p_{ik}\|$ скінченна, то легко переконатися, що спектр є об'єднанням відрізків, тому ξ має сингулярний розподіл салемівського типу (S-типу). □

Теорема 5.3. *Нехай в.в. ξ має неперервний розподіл, тобто $M = 0$ і $\alpha_1\alpha_2 = \frac{1}{2}$. Для того, щоб в.в. ξ мала сингулярний розподіл канторівського типу (C-типу), необхідно і достатньо, щоб матриця $\|p_{ik}\|$ містила нескінченну кількість нулів.*

Доведення. Необхідність є очевидною. Доведемо достатність.

Нехай $F_0 = [\beta_1, \beta_2]$, F_k — об'єднання циліндрів k-го рангу, серед внутрішніх точок яких є точки спектра S_ξ. Тоді $S_\xi = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k$ і міра Лебега спектра $\lambda(S_\xi)$ задовільнює рівностям:

$$\lambda(S_\xi) = \lim_{k\to\infty} \lambda(F_k) = \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} \lim_{k\to\infty} \frac{\lambda(F_k)}{\lambda(F_{k-1})} \cdot \frac{\lambda(F_{k-1})}{\lambda(F_{k-2})} \cdot \ldots \cdot \frac{\lambda(F_1)}{\lambda(F_0)} =$$
$$= \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(F_k)}{\lambda(F_{k-1})}.$$

Нехай $D_k = F_{k-1} \setminus F_k$. Тоді $F_{k-1} = F_k \cup D_k$, $D_k \cap S_\xi = \varnothing$ і тому

$$\lambda(F_{k-1}) = \lambda(F_k) + \lambda(D_k),$$
$$\frac{\lambda(F_{k-1})}{\lambda(F_{k-1})} = \frac{\lambda(F_k)}{\lambda(F_{k-1})} + \frac{\lambda(D_k)}{\lambda(F_{k-1})}$$
$$\frac{\lambda(F_k)}{\lambda(F_{k-1})} = 1 - \frac{\lambda(D_k)}{\lambda(F_{k-1})}.$$

Отже,

$$\lambda(S_\xi) = \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda(D_k)}{\lambda(F_{k-1})}\right).$$

Покажемо, що ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(D_{k+1})}{\lambda(F_k)}$ розбігається. Очевидно, що існують такі значення k, що $p_{a_{k-1}k+1} = 0$. Для таких k маємо (див. також [3]):

$$\frac{|\Delta_{a_1\ldots a_k c}|}{|\Delta_{a_1\ldots a_k}|} = \frac{(1 + c\frac{q_{n-1}}{q_n})}{2c^2 + 1 + 2c\frac{q_{n-1}}{q_n}} >$$
$$> \frac{1 + c\theta_1}{2c^2 + 1 + 2c\theta_2} = \gamma > 0,$$

де $\theta_1 = \frac{1}{\alpha_2 + \frac{1}{\alpha_1}}$, $\theta_2 = \frac{1}{\alpha_1}$, і тоді

$$\frac{\lambda(D_{k+1})}{\lambda(F_k)} = \frac{\sum\limits_{\substack{p_{a_i i}>0,\ i=\overline{1,k} \\ p_{a_{k+1}k+1}=0}} |\Delta_{a_1\ldots a_{k+1}}|}{\sum\limits_{p_{a_i i}>0,\ i=\overline{1,k}} |\Delta_{a_1\ldots a_k}|} \geq \gamma > 0.$$

Оскільки нулів у матриці $\|p_{ik}\|$ нескінченна кількість, то відношення $\frac{\lambda(D_{k+1})}{\lambda(F_k)}$ відокремлене від нуля для нескінченної кількості значень k, і тому ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(D_{k+1})}{\lambda(F_k)}$ розбігається.

Таким чином, міра Лебега спектра $\lambda(S_\xi)$ дорівнює нулю і розподіл ξ є сингулярним канторівського типу. □

Література

1. П. Биллингсли, *Эргодическая теория и информация*, "Мир", Москва, 1969.
2. Я. Ф. Виннишин, *Випадкові ланцюгові дроби, що задаються незалежними елементами, та їх функції розподілу*, Наукові записки НПУ імені М. П. Драгоманова. Фізико-математичні науки **2** (2001), 319–326.
3. С. О. Дмитренко, Д. В. Кюрчев, М. В. Працьовитий, *Ланцюгове A_2-зображення дійсних чисел та його геометрія*, Укр. мат. журнал **61** (2009), № 4, 452–463.
4. Д. В. Кюрчев, *Про розмірність Хаусдорфа–Безиковича деяких множин ланцюгових дробів*, Наук. часопис НПУ ім. М. П. Драгоманова, Серія 1. Фізико-математичні науки **4** (2004), 285–291.

5. О. Л. Лещинський, М. В. Працьовитий, *Один клас сингулярних розподілів випадкових величин, представлених елементарним ланцюговим дробом з незалежними елементами*, Сучасні фізико-математичні дослідження молодих науковців вузів України, Зб. наук. праць, Київ. нац. ун-т ім. Т. Г. Шевченка, Київ, 1995, 20–30.
6. М. В. Працьовитий, *Сингулярність розподілів випадкових величин, заданих розподілами елементів свого ланцюгового зображення*, Укр. мат. журнал **48** (1996), № 8, 1086–1095.
7. М. В. Працьовитий, *Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів*, НПУ імені М. П. Драгоманова, Київ, 1998.
8. А. Я. Хинчин, *Цепные дроби*, "Наука", Москва, 1978.
9. A. Goswami, *Random continued fractions: a Markov chain approach*, Economic Theory **23** (2004), 85–105.
10. R. Lyons, *Singularity of Some Random Continued Fractions*, Journal of Theoretical Probability **13** (2000), № 2, 535–545.
11. M. Pratsiovytyi and D. Kyurchev, *Properties of the distribution of the random variable defined by A_2-continued fraction with independent elements*, Random Operators and Stochastic Eqs. **17** (2009), № 1, 91–101.

Кафедра вищої математики, Фізико-математичний інститут, Національний педагогічний університет ім. М. П. Драгоманова, вул. Пирогова, 9, Київ 01030, Україна
Адреса електронної пошти: prats4@yandex.ru

Відділ фрактального аналізу, Фізико-математичний інститут, Національний педагогічний університет ім. М.П. Драгоманова, вул. Пирогова, 9, Київ 01030, Україна
Адреса електронної пошти: d_kyurchev@ukr.net

Надійшла 14/07/2009