Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 81. 2009, стор. 155–163

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 81, 2009, pp. 155–163

АРБІТРАЖ У МОДЕЛІ ФІНАНСОВОГО РИНКУ З ДИСКРЕТНИМ ЧАСОМ ЗА НАЯВНОСТІ ПРОПОРЦІЙНОГО ПОДАТКУ НА ВЕЛИЧИНУ ПОРТФЕЛЯ

УДК 519.21

Г. М. ШЕВЧЕНКО

Анотація. Для багатоперіодної моделі фінансового ринку з дискретним часом уведено поняття V^ε- арбітражу, або арбітражу за наявності пропорційного податку на величину портфеля. Для цього поняття доведено теорему, аналогічну до класичної фундаментальної теореми для звичайного арбітражу. Проаналізовано відмінності запропонованого поняття від існуючих.

Abstract. For the multi-period discrete time financial market model we introduce the notion of V^ε-arbitrage, or arbitrage in the presence of a proportional tax on the portfolio size. For this notion we prove the theorem, analogous to the classical fundamental asset pricing theorem. We analyze the differences of the proposed notion from the existing ones.

Аннотация. Для многопериодной модели финансового рынка с дискретным временем введено понятие V^ε- арбитража, или арбитража при наличии пропорционального налога на величину портфеля. Для этого понятия доказана теорема, аналогичная классической фундаментальной теореме для обычного арбитража. Проанализированы отличия предложенного понятия от существующих.

Вступ

Відсутність арбітражу — це перше питання, яке виникає щодо кожної математичної моделі фінансового ринку. Найважливіший результат про зв'язок відсутності арбітражу з існуванням еквівалентної мартингальної міри було вперше доведено у [1]. Інші доведення цього факту, а також інші рівносильні твердження наведено у [2, 6].

Чому це поняття є важливим і чому припускають, що моделі є безарбітражними? Найпопулярнішим поясненням є таке: коли арбітраж існує, він призводить до зростання попиту на арбітражні позиції, тобто до зростання попиту одних активів і пропозиції інших, внаслідок чого ціни повертаються до слушних рівнів. Але сучасні дослідження проблеми арбітражу показують, що наявність арбітражу зовсім не означає, що попит на нього буде великим. Спробуємо пояснити цю тезу, яка здається абсурдною.

Арбітраж часто веде до необмежених позицій, що створює особливу проблему, коли ці позиції від'ємні. Найпростішою ілюстрацією до цього є мартингальна система ставок (подвоєння ставки при програші у простій грі в орлянку). Будучи арбітражем по суті, в реальності вона веде до швидкого зростання ставок при програші. Врешті, при кількаразовому застосуванні мартингальна стратегія призводить до банкрутства через неможливість зробити чергову ставку.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 91B28.

Ключові слова і фрази. Арбітраж, операційні витрати, портфельні обмеження, мартингальна міра, теорема про вимірний вибір.

В статті [7] автори розглядають арбітражну модель ринку, в якій згодом накладаються обмеження на розмір позицій за ризиковими активами у портфелі. Виявляється, що у такому випадку природна стратегія — вкладати якомога більше в арбітраж — виявляється надто хибною і часто веде до значних збитків. Ще одним висновком авторів є те, що в арбітражної стратегії відношення Шарпа (прибуток до ризику) є доволі малим і часто оптимальним є вкладати в арбітраж набагато меншу суму, ніж та, яку дозволяють портфельні обмеження; нерідко потрібно взагалі ухилитися від використання арбітражної стратегії.

Зазначені проблеми призвели до зростання уваги до ринків, де присутні обмеження на портфель та, можливо, операційні витрати. Останні природно стримують інвестора від великих операцій і, як наслідок, від великих позицій у його портфелі. Література, присвячена ринкам з операційними витратами, є доволі обширною. Ми рекомендуємо монографію [6], де крім викладу найважливіших результатів міститься всебічний огляд існуючої літератури. Ми розглядаємо іншу модель, в якій замість пропорційних операційних витрат наявний пропорційний податок на величину позицій у портфелі. Такий податок також слугує природним стримником і спонукає інвестора на зменшення портфеля. Ця робота продовжує дослідження, започатковані у [9], але в напрямку, відмінному від обраного у [10], де обмеження на портфель виникають не внаслідок певних податків, але є нормативними.

Статтю влаштовано так. У розділі 1 визначаються потрібні терміни і даються основні позначення. Розділ 2 присвячено одноперіодним моделям, у ньому дано огляд результатів з [10] та наведено відповідні аналоги для ринку з податком на розмір портфеля. У розділі 3 наведено основний результат про рівносильність відсутності арбітражу та існування еквівалентної міри, яка є "майже мартингальною". У розділі 4 наведено важливу лему про "сумісну вимірність" регулярного математичного сподівання, яка представляє самостійний інтерес.

1. Основні позначення

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — повний ймовірнісний простір, оснащений фільтрацією $(\mathcal{F}_t)_{t=\overline{0,T}}$, $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$. Ми будемо припускати, що для кожного $t = 1, 2, \ldots, T$ міра P є повною на $\mathcal{F}_t$. Нехай $\overline{S} = \{\overline{S}_t, t = 0, 1, \ldots, T\}$ — узгоджений з $\mathcal{F}_t$ $(d+1)$-вимірний процес (вектор цін). Припустимо, що $S_0^0 = 1$, а $S_t^0 = (1+r)^t$, де $r > 0$ — невипадкова процентна ставка.

Скрізь, крім одноперіодної моделі з випадковими початковими даними, ми припускатимемо, що $\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$.

Стратегією будемо називати $(d+1)$-вимірний процес

$$\overline{\xi} = (\xi^0, \xi) = \{(\xi_t^0, \xi_t^1, \ldots, \xi_t^d), t = 1, \ldots, T\},$$

який є $\mathcal{F}_t$-передбачуваним, тобто для будь-якого t вектор $\overline{\xi}_t$ є $\mathcal{F}_{t-1}$- вимірним.

Стратегію $\overline{\xi} = \{\overline{\xi}_t, t = 1, 2, \ldots T\}$ будемо називати *самофінансованою*, якщо виконується наступне:

$$\overline{\xi}_t \cdot \overline{S}_t = \overline{\xi}_{t+1} \cdot \overline{S}_t, \quad t = 1, \ldots T-1.$$

Тут і далі $x \cdot y$ позначає скалярний добуток векторів x та y.

Означимо *дисконтований ціновий процес*, використовуючи актив S^0:

$$X_t^i := \frac{S_t^i}{S_t^0}, \quad t = 0, \ldots, T; \quad i = 0, \ldots, d.$$

Будемо позначати $\overline{X}_t := (X_t^0, X_t) = (X_t^0, X_t^1, \ldots, X_t^d)$.

Дисконтованим процесом капіталу стратегії $\overline{\xi}$, будемо називати процес, заданий наступним чином:

$$V_0 := \overline{\xi}_1 \cdot \overline{X}_0; \quad V_t := \overline{\xi}_t \cdot \overline{X}_t, \ t = 1, \ldots, T.$$

Добре відомо, що для самофінансованої стратегії $\overline{\xi}$ виконано

$$V_t = V_0 + \sum_{k=1}^{t} \xi_k \cdot \Delta X_k,$$

де $\Delta X_k = X_k - X_{k-1}$.

Наступне означення є рівносильним тому, що наведено у [10].

Означення 1.1. Багатоперіодний фінансовий ринок допускає ε-*арбітраж*, якщо існує самофінансована стратегія $\overline{\xi} = (\overline{\xi_t})$, що є обмеженою в сенсі

$$\sum_{t=0}^{T-1} \|\xi_t\|_1 = \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{i=1}^{d} |\xi_t^i| \leq 1 \qquad \text{м.н.} \tag{1}$$

процес капіталу якої задовольняє умови:

$$V_0 \leq 0, \quad P\{V_T \geq \varepsilon\} = 1, \quad P\{V_T > \varepsilon\} > 0.$$

Зауваження 1.2. Неважко зрозуміти, що ε-арбітраж є арбітражем у звичайному розумінні, але не навпаки. Таким чином, ε-арбітраж — це більше ніж арбітраж, і це відрізняє поняття ε-арбітражу від інших узагальнень, зокрема, від поняття асимптотичного арбітражу, яке розглядалося у [4], [3].

Ми введемо відмінне, але пов'язане з цим означення. Для цього спершу визначимо ε-капітал самофінансованої стратегії.

Означення 1.3. Дисконтованим ε-капіталом самофінансованої стратегії $\overline{\xi} = (\overline{\xi_t})$ назвемо процес

$$V_t^{\varepsilon} = V_0 + \sum_{k=1}^{t} \xi_k \cdot \Delta X_k - \varepsilon \sum_{k=1}^{t} \|\xi_k\|_1 . \tag{2}$$

Зауваження 1.4. Запропоноване означення має прозору практичну інтерпретацію. Про ідеальні моделях фінансового ринку, що розглядаються, наприклад, у [1], кажуть, що в них "відсутнє тертя", тобто інвестор може проводити операції з цінними паперами без обмеження і без впливу на ринок. Останнім часом популярними є дослідження моделей, в яких присутні операційні витрати, див., наприклад, [5]. Натомість у нашій моделі податки беруться пропорційно не до розміру операції, а до розміру портфеля. Якщо розмовляти у фізичних термінах, у нашій моделі тертя створюється масою, а не рухом.

Означення 1.5. Самофінансовану стратегію $\overline{\xi} = \{\overline{\xi_t}, t = 1, 2, \ldots, T\}$ назвемо V^{ε}-арбітражною, якщо $P(V_T^{\varepsilon} \geq 0) = 1$ та $P(V_T^{\varepsilon} > 0) > 0$.

Зауваження 1.6. На перший погляд, поняття V^{ε}-арбітражу не відрізняється від ε-арбітражу (принаймні на одному періоді), адже ми можемо поділити стратегію на її норму. Але саме тут і виникає проблема, оскільки норма може дорівнювати нулю. І ці поняття виявлються насправді відмінними, як показує наступний простий приклад.

Нехай $T = 2$, $d = 1$, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = 2^{\Omega}$, $P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = 1/2$, $r = 0$, $S_0^1 = S_1^1(\omega_1) = S_1^1(\omega_2) = S_2^1(\omega_1) = 1$, $S_2^1(\omega_2) = 1 + 2\varepsilon$. Тоді $X_1 = (0, 0)$, $X_2 = (0, 1 + 2\varepsilon)$. Очевидно, що ε-арбітражу не існує, оскільки $V_2(\omega_2) = 0$ для будь-якої стратегії. З іншого боку, стратегія $\xi_1 = \xi_2(\omega_1) = 0$, $\xi_2(\omega_2) = 1$ є, очевидно, V^{ε}-арбітражною.

У розділі 3 буде доведено, що дане означення рівносильне до наступного, недисконтованого:

Означення 1.7. Стратегія $\{\overline{\xi}_t, t = 1, \ldots, T\}$ є ε-самофінансованою, якщо

$$\overline{\xi}_{t+1} S_t = \overline{\xi}_t - (1 + r) \|\xi_t\|_1 .$$

Така стратегія називається K^ε-арбітражною, якщо $P(K_T \geq 0) = 1$, $P(K_T > 0) > 0$, де

$$K_t = \overline{\xi}_t \cdot \overline{S}_t$$

є капіталом стратегії ξ.

Таке означення ε-самофінансованої стратегії мотивоване тим, що, по-перше, податок стягується одразу при складанні портфеля (тому множник $1+r$ біля податку), по-друге, податок стягується лише з позицій за ризиковими активами (позичання в банку та вкладання грошей в банк не оподатковується).

2. Одноперіодна модель з випадковими початковими даними

Нехай $T = 1$, тобто модель є одноперіодною. Ми не припускатимемо тривіальність $\mathcal{F}_0$, тобто випадкові дані можуть бути випадковими. Позначимо $\Delta X = X_1 - X_0$, $\|x\|_\infty = \max_i |x^i|$.

Для повноти огляду спочатку наведемо твердження з [9, 10], що стосуються одноперіодної моделі.

Лема 2.1 ([9]). *Наступні твердження еквівалентні:*

1) одноперіодний фінансовий ринок допускає ε-арбітраж;

2) існує такий $\mathcal{F}_0$-вимірний вектор ξ, що $\|\xi\|_1 \leq 1$ м.н. і $\xi \cdot \Delta X \geq \varepsilon$, P-м.н., причому $P\{\xi \cdot \Delta X > \varepsilon\} > 0$.

Теорема 2.2 ([10]). *Для одноперіодного ринку наступні умови є еквівалентними:*

1) ринок є ε-безарбітражним;

2) існує міра P^* еквівалентна до P така, що $\frac{dP^*}{dP} \leq C < \infty$, і

$$\mathsf{E}_{P^*}\left[\|\mathsf{E}_{P^*}[\Delta X/\mathcal{F}_0]\|_\infty\right] \leq \varepsilon.$$

Природно виникає питання про узагальнення твердження для норми на $\mathbb{R}^d$, відмінної від $\|\cdot\|_1$. Більш точно, нехай $\|\cdot\|_\sim$ — норма у $\mathbb{R}^d$, а $\|\cdot\|_\sim^*$ — спряжена до неї. Назвемо для випадкового вектора $X \in \mathbb{R}^d$ у одноперіодній моделі $\varepsilon\sim$арбітражною таку $\mathcal{F}_0$-вимірну стратегію $\xi \in \mathbb{R}^d$, що $\|\xi\|_\sim \leq 1$, $\xi \cdot X \geq \varepsilon$ м.н. та $P(\xi \cdot X > \varepsilon) > 0$. Часткове узагальнення теореми 2.2 доведено у [10].

Теорема 2.3 ([10]). *1) $\forall \delta > 0$ у одноперіодній моделі відсутній $(\varepsilon+\delta)\sim$-арбітраж; 2) $\forall \delta > 0$ існує міра $P^* \sim P$ з обмеженою щільністю, така, що*

$$\mathsf{E}_{P^*}\left[\|\mathsf{E}_{P^*}[\Delta X/\mathcal{F}_0]\|_\sim^*\right] \leq \varepsilon + \delta.$$

Чи можливо позбавитися від δ у цьому твердженні? Очевидно, що з існування еквівалентної міри $P^* \sim P$, для якої $\mathsf{E}_{P^*}\left[\|\mathsf{E}_{P^*}[\Delta X/\mathcal{F}_0]\|_\sim\right] \leq \varepsilon$, випливає відсутність $\varepsilon\sim$арбітража. На жаль, обернене твердження, взагалі кажучи, не має місця, як показує наступний простий приклад.

Приклад 2.4. Нехай $d = 2$, $\|\xi\|_\sim = |\xi| = \left((\xi^1)^2 + (\xi^2)^2\right)^{1/2}$ — звичайна евклідова норма. Ймовірнісний простір $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, $\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$, $\mathcal{F}_1 = 2^\Omega$, $P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = 1/2$. Дисконтований вектор цін задамо так: $X_0 = (0,0)$, $X_1(\omega_1) = (1,0)$, $X_1(\omega_2) = (1,2)$. Тоді у цій моделі відсутній 1-арбітраж. Справді, якщо $|\xi| = 1$ і $\xi \cdot \Delta X \geq 1$ м.н., то (при $\omega = \omega_1$) маємо $\xi^1 \geq 1$, звідки $\xi = (1,0)$. Тоді $\xi \cdot X(\omega_2) = 1$, звідки випливає відсутність $\varepsilon\sim$арбітража. З іншого боку, для $P^* \sim P$ з $p^* = P^*(\{\omega_2\}) \in (0,1)$

$$\mathsf{E}_{P^*}[|\mathsf{E}_{P^*}[\Delta X|\mathcal{F}_0]|] = |\mathsf{E}_{P^*}[\Delta X]| = |(1, 2p^*)| > 1.$$

Аналогічно можна отримати, що імплікація 2) $\Rightarrow$ 1) теореми 2.2 не має місця для норм $\|\cdot\|_p$ і взагалі для будь-якої норми, куля якої *опукла у певній точці* a у наступному сенсі: існує єдина гіперплощина, яка має з кулею єдину спільну точку

a. Це спостереження дозволяє сформулювати гіпотезу, доведення або спростування якої, на жаль, автору поки не відомо.

Гіпотеза 2.5. *Нехай куля відносно норми $\|\cdot\|_\sim$ не опукла в жодній точці. Тоді наступні твердження є еквівалентними.*

1) у одноперіодній моделі відсутній $\varepsilon\sim$арбітраж;

2) існує міра $P^* \sim P$ з обмеженою щільністю, така, що

$$\mathsf{E}_{P^*}[\mathsf{E}_{P^*}\|[\Delta X/\mathcal{F}_0]\|_\sim^*] \le \varepsilon.$$

Звернемося тепер до V^ε-арбітражу.

Зауважимо, що в одноперіодній моделі з невипадковими початковими даних V^ε-арбітраж еквівалентний до ε-арбітражу. Тому наступна лема стверджує те саме, що й лема 3.6 у [10]. Позначимо $\overline{\mathbb{R}}^d$ одноточкову компактифікацію простору $\mathbb{R}^d$. Простір $C(\overline{\mathbb{R}}^d)$ будемо розуміти як нормований простір з нормою $\|g\|_{\sup} = \max_{\overline{\mathbb{R}}^d}|g|$.

Лема 2.6. *Нехай для випадкового вектора $Y \in \mathbb{R}^d$ з розподілом $P_Y(dx)$ відсутній V^ε-арбітраж, тобто з того, що $\xi\cdot Y \ge \varepsilon\|\xi\|_1$ м.н. для $\xi \in \mathbb{R}^d$, випливає $\xi\cdot Y = \varepsilon\|\xi\|_1$ м.н. Тоді існує додатна функція $g \in C(\overline{\mathbb{R}}^d)$, така що*

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(y)P_Y(dy) = 1, \quad \left\|\int_{\mathbb{R}^d} yg(y)P_Y(dy)\right\|_\infty \le \varepsilon.$$

Дана лема дозволяє провести доведення існування еквівалентної "мартингальної" міри для випадкових початкових даних аналогічно до того, як це зроблено у [1].

Теорема 2.7. *Для нашого ринку наступні умови є еквівалентними:*

1) фінансовий ринок є V^ε-безарбітражним;

2) існує міра P^* еквівалентна до P, така що $\frac{dP^*}{dP} \le C$ для деякого $C > 0$, і $\|\mathsf{E}_{P^*}[\Delta X/\mathcal{F}_0]\|_\infty \le \varepsilon$ м.н.

Доведення. [2) $\Rightarrow$ 1)] Нехай $\xi \in \mathbb{R}^d$ — такий $\mathcal{F}_0$-вимірний вектор, що $P(\xi\cdot\Delta X \ge \varepsilon\|\xi\|_1) = 1$. Тоді

$$\begin{aligned}\mathsf{E}_{P^*}[\xi\cdot\Delta X - \varepsilon\|\xi\|_1] &= \mathsf{E}_{P^*}[\mathsf{E}_{P^*}[\xi\cdot\Delta X - \varepsilon\|\xi\|_1/\mathcal{F}_0]]\\ &\le \mathsf{E}_{P^*}[\mathsf{E}_{P^*}[\|\xi\|_\infty\|\Delta X\|_1/\mathcal{F}_0] - \varepsilon\|\xi\|_1]\\ &\le \mathsf{E}_{P^*}[\|\xi\|_1(\mathsf{E}[\|\Delta X\|_\infty/\mathcal{F}_0] - \varepsilon)] \le 0.\end{aligned}$$

Тому $\xi\cdot\Delta X = \varepsilon\|\xi\|_1$ P^*-м.н., а отже, і P-м.н. Тому V^ε-арбітражу не існує.

[1) $\Rightarrow$ 2)] Можна визначити еквівалентну міру $P' \sim P$ з обмеженою щільністю за допомогою рівності $dP'/dP = C/(1+\|\Delta X\|_1)$, де C — нормуюча стала. Відносно P' вектор ΔX є інтегрованим. Крім того, відносно P' немає V^ε-арбітражу та будь-яка міра, що еквівалентна до P' і має обмежену щільність відносно неї, також еквівалентна до P і має обмежену щільність відносно P. Отже, без обмеження загальності ми можемо вважати, що $\mathsf{E}[\|\Delta X\|_1] < \infty$.

Позначимо $P(\omega, dx)$ регулярний умовний розподіл ΔX за умови $\mathcal{F}_0$. Для вектора $\alpha \in \mathbb{R}^d$ позначимо $H^\varepsilon_{\alpha\varpi} = \{x : \alpha\cdot x\,\varpi\,\varepsilon\|x\|_1\}$, $\varpi \in \{\le, <, =, >, \ge\}$. Визначимо множину, на якій досягається V^ε-арбітраж, наступним чином:

$$\mathfrak{A} = \left\{(\omega, x) \in \Omega\times\mathbb{R}^d : P(\omega, H^\varepsilon_{x\ge}) = 1, P(\omega, H^\varepsilon_{x>}) > 0\right\}.$$

Ця множина належить $\mathcal{F}_0\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, оскільки функції $P(\omega, H^\varepsilon_{x\ge})$, $P(\omega, H^\varepsilon_{x>}) > 0$ є $\mathcal{F}_0\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-вимірними (див. лему 4.1).

Тоді її проекція,

$$A = Pr_\Omega\mathfrak{A} = \left\{\omega : \exists x \in \mathbb{R}^d \text{ такий, що } P(\omega, H^\varepsilon_{x\ge}) = 1, P(\omega, H^\varepsilon_{x>}) > 0\right\},$$

належить $\mathcal{F}_0$ за теоремою про проекцію [8].

За теоремою про вимірний вибір існує $\mathcal{F}_0$-вимірний випадковий вектор $\zeta \in \mathbb{R}^d$ такий, що $(\omega, \xi) \in \mathfrak{A}$ для майже всіх $\omega \in A$. Вектор $\zeta = \xi \mathbb{I}_A$ є $\mathcal{F}_0$-вимірним і

$$P(\zeta \cdot \Delta X \geq \varepsilon \|\zeta\|) = \mathsf{E}[\mathsf{E}[\mathbb{I}_{\zeta \cdot \Delta X \geq \varepsilon \|\zeta\|}/\mathcal{F}_0]]$$
$$= \mathsf{E}[P(\omega, H^\varepsilon_{\zeta \geq})] = \mathsf{E}[\mathbb{I}_A P(\omega, H^\varepsilon_{\xi \geq}) + \mathbb{I}_{A^c} P(\omega, H^\varepsilon_{0 \geq})] = 1.$$

Аналогічно,

$$P(\zeta \cdot \Delta X \geq \varepsilon \|\zeta\|) = \mathsf{E}[\mathbb{I}_A P(\omega, H^\varepsilon_{\xi >})].$$

Оскільки V^ε-арбітраж відсутній, а величина $P(\omega, H^\varepsilon_{\xi >})$ додатна при $\omega \in A$, то $P(A) = 0$.

Розглянемо тепер множину

$$\mathfrak{H} = \left\{ (\omega, g) \in \Omega \times C(\overline{\mathbb{R}}^d) : g \geq 0, \int_{\mathbb{R}^d} g(x) P(\omega, dx) = 1, \int_{\mathbb{R}^d} x g(x) P(\omega, dx) \in [-\varepsilon, \varepsilon]^d \right\}.$$

Вона належить $\mathcal{F}_0 \otimes \mathcal{B}(C(\overline{\mathbb{R}}^d))$. З того, що $P(A) = 0$ та V^ε-арбітраж відсутній, випливає, що для майже усіх ω V^ε-арбітраж відсутній для випадкового вектора з розподілом $P(\omega, dx)$. Тому за лемою 2.6 для майже всіх ω існує $g_\omega \in C(\overline{\mathbb{R}}^d)$, така, що $(\omega, g_\omega) \in \mathfrak{H}$, або, іншими словами, проекція $\mathfrak{H}$ на Ω має повну ймовірність. Оскільки $C(\overline{\mathbb{R}}^d)$ — повний сепарабельний простір, то за теоремою про вимірний вибір існує $\mathcal{F}_0$-вимірна функція $G : \Omega \to C(\overline{\mathbb{R}}^d)$, така, що $(\omega, G(\omega)) \in \mathfrak{H}$ майже напевно. Відображення $(\omega, x) \to G(\omega, x) := G(\omega)(x)$ є $\mathcal{F}_0 \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-вимірним як композиція вимірних, а тому $D(\omega) := M(\omega) G(\omega, Y(\omega))$ є $\mathcal{F}_1$-вимірним, де $M(\omega) = 1/(1 + K(\omega))$, $K(\omega) = \|G(\omega, \cdot)\|_{\sup}$.

Зауважимо, що

$$\mathsf{E}[G(\omega, Y(\omega))] = \mathsf{E}[\mathsf{E}[G(\omega, Y(\omega))/\mathcal{F}_0]] = \mathsf{E}\left[\int_{\mathbb{R}^d} g(\omega, x) P(\omega, dx)\right] = 1$$

і аналогічно

$$M(\omega) = \mathsf{E}[D(\omega)/\mathcal{F}_0].$$

Визначимо тепер $dP^*(\omega) = M D(\omega) dP(\omega)$, де $M = 1/\mathsf{E}[D(\omega)]$. Запишемо

$$\|\mathsf{E}_{P^*}[Y/\mathcal{F}_0]\|_\infty = \|\mathsf{E}[Y(\omega) D(\omega)/\mathcal{F}_0]/\mathsf{E}[D(\omega)/\mathcal{F}_0]\|_\infty$$
$$= \|\mathsf{E}[Y(\omega) G(\omega, Y(\omega))/\mathcal{F}_0]\|_\infty = M\,\mathsf{E}\left[D(\omega) \left\| \int_{\mathbb{R}^d} x G(\omega, x) P(\omega, dx) \right\|_\infty \right] \leq \varepsilon. \quad \square$$

3. Основна теорема для багатоперіодної моделі

Позначимо

$$R^\varepsilon_T := \left\{ V^\varepsilon_T : V^\varepsilon_T = \sum_{t=1}^T \xi_t \cdot \Delta X_t - \varepsilon \sum_{t=1}^T \|\xi_t\|_1 \right\},$$

де ξ — це довільна самофінансована стратегія. Тобто R^ε_T — це множина усіх результатів, які можна отримати з нульовим початковим капіталом за наявності ε-податку на портфель.

Позначимо $A^\varepsilon_T := R^\varepsilon_T - L^0_+ = \{V - V^+ : V \in R^\varepsilon_T, V^+ \in L^0_+\}$. Тут L^0_+ — множина скінченних невід'ємних величин на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Теорема 3.1. *Наступні умови є рівносильними:*

1) *у моделі відсутній V^ε-арбітраж, тобто $\mathbb{R}^\varepsilon_T \cap L^0_+ = \{0\}$;*
2) *для всіх $t = 1, 2, \dots, T$ в одноперіодній моделі на відрізку $[t-1, t]$ відсутній V_ε-арбітраж, тобто якщо $\xi \in \mathbb{R}^d$ — $\mathcal{F}_{t-1}$-вимірний вектор і $P(\xi \cdot \Delta X_t \geq \varepsilon \|\xi\|_1) = 1$, то $\xi \cdot \Delta X_t = \varepsilon \|\xi\|_1$ м.н.;*
3) *у моделі відсутній K^ε-арбітраж;*

4) $A^{\varepsilon}_T \cap L^0_+ = \{0\}$*;*
5) існує міра $P^* \sim P$ *з обмеженою щільністю, така, що для всіх* $t = 1, 2, \ldots, T$

$$\|\mathsf{E}_{P^*}[\Delta X_t / \mathcal{F}_{t-1}]\|_{\infty} \le \varepsilon.$$

Зауваження 3.2. Зазначимо, що при $\varepsilon = 0$ ми відтворюємо класичний результат Даланга–Мортона–Вілінджера [1].

На відміну від аналогічного твердження для класичного поняття арбітражу (див. [6]), зараз ми не можемо стверджувати, що у випадку 4) множина A^{ε}_T є замкненою. Специфіка доведення у класичному випадку полягає у тому, що воно зводиться до ортогональності певних векторів і те, що $\varepsilon = 0$, відіграє тут ключову роль. Зараз спроби повторити доведення приведуть до рівності ε на певній множині додатної ймовірності, звідки не можна одержати жодних висновків. Цікаво було б дослідити, чи можливо довести це твердження іншим шляхом.

Доведення. Імплікація [1) $\Rightarrow$ 2)] є очевидною.

[4) $\Rightarrow$ 1)] випливає з того, що $R^{\varepsilon}_T \subset A^{\varepsilon}_T$.

[5) $\Rightarrow$ 2)] випливає з теореми 2.7.

[2) $\Rightarrow$ 1)] Доведемо, що з існування V^{ε}-арбітражу у всій моделі випливає існування V^{ε}-арбітражу на якомусь з періодів. Нехай $\{\xi_t\}$ — стратегія, що забезпечує V^{ε}-арбітраж. Визначимо

$$t_0 = \min\left\{t : P(V^{\varepsilon}_t \ge 0) = 1, P(V^{\varepsilon}_t > 0) > 0\right\}.$$

Завдяки V^{ε}-арбітражу це визначення коректне. Оскільки t_0 мінімальне, то або

$$V^{\varepsilon}_{t_0 - 1} = 0 \quad \text{м.н.}$$

і тоді, очевидно, ξ_{t_0} забезпечує V^{ε}-арбітраж на періоді $[t_0, t_0 - 1]$; або $P(V^{\varepsilon}_{t_0-1} < 0)$ і тоді, очевидно, V^{ε}-арбітражною можливістю є $\xi_{t_0} \mathbb{I}_{V^{\varepsilon}_{t_0-1} < 0}$.

[1) $\Leftrightarrow$ 3)] Побудуємо відповідність між самофінансованою стратегією з її ε-капіталом та ε-самофінансованою стратегією з її капіталом і тим самим встановимо еквівалентність V^{ε}- та K^{ε}-арбітражу. Легко перевірити за індукцією, що дисконтований капітал ε-самофінансованої стратегії $\{\overline{\xi}_t = (\xi^0_t, \xi_t)\}$ дорівнює

$$V_t = (1 + r)^{-t} K_t = V_0 + \sum_{k=1}^{t} \xi_k \cdot \Delta X_k - \sum_{k=1}^{t} \|\xi_k\|_1,$$

що збігається з ε-капіталом самофінансованої стратегії, яка однозначно відтворюється з $\{\xi_t\}$. З іншого боку, якщо є самофінансована стратегія $\{\overline{\xi}_t = (\xi^0_t, \xi_t)\}$, то визначивши нову стратегію $\{\overline{\zeta}_t = (\zeta^0_t, \xi_t)\}$ з $\zeta^0_t = \xi^0_t - \sum_{k=1}^{t} \|\xi_t\|_1$, неважко переконатися, що вона буде ε-самофінансованою, а її дисконтований капітал збігатиметься з ε-капіталом стратегії $\overline{\xi}$.

[1) $\Rightarrow$ 4)] Припустимо, що твердження 1 має місце, а твердження 4 ні, тобто існує $z \in A^{\varepsilon}_T \cap L^0_+$ і $z \ne 0$. Тоді існує таке $\zeta \in R^{\varepsilon}_T$ і $u \in L^0_+$ такі, що $z = \zeta - u \ge 0 \Rightarrow \zeta \ge u \ge 0 \Rightarrow \zeta \ge 0 \Rightarrow \zeta = 0$, бо з твердження 1 маємо $R^{\varepsilon}_T \cap L^0_+ \subset \{0\}$, і отже ζ може бути лише нулем. З того, що $\zeta = 0$ випливає, що $u = 0$ теж, а отже і $z = 0$. Знову прийшли до суперечності, тобто імплікація $1 \Rightarrow 4$ насправді істинна.

[$2 \Rightarrow 5$] Припустимо, що виконується твердження 2, тобто для всіх $t = 1, 2, \ldots, T$ на відрізку $[t-1, t]$ відсутній V^{ε}-арбітраж.

Для побудови міри P^* використаємо зворотну індукцію, тобто побудуємо таку міру $P_t \sim P$ з обмеженою щільністю, що $\|\mathsf{E}_{P_t}[\Delta X_s / \mathcal{F}_{s-1}]\|_{\infty} \le \varepsilon$ для $s = t+1, t+2, \ldots, T$.

Покладемо $P_T = P_0$.

Нехай для t бажану міру побудовано. Оскільки відносно міри P на відрізку $[t-1, t]$ V^{ε}-арбітраж відсутний, а $P_t \sim P$, то V^{ε}-арбітраж відсутний і відносно міри P.

Тоді за теоремою 2.7 існує міра $P_{t-1} \sim P_t$ з обмеженою та $\mathcal{F}_t$-вимірною щільністю dP_{t-1}/dP_t така, що $\|\mathsf{E}[\Delta X_t/\mathcal{F}_{t-1}]\|_\infty \le \varepsilon$. При цьому для $s \ge t+1$ маємо

$$\mathsf{E}_{P_{t-1}}[\Delta X_s/F_{s-1}] = \mathsf{E}_{P_t}\left[\frac{dP_{t-1}}{dP_t}\Delta X_s\Big/F_{s-1}\right]\Big/\,\mathsf{E}\left[\frac{dP_{t-1}}{dP_t}\Big/F_{s-1}\right]$$
$$= \frac{dP_{t-1}}{dP_t}\,\mathsf{E}_{P_t}\left[\Delta X_s\Big/F_{s-1}\right]\Big/\frac{dP_{t-1}}{dP_t} = \mathsf{E}_{P_t}\left[\Delta X_s\Big/F_{s-1}\right],$$

де передостання рівність має місце завдяки $\mathcal{F}_t$-вимірності (а отже й $\mathcal{F}_{s-1}$-вимірності) dP_{t-1}/dP_t. Оскільки за припущенням індукції $P_t \sim P$ та dP_t/dP обмежена, то $P_{t-1} \sim P$ та $dP_{t-1}/dP = \frac{dP_{t-1}}{dP_t}/\frac{dP_t}{dP}$ обмежена.

Нарешті, покладаючи $P^* = P_0$, одержуємо міру, для якої виконується 5), що завершує доведення теореми. □

4. Лема про "сумісну вимірність" регулярного математичного сподівання

Лема 4.1. *Нехай функція $f(x,y)\colon \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ – вимірна, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$. Нехай також $P(\omega, dy)$ є регулярним розподілом випадкового вектора $\xi \in \mathbb{R}^d$ відносно σ-алгебри $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$.*

Тоді функція $g_f(\omega,x) = P(\omega, \{y : f(x,y) \in B\})$ є $\mathcal{G}\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-вимірною.

Доведення. Достатньо довести, що для $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^d)$ функція

$$g_C(\omega,x) = P(\omega, \{y : (x,y) \in C\})$$

є $\mathcal{G}\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-вимірною.

Нехай $\mathcal{C} = \{C : g_C$ є $\mathcal{G}\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-вимірною$\}$. Доведемо, що $\mathcal{C} \supset \mathcal{B}(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^d)$.

1. Перевіримо, що $\mathcal{C}$ є системою Динкіна.

Якщо $C', C'' \in \mathcal{C}$ та $C' \subset C''$, то $C'' \setminus C' \in \mathcal{C}$. Дійсно, $g_{C''\setminus C'} = g_{C''} - g_{C'}$.

Якщо $C_n \in \mathcal{C}$, $C_n \subset C_{n+1}$ для всіх n, то $\bigcup_{n\ge1} C_n \in \mathcal{C}$. Справді, у такому випадку $g_C = \lim_{n\to\infty} g_{C_n}$.

2. Для будь-яких відкритих $X \subset \mathbb{R}^k$, $Y \subset \mathbb{R}^d$ маємо $X \times Y \in \mathcal{C}$. Справді, у такому випадку $g_C(\omega,x) = P(\omega,Y)\mathbb{1}_X(x)$ є, очевидно, $\mathcal{G}\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-вимірною. Клас $\mathcal{O}$ множин такого вигляду замкнений відносно скінченних перетинів, тобто є π-системою.

Отже, за теоремою Динкіна $\mathcal{C} \supset \sigma(\mathcal{O}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^d)$, що й потрібно було довести. □

5. Висновки

У цій статті розглядається поняття V^ε-арбітражу або арбітражу за наявності податку на величину портфеля. Вивчення цього поняття і пов'язаних з ним тверджень вимагає математичного апарату, відмінного від класичного, адже ринки, що є V^ε-безарбітражними, можуть мати арбітражну в класичному розумінні можливість.

Отримані у [9] результати дають нам основні умови, еквівалентні обмеженому арбітражу на одноперіодному ринку. У статті [10] ці результати розповсюджено на одноперіодні моделі з випадковими початковими даними та на багатоперіодні моделі. В даній статті доведено аналогічні результати, але для іншого узагальнення, яке, по-перше, дозволяє одержати більш точні результати, ніж ті, що доведено у [10], по-друге, має практичну інтерпретацію.

Основним результатом, як і для класичної арбітражної теорії, є зв'язок між можливістю обмеженого арбітражу й існуванням міри з певними властивостями. Але якщо у класичному випадку міра має бути мартингальною, то зараз вона має бути ε-мартингальною: $\left|\mathsf{E}_{P^*}[\Delta X_t^i/\mathcal{F}_{t-1}]\right| \le \varepsilon$ для всіх i, t (тут ΔX_t^i — дисконтований приріст ціни i-го активу на $[t-1,t]$). Для $\varepsilon = 0$ ця умова перетворюється на класичну умову відсутності арбітражу.

6. Подяка

Автор висловлює подяку Федору Назарову, професору Університета Вісконсіна–Медісона, США, за допомогу в доведенні леми 4.1.

Література

1. R. C. Dalang, A. Morton, and W. Willinger, *Equivalent martingale measures and no-arbitrage in stochastic securities market models*, Stochastics and Stochastics Reports **29** (1990), 185–201.
2. F. Delbaen, W. Schachermayer, *A general version of the fundamental theorem of asset pricing*, Mathematische Annalen **300** (1994), 463–520.
3. H. Föllmer and W. Schachermayer, *Asymptotic arbitrage and large deviations*, Finance Stoch. **1** (1997), no. 3, 181–227.
4. Yu. Kabanov and D. Kramkov, *Asymptotic arbitrage in large financial markets*, Finance Stoch. **2** (1998) no. 2, 143–172.
5. Yu. Kabanov and M. Safarian, *Markets with Transaction Costs*, Springer Finance, Springer, Berlin, 2009.
6. Yu. M. Kabanov and Ch. Stricker, *A teachers' note on no-arbitrage criteria*, Séminaire de Probabilités XXXV, Lect. Notes Math., vol. 1755, Springer, Berlin, 2001, pp. 149–152.
7. J. Liu and F. Longstaff, *Losing money on arbitrages: optimal dynamic portfolio choice in markets with arbitrage opportunities*, Rev. Finan. Studies **71** (2004), no. 3, 611–641.
8. К. Деллашери, *Емкости и случайные процессы*, "Мир", Москва, 1975.
9. Ю. Мішура, *Основна теорема фінансової математики для обмеженого арбітражу*, Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика (2003), № 1–2, 49–54.
10. Ю. Мішура, Г. Шевченко, П. Шеляженко, *Обмежений арбітраж у многоперіодній моделі фінансового ринку з дискретним часом*, Теор. ймовір. мат. стат. **78** (2008), 122–131.
11. Г. Фёльмер, А. Шид, *Введение в стохастические финансы. Дискретное время*, МЦНМО, Москва, 2007.
12. А. Н. Ширяев, *Основы стохастической финансовой математики*, т. 2, "Фазис", Москва, 1998.

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Володимирська 64, Київ 01601

Адреса електронної пошти: zhora@univ.kiev.ua

Надійшла 28/09/2009