Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 81, 2009, стор. 164–172

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 81, 2009, pp. 164–172

СИНГУЛЯРНІСТЬ ВИПАДКОВИХ РЯДІВ ОСТРОГРАДСЬКОГО ДРУГОГО ВИДУ

УДК 519.21

Г. М. ТОРБІН І І. М. ПРАЦЬОВИТА

Анотація. Робота присвячена дослідженню властивостей розподілу випадкової величини η, що є сумою ряду Остроградського другого виду, різниці елементів якого є незалежними однаково розподіленими випадковими величинами. Повністю досліджено лебегівську структуру її розподілу. Доведено, що η не може мати абсолютно неперервного розподілу. В статті також будується ергодична теорія різницевих розкладів Остроградського другого виду. Доведено, зокрема, що для майже всіх (в сенсі міри Лебега) дійсних чисел з одиничного відрізка довільний символ з алфавіту зустрічається у відповідному різницевому розкладі Остроградського другого виду лише скінченну кількість разів. Ми також вивчаємо властивості динамічної системи, породженої перетворенням T одностороннього зсуву по різницевому зображенню Остроградського. Показано, що не існує ймовірнісних мір, які були б інваріантними і ергодичними відносно T, та абсолютно неперервними відносно міри Лебега.

Abstract. We study properties of the random variable η with independent identically distributed differences of the second Ostrogradsky expansion. The Lebesgue structure of the distribution η is completely investigated. We prove that η can not be absolutely continuously distributed. Ergodic theory of the second Ostrogradsky expansion is also developed. In particular, it is proven that for Lebesgue almost all real numbers any symbol from the alphabet appears in the corresponding defference-version of the second Ostrogradsky expansion only finitely many times. Properties of the symbolic dynamical system generated by one-sided shift-transformation T on the difference-version of the second Ostrogradsky expansion are also studied. It is shown that there are no probability measures which are invariant and ergodic (w.r.t. T) and absolutely continuous (w.r.t. Lebesgue measure).

Аннотация. Работа посвящена исследованию свойств распределения случайной величины η, являющейся суммой ряда Остроградского второго вида, разности элементов которого независимы и одинаково распределены. Полностью исследована лебеговская структура ее распределения. Доказано, что η не может быть абсолютно непрерывно распределена. В статье также строится эргодическая теория разностных разложений Остроградского второго вида. Доказано, в частности, что для почти всех (в смысле меры Лебега) действительных чисел из единичного отрезка произвольный символ из алфавита встречается в соответствующем разностном разложении Остроградского второго вида только конечное число раз. Мы также изучаем свойства динамической системы, порожденной преобразованием T одностороннего сдвига по разностному разложению Остроградского. Показано, что не существует вероятностных мер, которые были бы инвариантными и эргодичными относительно T, и при этом абсолютно непрерывными относительно меры Лебега.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 11K55, 37B10, 60G30.

Ключові слова і фрази. Розклад Остроградського другого виду, сингулярні ймовірнісні міри, символьна динаміка.

Дослідження третього автора виконані за сприяння проектів DFG 436 UKR 113/80, DFG 436 113/97 та фонду Олександра фон Гумбольдта.

Дослідження другого автора виконані за сприяння проектів DFG 436 UKR 113/80 та DFG 436 113/97.

1. Вступ

На початку 60-х років 19 століття М. В. Остроградський розглянув два алгоритми розкладу додатних дійсних чисел в знакозмінні ряди:

$$\sum_k \frac{(-1)^{k-1}}{q_1 q_2 \cdots q_k}, \quad \text{де } q_k \in N, q_{k+1} > q_k, \tag{1}$$

$$\sum_k \frac{(-1)^{k-1}}{q_k}, \quad \text{де } q_k \in N, q_{k+1} \geq q_k(q_k+1) \tag{2}$$

(ряди Остроградського 1-го і 2-го видів відповідно). Його нотатки з цього приводу були виявлені в рукописному фонді Національної академії наук України і розшифровані Є. Я. Ремезом у 1951 році [13]. Б.В. Гнєденко в коментарях до книги О.Я.Хінчина [14] з приводу рядів Остроградського відзначав, що "...к сожалению до сих пор детальное их изучение, в том числе и для вычислительних целей, не осуществлено". Варто відзначити, що на сьогодні існує ціла низка робіт (див. [1, 2, 7, 8, 9, 11, 12] та посилання в них), присвячених дослідженню розкладів дійсних чисел в знакозмінні ряди Остроградського першого виду (які також відомі в англомовній літературі як ряди Пірса) та ймовірнісних розподілів, що з ними пов'язані. Розклади Остроградського другого виду вивчені значно менше ([10, 11, 13]). Відомо, зокрема, що кожне дійсне число $x \in (0,1)$ можна подати у вигляді скінченного чи нескінченного виразу (1). Якщо число x є ірраціональним, то це можна зробити єдиним чином і вираз (2) при цьому є нескінченним, якщо ж x є раціональним, то його можна подати у вигляді (2) зі скінченною кількістю доданків двома різними способами. Ряди Остроградського збігаються досить швидко, що дозволяє наближати ірраціональні числа числами раціональними, що є частковими сумами ряду Остроградського.

Зображення числа x у вигляді

$$x = \sum_k \frac{(-1)^{k-1}}{q_k(x)}, \quad \text{де } q_k(x) \in N, q_{k+1}(x) \geq q_k(x)(q_k(x)+1) \tag{3}$$

називатимемо O^2*-зображенням* і будемо позначати $O^2(q_1(x), \ldots, q_n(x), \ldots)$.

При зафіксованих перших k символах, $k+1$-й символ O^2-зображення не може набувати значень $1, 2, 3, 4, 5, \ldots, q_k(q_k+1)-1$, що робить символи O^2-зображення "нерівноправними". Нехай

$$d_1 = q_1 \quad \text{і} \quad d_{k+1} = q_{k+1} - q_k(q_k+1) + 1 \quad \forall k \in N.$$

Тоді попередній ряд можна переписати у вигляді

$$x = \sum_k \frac{(-1)^{k+1}}{q_{k-1}(x)(q_{k-1}(x)+1) - 1 + d_k(x)} =: \overline{O}^2(d_1(x), d_2(x), \ldots, d_k(x), \ldots). \tag{4}$$

Вираз (4) називається $\overline{O}^2$-розкладом (різницевим розкладом Остроградського другого виду, розкладом Остроградського другого виду з незалежними приростами), а число $d_k = d_k(x)$ - k-м $\overline{O}^2$-символом числа x. В $\overline{O}^2$-зображенні кожен із символів, незалежно від значення попереднього, може набувати всіх натуральних значень.

Основними завданнями даної роботи є:

1) розвиток ергодичної теорії $\overline{O}^2$ - розкладів дійсних чисел (зокрема, знаходження нормальних властивостей дійсних чисел (тобто властивостей, які мають майже всі (в сенсі міри Лебега) дійсні числа), сформульованих в термінах асимптотичних частот $\nu_i(x, \overline{O}^2)$ $\overline{O}^2$символів $(i \in N)$, де $\nu_i(x, \overline{O}^2) = \lim_{n\to\infty} \frac{N_i(x,n)}{n}$, а $N_i(x,n)$ - кількість символів "i"в $\overline{O}^2$-зображенні числа x до n-го місця включно;

2) дослідження властивостей динамічної системи, породженої наступним перетворенням T одностороннього зсуву по $\overline{O}^2$-зображенню:

$$\forall\, x = \overline{O}^2(d_1(x), d_2(x), \ldots, d_n(x), \ldots) \in [0,1],$$

$$T(x) = T(\overline{O}^2(d_1(x), d_2(x), \ldots, d_n(x), \ldots)) = \overline{O}^2(d_2(x), d_3(x), \ldots, d_n(x), \ldots);$$

3) дослідження властивостей розподілу випадкової величини

$$\eta = \overline{O}^2(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k, \ldots),$$

$\overline{O}^2$-символи η_k якої є незалежними однаково розподіленими випадковими величинами, що набувають значень 1, 2, ..., m, ... з ймовірностями p_1, p_2, ..., p_m, ... відповідно, $p_m \geq 0$, $\sum_{m=1}^{\infty} p_m = 1$.

2. Геометрія O^2-зображення та $\overline{O}^2$-зображення чисел

Нехай $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ — заданий набір натуральних чисел. *Циліндром рангу n з основою* $c_1c_2\ldots c_n$ називається множина всіх $x \in (0,1]$ виду

$$\Delta^{O^2}_{c_1c_2\ldots c_n} = \{x : x = O^2(q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots), q_i = c_i, i = \overline{1,n}, q_{n+j} \in N\}.$$

Циліндричні множини мають наступні властивості.

1. $\Delta^{O^2}_{c_1\ldots c_n} = \bigcup_{i=c_n(c_n+1)}^{\infty} \Delta^{O^2}_{c_1\ldots c_n i}$.
2. $\inf \Delta^{O^2}_{c_1\ldots 2m-1} = \sum_{k=1}^{2m-1} \frac{(-1)^{k-1}}{c_k} - \frac{1}{c_{2m-1}(c_{2m-1}+1)}$
$= O^2(c_1, \ldots, c_{2m-1}, c_{2m-1}(c_{2m-1}+1)) =$
$= O^2(c_1, \ldots, c_{2m-2}, c_{2m-1}+1) \in \Delta^{O^2}_{c_1\ldots c_{2m-1}}$;
$\sup \Delta^{O^2}_{c_1\ldots 2m-1} = \sum_{k=1}^{2m-1} \frac{(-1)^{k-1}}{c_k} = O^2(c_1, \ldots, c_{2m-1}) \in \Delta^{O^2}_{c_1\ldots c_{2m-1}}$;
$\inf \Delta^{O^2}_{c_1\ldots 2m} = \sum_{k=1}^{2m} \frac{(-1)^{k-1}}{c_k} = O^2(c_1, \ldots, c_{2m}) \in \Delta^{O^2}_{c_1\ldots c_{2m}}$;
$\sup \Delta^{O^2}_{c_1\ldots 2m} = \sum_{k=1}^{2m} \frac{(-1)^{k-1}}{c_k} + \frac{1}{c_{2m}(c_{2m}+1)} = O^2(c_1, \ldots, c_{2m}, c_{2m}(c_{2m}+1)) =$
$= O^2(c_1, \ldots, c_{2m-1}, c_{2m}+1) \in \Delta^{O^2}_{c_1\ldots c_{2m}}$.
3. $\sup \Delta^{O^2}_{c_1\ldots c_{2m-1}i} = \inf \Delta^{O^2}_{c_1\ldots c_{2m-1}(i+1)}$;
$\inf \Delta^{O^2}_{c_1\ldots c_{2m}i} = \sup \Delta^{O^2}_{c_1\ldots c_{2m}(i+1)}$.
4. Для довжини циліндричного відрізка рангу n мають місце співвідношення:
$$|\Delta^{O^2}_{c_1\ldots\ldots c_n}| = \frac{1}{c_n(c_n+1)} \to 0\ (n \to \infty).$$
5. Довжина циліндра залежить виключно від останнього символа основи, тобто
$$|\Delta^{O^2}_{c_1\ldots c_n i}| = \frac{1}{i(i+1)} = |\Delta^{O^2}_{s_1\ldots s_m i}|.$$
6. $\frac{|\Delta^{O^2}_{c_1\ldots c_n c_{n+1}}|}{|\Delta^{O^2}_{c_1\ldots c_n}|} = \frac{c_n(c_n+1)}{c_{n+1}(c_{n+1}+1)} \leq \frac{1}{2^{2^{n-1}}}\ \forall n \in N$.

Кожен з циліндрів O^2-зображення може бути однозначно перепозначений у термінах $\overline{O}^2$-зображення, а саме:

$$\Delta^{O^2}_{c_1\ldots c_n} \equiv \bar{\Delta}^{O^2}_{a_1\ldots\ldots a_n},$$

де $a_1 = c_1$, $a_k = c_k + 1 - c_{k-1}(c_{k-1}+1)$, $1 < k < n$.

Властивості циліндрів, що відповідають O^2-зображенню, породжують аналогічні властивості для циліндрів, що відповідають $\overline{O}^2$-зображенню. Відзначимо лише одну з них.

$$|\Delta^{\overline{O}^2}_{a_1\ldots a_n a_{n+1}}| \leq \frac{1}{2^{2^{n-1}}} |\Delta^{\overline{O}^2}_{a_1\ldots a_n}|,\ \forall n \in N. \tag{5}$$

3. Нормальні властивості чисел, заданих $\overline{O}^2$- представленням

Властивість дійсного числа називають нормальною, якщо вона має місце для майже всіх (в сенсі міри Лебега) дійсних чисел. Прикладами нормальних властивостей можуть слугувати "бути ірраціональним", "бути трансцендентним", які не залежать від вибраної системи числення (способу представлення дійсного числа). При фіксованому способі представлення дійсного числа зручно формулювати нормальні властивості в термінах символів (цифр) цього представлення. Наприклад, в десятковій системі числення нормальними є наступні властивості: "містити нескінченну кількість нулів (в десятковому записі)", "не містити періода", "містити кожну цифру з частотою $\frac{1}{10}$"та ін. Якщо число записане у вигляді ланцюгового дробу, то прикладами нормальних властивостей можуть бути: "мати нескінченну кількість елементів у представленні", "містити символ "i"з асимптотичною частотою $\frac{1}{\ln 2}\ln\frac{(i+1)^2}{i(i+2)}$"та ін.

Основною метою даного розділу є знаходження деяких нормальних властивостей дійсних чисел, які сформульовані в термінах членів послідовності $\{d_k(x)\}$ членів різницевого розкладу Остроградського другого виду.

Теорема 3.1. *Майже всі (в розумінні міри Лебега) числа* $(0,1]$ *у своєму* $\overline{O}^2$*-зображенні містять скінченну кількість кожного з* $\overline{O}^2$*-символів*

Доведення. Нехай $N_i(x)$ - кількість символів "i"в $\overline{O}^2$-зображенні числа x. Доведемо, що міра Лебега множини

$$A_i = \{x\colon N_i(x) = \infty\}$$

дорівнює 0 для кожного $i \in N$.

Розглянемо множину

$$\bar{\Delta}_i^k = \{x : x = \overline{O}^2(d_1, \ldots, d_{k-1}, i, d_{k+1}, \ldots); d_j \in N, \forall j \neq k\},$$

чисел $(0,1]$, $\overline{O}^2$-зображення яких на k-тому місці містить символ i, тобто $d_k(x) = i$.

Лема 3.1. *Для довільних натуральних i та k мають місце*

$$\lambda\left(\bar{\Delta}_i^1\right) = \frac{1}{i(i+1)} \leq \frac{1}{2},$$

$$\lambda(\bar{\Delta}_i^k) \leq \frac{1}{2^{2^{k-2}}} \text{ при } k > 1.$$

Доведення. Оскільки $\bar{\Delta}_i^1 = \Delta_i^{\overline{O}^2} = \left[\frac{1}{i+1}; \frac{1}{i}\right]$, то $\lambda\left(\bar{\Delta}_i^1\right) = \frac{1}{i(i+1)} \leq \frac{1}{2}$.

З властивостей 1 та 6 циліндричних множин та означення множини $\bar{\Delta}_i^k$ випливає, що

$$\bar{\Delta}_i^k = \bigcup_{a_1=1}^{\infty} \cdots \bigcup_{a_{k-1}=1}^{\infty} \Delta_{a_1\ldots a_{k-1}i}^{\overline{O}^2}$$

і

$$\frac{|\Delta_{a_1\ldots a_{k-1}i}^{\overline{O}^2}|}{|\Delta_{a_1\ldots a_{k-1}}^{\overline{O}^2}|} \leq \frac{1}{2^{2^{k-2}}},$$

Тому

$$\lambda\left(\bar{\Delta}_i^k\right) = \sum_{a_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{a_{k-1}=1}^{\infty} |\Delta_{a_1\ldots a_{k-1}i}^{\overline{O}^2}| \leq \frac{1}{2^{2^{k-2}}} \left(\sum_{a_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{a_{k-1}=1}^{\infty} |\Delta_{a_1\ldots a_{k-1}}^{\overline{O}^2}|\right) = \frac{1}{2^{2^{k-2}}}.$$

□

Очевидно, що A_i є верхньою границею послідовності множин $\{\bar{\Delta}_i^k\}$, тобто

$$A_i = \limsup_{k\to\infty} \bar{\Delta}_i^k = \bigcap_{m=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=m}^{\infty} \bar{\Delta}_i^k \right).$$

Оскільки

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(\bar{\Delta}_i^k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2^{k-2}}} < +\infty,$$

то, згідно з лемою Бореля-Кантеллі ,

$$\lambda(A_i) = 0, \forall i \in N.$$

Тому

$$\lambda(\bar{A}_i) = 1, \forall i \in N.$$

Нехай

$$\bar{A} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i.$$

Очевидно, що $\lambda(\bar{A}) = 1$. Теорему доведено. □

Нехай $N_i(x,k)$ - кількість символів "i"в $\overline{O}^2$-зображенні числа x до k-го місця включно. Якщо границя $\lim_{k\to\infty} \frac{N_i(x,k)}{k}$ існує, то її називають асимптотичною частотою цифри (символа) "i"в $\overline{O}^2$-зображенні числа x, і позначають через $\nu_i(x, \overline{O}^2)$, а в тих випадках, коли це не може викликати непрозуміння - просто $\nu_i(x)$.

Наслідок 3.1. *Для λ-майже всіх x, $\forall i \in N : \nu_i(x) = 0$.*

Наслідок 3.2. *Для довільного стохастичного вектора $\overrightarrow{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots)$ множина*

$$I_{\overrightarrow{p}} = \{x : \ x = \overline{O}^2(d_1(x), \ldots, d_k(x), \ldots), \ \nu_i(x) = p_i \ \forall i \in N\}$$

має нульову міру Лебега.

Наслідок 3.3. *Нехай $V = \{1, 2, \ldots, n\}$. Тоді для довільного вибору множини $V \subset N$ множина $C[\overline{O}^2, V] = \{x : \ x = \overline{O}^2(d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots), d_j(x) \in V\}$ має нульову міру Лебега.*

Нехай $B(\overline{O}^2)$—множина всіх дійсних чисел з обмеженими $\overline{O}^2$-символами, тобто $x \in B(\overline{O}^2)$, якщо існує число $K(x)$ таке, що $d_k(x) \leq K(x)$ для всіх $k \in N$.

Наслідок 3.4. *Множина $B(\overline{O}^2)$ всіх чисел з обмеженими $\overline{O}^2$-символами має нульову міру Лебега.*

4. Сингулярність розподілів випадкових величин з незалежними приростами зображення Остроградського другого виду та властивості відповідної символьної динаміки

Розглянемо випадкову величину

$$\eta = \overline{O}^2(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k, \ldots), \tag{6}$$

$\overline{O}^2$-символи η_k якої є незалежними випадковими величинами, що набувають значень 1, 2, ..., m, ... з ймовірностями p_{1k}, p_{2k}, ..., p_{mk}, ... відповідно, тобто

$$P\{\eta_k = m\} = p_{mk} \quad \text{i} \quad p_{mk} \geq 0, \quad \sum_{m=1}^{\infty} p_{mk} = 1 \quad \forall k \in N.$$

Очевидно, що розподіл випадкової величини η повністю визначається матрицею $P = \|p_{mk}\|$. В [11] знайдено критерій дискретності розподілу випадкової величини η і вказано достатні умови сингулярності канторівського типу. Основною метою даного розділу є встановлення лебегівської структури розподілу η для випадку однакової розподіленості послідовності $\{\eta_k\}$.

Розглянемо динамічну систему, яка породжена наступним перетворенням T одностороннього зсуву по $\overline{O}^2$-зображенню:

$$\forall\ x = \overline{O}^2(d_1(x), d_2(x), \dots, d_n(x), \dots)\ \in [0,1],$$

$$T(x) = T(\overline{O}^2(d_1(x), d_2(x), \dots, d_n(x), \dots)) = \overline{O}^2(d_2(x), d_3(x), \dots, d_n(x), \dots).$$

Нагадаємо, що множина A називається інваріантною або нерухомою відносно перетворення T, якщо $A = T^{-1}A$. Міра μ називається ергодичною відносно перетворення T, якщо довільна інваріантна множина $A \in \mathfrak{B}$ є множиною або нульової, або повної міри. Міра μ називається інваріантною відносно перетворення T, якщо для довільної множини $E \in \mathfrak{B}$ виконується рівність $\mu(T^{-1}E) = \mu(E)$.

Лема 4.1. *Міра μ_η є інваріантною і ергодичною відносно перетворення зсуву T.*

Доведення. 1) Нехай множина A є нерухомою відносно перетворення T, тобто

$$T^{-1}A = A, \qquad A \in \mathfrak{B}.$$

Тоді $T(T^{-1}A) = T(A)$ і, отже, $A = TA$. Тому $A = T^{-1}A = T^{-1}(TA)$.

Якщо $x = \overline{O}^2(d_1(x)d_2(x)\dots d_k(x)\dots)$ і $x \in A$, то

$$T^{-1}(Tx) = \{x : x = \overline{O}^2(c_1 d_2(x)\dots d_k(x)\dots), c_1 \in N\} \subset A.$$

Тому належність x до інваріантної множини A не залежить від першого $\overline{O}^2$-символа точки x. Аналогічно доводиться, що належність x до нерухомої множини A не залежить від перших n $\overline{O}^2$-символів точки x. Тому за законом нуля і одиниці Колмогорова, $\mu_\eta(A) = 0$ або $\mu_\eta(A) = 1$. Отже, μ_η ергодична відносно перетворення T.

2) Оскільки борелівська σ-алгебра $\mathcal{B}$ породжується системою циліндрів $\overline{O}^2$-зображення, тобто множин виду $\Delta^{\overline{O}^2}_{c_1c_2\dots n}$, то досить показати інваріантність міри μ_η на таких циліндрах. Очевидно, що $\mu_\eta(\Delta^{\overline{O}^2}_{c_1c_2\dots n}) = p_{c_1}\cdot p_{c_2}\cdot\dots\cdot p_{c_n}$. Оскільки $T^{-1}(\Delta^{\overline{O}^2}_{c_1c_2\dots n}) = \Delta^{\overline{O}^2}_{i\ c_1c_2\dots n}$, $i \in N$, то

$$\mu_\eta(T^{-1}(\Delta^{\overline{O}^2}_{c_1c_2\dots n})) = \sum_{i=1}^{\infty}\mu_\eta(\Delta^{\overline{O}^2}_{i\ c_1c_2\dots n}) =$$

$$= p_{c_1}\cdot p_{c_2}\cdot\dots\cdot p_{c_n}\sum_{i=1}^{\infty} p_i = p_{c_1}\cdot p_{c_2}\cdot\dots\cdot p_{c_n} = \mu_\eta(\Delta^{\overline{O}^2}_{c_1c_2\dots n}),$$

що і треба було довести. □

Лема 4.2. *Для μ_η - майже всіх $x \in [0,1]$ має місце рівність*

$$\nu_i(x, \overline{O}^2) = p_i, \ \forall i \in N. \tag{7}$$

Доведення. Нехай $T^j(x)$ означає j-кратне послідовне застосування вищеозначеного перетворення зсуву T. Оскільки міра μ_η є ергодичною і інваріантною відносно T, то, за ергодичною теоремою Біркгофа, рівність

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi(T^j(x)) = \int_0^1 \varphi(x)d(\mu_\eta(x))$$

має місце для μ_η-майже всіх $x \in [0,1]$ і для довільної функції $\varphi \in L^1([0,1], d\mu_\eta)$.

Зафіксуємо деяке натуральне число i. Нехай $\Delta_i^{\overline{O}^2}$ - відповідний циліндр першого рангу $\overline{O}^2$-зображення. Виберемо в якості функції φ індикатор множини $\Delta_i^{\overline{O}^2}$, тобто $\varphi(x) = 1$, якщо $x \in \Delta_i^{\overline{O}^2}$, і $\varphi(x) = 0$ в іншому випадку.

Тоді

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi(T^j(x)) = \frac{N_i(x,n)}{n},$$

$$\int_0^1 \varphi(x)d(\mu_\eta(x)) = \int_{\Delta_i^{\overline{O}^2}} d(\mu_\eta(x)) = p_i.$$

Отже, для для μ_η-майже всіх $x \in [0,1]$ має місце рівність $\nu_i(x,\overline{O}^2) = p_i$. Нехай $M_{(p_1,p_2,\dots,p_k,\dots)} = \{x : x \in [0,1], \nu_i(x,\overline{O}^2) = p_i, \ \forall i \in N\}$. Ця множина також має одиничну μ_η-міру як перетин зчисленної кількості множин $M_i = \{x : x \in [0,1], \nu_i(x,\overline{O}^2) = p_i, \}$ повної μ_η-міри. □

Наступна теорема повністю розв'язує питання про лебегівську структуру розподілу η для випадку однакової розподіленості послідовності $\{\eta_k\}$.

Теорема 4.1. *Нехай $\{\eta_k\}$ - послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин, які набувають значень $1,2,3,\dots$ з імовірностями $p_1,p_2,p_3,\dots$, ($\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$). Тоді випадкова величина η з незалежними приростами зображення Остроградського другого виду (тобто випадкова величина, яка задана рівністю 6), має:*

1) або вироджений дискретний розподіл (якщо $p_i = 1$ для деякого $i \in N$);

2) або сингулярно неперервний розподіл (в усіх інших випадках).

Доведення. 1) Правильність твердження 1) випливає безпосередньо з однакової розподіленості випадкових величин $\{\eta_k\}$ і загального критерію дискретності розподілу в.в. η (див. [11]): в.в. η розподілена чисто дискретно тоді і тільки тоді, коли $\prod_{k=1}^{\infty} \max_i p_{ik} > 0$.

2) Доведемо, що у випадку неперервності розподіл випадкової величини η не може містити абсолютно неперервної компоненти. Виберемо натуральне число i_0 таке щоб $p_{i_0} > 0$ (щонайменше одне таке число існує) і розглянемо множину $M_{i_0} = \{x\colon x \in [0,1], \nu_{i_0}(x,\overline{O}^2) = p_{i_0} > 0\}$. За лемою 4.2 дана множина має повну μ_η-міру.

Розглянемо також множину $L^*_{i_0} = \{x\colon x \in [0,1], \nu_{i_0}(x,\overline{O}^2) = 0\}$. З теореми 5 випливає, що $\lambda(L^*_{i_0}) = 1$. Множини M_{i_0} і $L^*_{i_0}$ не перетинаються. Перша з них є носієм ймовірнісної міри μ_η, а друга є носієм міри Лебега на одиничному відрізку. Отже, міра μ_η сингулярна по відношенню до міри Лебега, що і треба було довести. □

Наслідок 4.1. *Випадкова величина η з незалежними однаково розподіленими різницями ряду Остроградського першого виду має чистий розподіл, причому вона не може бути абсолютно неперервно розподілена.*

Наслідок 4.2. *Всі ймовірнісні міри з незалежними однаково розподіленими приростами ряду Остроградського другого виду є інваріантними і ергодичними відносно перетворення T одностороннього зсуву по $\overline{O}^2$-зображенню, але жодна з них не є абсолютно неперервною відносно міри Лебега.*

Як відомо, розвиток метричної (ергодичної) теорії того чи іншого способу подання (розкладу) дійсних чисел суттєво спрощується, якщо вдається знайти міру, яка була б інваріантною і ергодичною відносно перетворення одностороннього зсуву по відповідному представленню, і одночасно абсолютно неперервною відносно міри Лебега (див. [7]). Наприклад, з того факту, що міра Гаусса (тобто абсолютно неперервна ймовірнісна міра зі щільністю $f(x) = \frac{1}{\ln 2}\frac{1}{1+x}$ на одиничному відрізку) є інваріантною і ергодичною відносно перетворення зсуву по ланцюговому представленню, можна вивести основні ергодичні властивості ланцюгових дробів (див., наприклад, [14, 7]). Покажемо насамкінець, що висновок останнього наслідку залишається правильним навіть у тому випадку, коли не обмежувати пошук класом ймовірнісних мір з незалежними однаково розподіленими $\overline{O}^2$-символами.

Теорема 4.2. *Не існує ймовірнісних мір, які були б інваріантними і ергодичними відносно перетворення зсуву T по $\overline{O}^2$-зображенню, і одночасно абсолютно неперервними відносно міри Лебега.*

Доведення. Доведення проведемо методом від супротивного. Припустимо, що існує абсолютно неперервна ймовірнісна міра ν, яка є інваріантною і ергодичною відносно T. Тоді для ν-майже всіх $x \in [0, 1]$ (а, отже, і для множини точок додатної міри Лебега) для довільної функції $\varphi \in L^1([0, 1], d\nu)$ має місце співвідношення:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(T^j(x)) = \int_0^1 \varphi(x) d(\nu(x)) = \int_0^1 \varphi(x) f_\nu(x) dx,$$

де $f_\nu(x)$ – щільність міри ν.

Покладемо $\varphi_i(x) = 1$, якщо $x \in \Delta_i^{\overline{O}^2}$, і $\varphi_i(x) = 0$ в іншому випадку.

Тоді

$$\int_0^1 \varphi_i(x) f_\nu(x) dx = \int_{x\in\Delta_i^{\overline{O}^2}} f_\nu(x) dx > 0 \text{ для хоча б одного } i \in N.$$

Нехай ця умова виконується для індекса i_0.

З іншого боку, з теореми 5 випливає, що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_{i_0}(T^j(x)) = \lim_{n\to\infty} \frac{N_{i_0}(x, n)}{n} = 0$$

для λ-майже всіх $x \in [0, 1]$.

Отже,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_{i_0}(x, n)}{n'} = 0$$

для λ-майже всіх $x \in [0, 1]$, і одночасно

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_{i_0}(x, n)}{n} > 0$$

для множини додатної міри Лебега. Отримана суперечність доводить теорему. □

Література

1. S. Albeverio, O. Baranovskyi, M. Pratsiovytyi, and G. Torbin, *The Ostrogradsky series and related Cantor-like sets*, Acta Arith. **130** (2007), no. 3, 215–230.
2. S. Albeverio, O. Baranovskyi, M. Pratsiovytyi, and G. Torbin, *The set of incomplete sums of the first Ostrogradsky series and probability distributions on it*, Rev. Roum. Math. Pures Appl. **54** (2009), no. 1, 129–145.
3. S. Albeverio, I. Pratsiovyta, M. Pratsiovytyi, and G. Torbin, *On Bernoulli Convolutions Generated by Second Ostrogradsky Series and their Fine Fractal Properties*, SFB-611 Preprint no. 459, Bonn University, 2009.
4. K. J. Falconer, *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*, Wiley, Chichester, 1990.
5. O. Jenkinson and M. Policott, *Computing the dimension of dynamically defined sets: E2 and bounded continued fractions*, Ergod. Th. and Dynam. Sys. **21** (2001), 1429–1445.
6. T. A. Pierce, *On an algorithm and its use in approximating roots of algebraic equations*, Amer. Math. Monthly **36** (1929), no. 10, 523–525.
7. F. Schweiger, *Ergodic Theory of Fibred Systems and Metric Number Theory*, Clarendon Press, Oxford, 1995.
8. J. O. Shallit, *Metric theory of Pierce expansions*, Fibonacci Quart. **24** (1986), no. 1, 22–40.

9. K. G. Valēēv and E. D. Zlēbov, *The metric theory of the Ostrogradskiĭ algorithm*, Ukrainian Math. J. **27** (1975), no. 1, 47–51.
10. І. М. Працьовита, *Ряди Остроградського другого виду і розподіли їх випадкових неповних сум*, Наукові записки НПУ імені М. П. Драгоманова. Фізико-математичні науки, **7** (2006), 174–189.
11. М. В. Працьовитий, *Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів*, Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, Київ, 1998.
12. М. В. Працьовитий, О. М. Барановський, *Властивості розподілів випадкових величин з незалежними різницями послідовних елементів ряду Остроградського*, Теорія ймовір. та матем. статист. **70** (2004), 131–144.
13. Е. Я. Ремез, *О знакопеременных рядах, которые могут быть связаны с двумя алгорифмами М. В. Остроградского для приближения иррациональных чисел*, Успехи мат. наук. **6** (1951), № 5 (45), 33–42.
14. А. Я. Хинчин, *Цепные дроби*, 3-е изд., "Физматгиз", Москва, 1961.

Кафедра вищої математики Національного педагогічного університету імені М.П.Драгоманова, вул. Пирогова, 9, Київ 01130, Україна

Адреса електронної пошти: torbin@imath.kiev.ua

Кафедра вищої математики Національного педагогічного університету ім. М. П. Драгоманова, вул. Пирогова, 9, Київ 01130, Україна

Адреса електронної пошти: lightsoul2008@gmail.com

Надійшла 02/11/2009