Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 81, 2009, стор. 1–12

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 81, 2009, pp. 1–12

ПРО ЕКСПОНЕНЦІЙНІ ГРАНИЦІ ПЕРЕМІШУВАННЯ ТА ШВИДКІСТЬ ЗБІЖНОСТІ ДЛЯ СТЬЮДЕНТОВИХ ПРОЦЕСІВ

УДК 519.21

НИЛУФАР АБУРАШЧІ І О. Ю. ВЕРЕТЕННІКОВ

Анотація. Знайдено експоненційні границі для коефіцієнту β-перемішування у випадку дифузійного стьюдентового процесу, який визначається як марковський дифузійний процес із розподілом Стьюдента в якості стаціонарної міри. Метод доведення оснований на прямому оцінюванні моментів та на поліноміальних функціях Ляпунова для оцінювання експоненційних функціоналів від моментів досягнення.

1. Вступ

Ідея використання процесів із важкими хвостами в граничних розподілах часто обговорюється в світлі різних застосувань. Недавно було запропоновано розглядати деякі конкретні нові класи процесів дифузії з метою використання останніх як основу для деяких стохастичних фінансових застосувань замість вінерівського процесу, див., наприклад, [1]. Один із таких класів було запропоновано називати стьюдентовою дифузією.

Головною причиною заміни вінерівського процесу як основи стохастичної фінансової теорії є загально прийнятий нині факт, що розподіли із важкими хвостами часто зустрічаються на практиці і широко використовуються в коммунікаційних мережах, теорії ризикованих активів і моделюванні в страхуванні; вінерівський процес же, як відомо, не має важких хвостів. Інше розповсюджене переконання в світі математичних фінансів є так зване поняття “довгої пам’яті” ринку, поняття, яке класична модель ринку Блека–Мертона–Шоулса не допускає. Немає строгого визначення довгої та короткої пам’яті, однак, існує розповсюджена точка зору, що поняття “короткої” пам’яті має співвідноситись із експоненційним затуханням того чи іншого інформаційного коефіцієнту, в той час як “довга” пам’ять має відповідати повільнішому, ніж експоненційне затуханню. Отже, можна вважати, наприклад, що *експоненційне перемішування* відповідає короткій пам’яті, а повільніше, наприклад, *поліноміальне перемішування* можна віднести до довгої пам’яті. Звичайно, такій підхід не претендує на звання єдино можливого, оскільки навіть перемішування можна по різному визначити через різні коефіцієнти перемішування.

Ця робота має на меті знайти границі для швидкостей перемішування стьюдентової дифузії. Ми знаходимо експоненційні верхні границі для бета-перемішування.

Таке перемішування можна вважати за таке, що відповідає короткій пам’яті. В подальшому ми будемо звертатись і до інших моделей із важкими хвостами і довгою пам’яттю для інших класів процесів із тими ж стаціонарними розподілами.

Метод знаходження верхніх границь для бета-перемішування для дифузійних процесів був запропонований у 80х другим автором. Для марківських дифузій він

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60H10, 60J60.
Ключові слова і фрази. Стьюдентова дифузія, експоненційне перемішування, важкі хвости.

оснований на "локальному змішуванні", що забезпечується нерівністю Харнака або схожими засобами, двума границями для рекурсії та моментів

$$\mathbb{E}_x e^{\alpha\tau} \le h(x), \quad (\alpha > 0), \tag{1}$$

і

$$\sup_{t\ge 0} \mathbb{E}_x h(X_t) \le Ch(x), \tag{2}$$

або, принаймні,

$$\sup_{t\ge 0} \mathbb{E}_x h(X_t) 1(t \le \tau) \le Ch(x),$$

для деякої функції h, де

$$\tau := \inf(t \ge 0 : X_t \in D)$$

для деякої підходящої множини D, зазвичай, для кулі $B_R = \{x : |x| \le R\}$.

Деякі оцінки, встановлені цим методом, можна знайти в [6], [7], [9].

Виникає природне запитання, чому ми використовуємо бета-перемішування, а не якийсь інший коефіцієнт. Серед інших коефіцієнтів перемішування таких як α, φ і т.п., β є найбільш підходящим, оскільки він є сильнішим за α і, тим не менш, допускає деякі числові оцінювання, в той час як сильніші коефіцієнти, починаючи із ϕ–перемішування є недоцільними для дифузій в некомпактних просторах станів, оскільки зазвичай вони взагалі не затухають саме через цю некомпактність. Чому ж не використовувати коваріацію або корреляцію? Тут пояснення більш тонке. Всі члени сім'ї змішуючих коефіцієнтів – на відміну від коваріації – мають одну дуже гарну властивість: будь-яка верхня границя, встановлена для затухання будь-якого із коефіцієнтів залишається вірною для будь-якого процесу, що є функцією "відповідного процесу". Це робить всі коефіцієнти досить універсальним засобом, наприклад, для ринку цінних паперів, в той час, як коваріація, обрахована для одного процесу не може бути використана для для аналізу деякого пов'язаного процесу. Кінець кінцем, достатньо швидке затухання α (чи β) змішувального коефіцієнту, разом із певними моментами процесу, являють собою зручний інструмент для встановлення центральної граничної теореми, що є основою для будь якого статистичного застосування (див. [2, Теорема 18.4.1], або наслідок 1 нижче).

(Не стаціонарний) β-коефіцієнт перемішування визначається як

$$\beta^x(t) = \sup_{s\ge 0} \mathbb{E}_x \operatorname*{var}_{B\in\mathcal{F}^X_{\ge t+s}} (\mathbb{P}(B|\mathcal{F}^X_{\le s}) - \mathbb{P}(B)),$$

де $\mathcal{F}^X_I$ є σ- полем, породженим значеннями $\{X_s, s \in I\}$, і $\mathbb{E}_x$ визначає сподівання для процесу з початковим значенням x. Підхід, який ми будемо використовувати, заснований на наступний границях, що є варіантами (1) і (2). Нехай $B_R = (x \in R : |x| \le R)$, і

$$\tau := \inf(t \ge 1 : |X_t| \le R).$$

Перша допоміжна границя, яка буде нам потрібна, має вигляд (1),

$$\mathbb{E}_x \exp(\alpha\tau) \le C(1 + |x|^{2m}), \tag{3}$$

для деяких $R > 0, \alpha, m > 0$. Інша технічна границя, яку ми знайдемо є варіантом (2) (формально поклавши $h(x) = 1 + |x|^{2m}$),

$$\sup_{t\ge 0} \mathbb{E}_x |X_t|^{2m} \le C(1 + |x|^{2m}), \tag{4}$$

додатково,

$$\int |x|^{2m} \mu_\infty(dx) < \infty, \tag{5}$$

де μ_∞ позначає єдину стаціонарну міру процесу. Продовжуючи, μ_t^x позначатиме граничний розподіл X_t із заданим початковим значенням $X_0 = x$ для марківського процесу X.

В наступному розділі 2 ми означимо стьюдентів процес у відповідності до [1] і визначимо деякі його основні властивості, відомі з [1]. Розділ 3 містить основний результат для цього процесу, пов'язаний із перемішуванням. Розділ 4 присвячений доведенням.

Підхід із робіт [7] та [6] стосується стохастичних диференціальних рівнянь із обмеженими коефіцієнтами та невиродженою дифузією, в той час як рівняння (6) з розділу 3 має лінійно зростаючу невипадкову частину і дифузію. Отже, для того, щоб застосувати вищезгадану методику, слід впевнитись, що необмеженість коефіцієнтів не додасть нам великих складнощів. Це і є основна причина, чому ми маємо пам'ятати всі основні кроки і перевіряти чи не виникають нові проблеми в доведеннях.

Існує спрощення для варіанту одновимірного простору в порівнянні з [6] і [7], а саме, парування може відбуватись через перетини траєкторій.

2. Стьюдентів процес дифузії. 1

Розглянемо наступне стохастичне диференціальне рівняння в R^1,

$$dX_t = -\theta(X_t - \mu)dt + \sqrt{\frac{2\theta\delta^2}{\nu - 1}\left[1 + \left(\frac{X_t - \mu}{\delta}\right)^2\right]}dB_t, \quad X_0 = x. \tag{6}$$

Тут

$$\nu > 2, \quad \theta > 0, \quad \delta > 0, \quad \mu \in R, \tag{7}$$

і $B = (B_t, t \geq 0)$ – стандартний Броунівський рух. Згідно класичної теореми Іто, вищенаведене стохастичне диференціальне рівняння має єдиний сильний розв'зок. Відомо, що цей розв'зок задовольняє марківську та сильну марківську властивості (див., напр., [3]). Розподіл Стьюдента $T(\nu, \delta, \mu)$ із щільністю

$$f(x) = \frac{c(\nu)}{\delta}\frac{1}{\left[1 + \left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^2\right]^{(\nu+1)/2}} \qquad (x \in R^1), \qquad c(\nu) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)},$$

є стаціонарним для цього марківського процесу. Це легко перевірити, впевнившись в тому, що рівняння $L^* f = 0$ має місце для доповнення $L_2(R^1)$ до генератора

$$L = -\theta(x - \mu)\frac{d}{dx} + \frac{1}{2}\frac{2\theta\delta^2}{\nu - 1}\left[1 + \left(\frac{x - \mu}{\delta}\right)^2\right]\frac{d^2}{dx^2},$$

тобто,

$$L^* h(x) = \frac{d}{dx}(\theta(x - \mu)h(x)) + \frac{d}{dx}\left(\frac{\theta\delta^2}{\nu - 1}\left[1 + \left(\frac{x - \mu}{\delta}\right)^2\right]\frac{dh(x)}{dx}\right).$$

У [1]–[5] ця щільність позначається через $st_\nu(x)$, для заданих δ і μ.

Помітимо, що параметр θ з рівняння (6) не міститься у виразі для стаціонарної щільності st_ν. Це викликано тим, що його зміна варіює лише шкалу швидкості процесу і може бути вилученим просто детерміністичною заміною часу. Наприклад, якщо $X_0 \sim T(\nu, \delta, \mu)$, то X є стаціонарним. Також, для будь-яких $t, s \geq 0$,

$$\mathbb{E}(X_{s+t}|X_s = x) = xe^{-\theta t} + \mu(1 - e^{-\theta t}),$$

і автокорелляційна функція X задається виразом (див., напр., [1])

$$r(t) = \mathrm{Corr}(X_{s+t}, X_s) = e^{-\theta t}, \qquad t \geq 0, \quad s \geq 0.$$

3. Основні результати

Теорема 1. *Для будь-якого* $0 < m < \nu/2$ *і будь-якого* $0 < \alpha < 2m\theta\left(1 - \frac{2m-1}{\nu-1}\right)$, *існує константа* $C > 0$ *така, що*

$$\beta^x(t) \le C(x)\exp(-\alpha t), \quad C(x) = C\left(1 + \left|\frac{x-\mu}{\delta}\right|^{2m}\right). \tag{8}$$

Крім того, існує константа $C > 0$ *така, що*

$$\|\mu^x(t) - \mu_\infty\|_{TV} \le C(x)\exp(-\alpha t), \qquad C(x) = C\left(1 + \left|\frac{x-\mu}{\delta}\right|^{2m}\right). \tag{9}$$

Наслідок 1. *Якщо* $\nu > 4$, $2 < m < \nu/2$, *і* f *– обмежена, тоді має місце слабка збіжність для* $S_t := \int_0^t f(X_s)\,ds$ *як в стаціонарному режимі,*

$$\frac{S_t - t\mathbb{E}_{st} f(X_0)}{\sqrt{t}} \stackrel{\mathbb{P}_{st}}{\Longrightarrow} Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2), \tag{10}$$

так і в нестаціонарному, для будь-якого початкового значення $x \in R$,

$$\frac{S_t - t\mathbb{E}_{st} f(X_0)}{\sqrt{t}} \stackrel{\mathbb{P}_{x}}{\Longrightarrow} Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2), \tag{11}$$

де $0 \le \sigma^2 := 2\int_0^\infty cov_{st}(f(X_0), f(X_t))\,dt < \infty$, *і всі* $\mathbb{P}_{st}$, $\mathbb{E}_{st}$ *і* cov_{st} *відповідають стаціонарному режиму.*

Умова обмеженості f може бути послаблена.

4. Допоміжні результати

Спочатку сформулюємо кілька лем.

Лема 1. *Для будь-яких* $0 < m < \nu/2$, $0 < \alpha < 2m\theta\left(1 - \frac{2m-1}{\nu-1}\right)$, *для досить великих* R, *існує константа* $C > 0$ *така, що*

$$\sup_{t \ge 0} \mathbb{E}_x e^{\alpha(t\wedge\tau)} \left|\frac{X_{t\wedge\tau} - \mu}{\delta}\right|^{2m} \le \left|\frac{x-\mu}{\delta}\right|^{2m}, \tag{12}$$

і

$$\mathbb{E}_x e^{\alpha\tau} \left|\frac{X_\tau - \mu}{\delta}\right|^{2m} \le \left|\frac{x-\mu}{\delta}\right|^{2m}. \tag{13}$$

Доведення. Позначимо

$$\frac{X_t - \mu}{\delta} =: Y_t, \tag{14}$$

тоді

$$dY_t = -\theta Y_t\,dt + \sqrt{\frac{2\theta}{\nu-1}(1 + Y_t^2)}\,dW_t.$$

Значення R буде вибрано пізніше, однак, ми розглянемо лише випадок $R \ge 1$. Далі, розглянемо функцію Ляпунова $f(t,y) := \exp(\alpha t)\psi(y)$, $t \ge 0$, де $\psi(y) := |y|^{2m}$, $|y| \ge 1$, для $m > 0$. Всередині $(-1, +1)$ ми визначаємо функцію ψ так, що вона залишається строго додатною і належить класу C^2.

Застосовуючи формулу Іто до процесу $f(t, Y_t)$ для $t < \tau$, ми маємо,

$$df(t, Y_t) = \alpha \exp(\alpha t)\psi(Y_t)dt + \exp(\alpha t)\psi'(Y_t)\, dY_t + \tfrac{1}{2} \exp(\alpha t)\psi''(Y_t)\, dt$$

$$\equiv \alpha \exp(\alpha t)|Y_t|^{2m} dt$$

$$+2m \exp(\alpha t)|Y_t|^{2m-1} \operatorname{sign}(Y_t)\, dY_t + m(2m-1)\exp(\alpha t)|Y_t|^{2m-2}(dY_t)^2.$$

Тут $dY_t = C_1 Y_t dt + C_2\sqrt{1+Y_t^2}dW_t$, при чому $C_1 = -\theta$ і $C_2 = \sqrt{\frac{2\theta}{\nu-1}}$, і, таким чином, $(dY_t)^2 = C_2^2(1+Y_t^2)dt$. Отже, для $t < \tau$,

$$df(t, Y_t) = \exp(\alpha t)\left(\alpha|Y_t|^{2m}dt + (2m|Y_t|^{2m-1}\operatorname{sign}(Y_t))(C_1 Y_t dt + C_2\sqrt{1+Y_t^2}dW_t)\right.$$

$$\left. + (m(2m-1)C_2^2)(Y_t^{2m-2})(1+Y_t^2)\, dt\right)$$

$$= \exp(\alpha t)|Y_t|^{2m}(\alpha + 2mC_1 + m(2m-1)C_2^2 + m(2m-1)C_2^2|Y_t|^{-2} + \alpha|Y_t|^{-2m})dt$$

$$+(2m \exp(\alpha t)C_2|Y_t|^{2m-1}\operatorname{sign}(Y_t)\sqrt{1+|Y_t|^2})dW_t.$$

Припустимо, що (пригадаймо, що $C_1 = -\theta$, $C_2 = \sqrt{\frac{2\theta}{\nu-1}}$, і $2m < \nu$)

$$\alpha + 2mC_1 + m(2m-1)C_2^2 < 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \alpha < 2\theta m\left(1 - \frac{2m-1}{\nu-1}\right).$$

Для будь-яких значень α і для досить великих R, ми маємо,

$$(\alpha + 2mC_1 + m(2m-1)C_2^2 + m(2m-1)C_2^2|Y_t|^{-2} + \alpha|Y_t|^{-2m}) \le -c < 0.$$

Таким чином,

$$\mathbb{E}_y f(t\wedge\tau, Y_{t\wedge\tau}) - f(0,y) \le -c\,\mathbb{E}_y\int_0^{t\wedge\tau} f(s, Y_s)\, ds. \tag{15}$$

Отже, зокрема, ми отримуємо, що для досить великих R,

$$\mathbb{E}f(t\wedge\tau, Y_{t\wedge\tau}) - f(0, Y_0) \le 0.$$

Це еквівалентно (12). Коли $t \to \infty$, за умов леми Фату ми маємо,

$$\mathbb{E}f(\tau, Y_\tau) \le f(0, Y_0).$$

Це еквівалентно (13). Лему 1 доведено. □

Зауваження 1. Стандартна процедура локалізації може бути використана з метою запобігання питань, чому сподівання зникає із стохастичного інтегралу.

Лема 2. *Для будь-яких* $0 < m < \nu/2$, *і для будь-яких досить великих* R, *існує* $C > 0$ *таке, що*

$$\sup_{t\ge0} \mathbb{E}_x\left|\frac{X_t-\mu}{\delta}\right|^{2m} \le C\left(1 + \left|\frac{x-\mu}{\delta}\right|^{2m}\right). \tag{16}$$

Доведення. В термінах процесу Y, ми покажемо нерівність,

$$\sup_{t\ge0} \mathbb{E}_y\,|Y_t|^{2m} \le C\left(1+|y|^{2m}\right). \tag{17}$$

Застосуймо $f(t,y)$ із $\alpha=0$. Тоді із обчислень в доведенні леми 1, і використовуючи $\inf\psi>0$, отримуємо, що, насправді, для будь-яких $0\le t_1\le t_2<\infty$,

$$\mathbb{E}_y\psi(Y_{t_2})-\mathbb{E}_y\psi(Y_{t_1})$$

$$\le -c\mathbb{E}_y\int_{t_1}^{t_2}\psi(Y_s)1(|Y_s|\ge R)\,ds+C_0\mathbb{E}_y\int_{t_1}^{t_2}\psi(Y_s)1(|Y_s|<R)\,ds$$

$$\equiv -c\mathbb{E}_y\int_{t_1}^{t_2}\psi(Y_s)\,ds+\mathbb{E}_y\int_{t_1}^{t_2}\psi(Y_s)(C_01(|Y_s|<R)+c1(|Y_s|<R))\,ds$$

$$\le -c\mathbb{E}_y\int_{t_1}^{t_2}h(Y_s)\,ds+C\int_{t_1}^{t_2}1\,ds\equiv -c\int_{t_1}^{t_2}\mathbb{E}_y\psi(Y_s)\,ds+C\,(t_2-t_1).$$

Таким чином, якщо похідна функції $g(t):=\mathbb{E}_y\psi(Y_t)\ge 0$ існує, то вона має задовольняти

$$g'(t)\le -cg(t)+C. \tag{18}$$

Звичайно, функція g гарно визначена і неперервна по t. Той факт, що вона є диференційовною випливає з аналогічних викладок, до проведених в доведенні леми 1 (прийнявши $\alpha=0$) якщо ми не будемо використовувати нерівності, а просто запишемо формулу Іто і підрахуємо сподівання прийнявши до уваги вже відомий факт, що сподівання стохастичного інтегралу зникає. Кінцево, всі невід'ємні локально обмежені непереревні функції що задовольняють (18), мають задовольняти нерівність

$$g(t)\le g(0)\exp(-ct)+\frac{C}{c}\quad\Longleftrightarrow\quad \mathbb{E}_y\psi(Y_t)\le\psi(y)\exp(-ct)+\frac{C}{c}.$$

Оскільки $\psi(y)1(|y|\ge R_1)=|y|^{2m}1(|y|\ge R)$ і $\psi\ge 0$, то остання нерівність навіть дещо сильніша за (17). Лемму 2 доведено. $\square$

Лема 3. *Для всіх* $1<m<\nu/2$,

$$\int|x|^{2m}\mu_\infty(dx)<\infty.$$

Доведення. Доведення випливає із явного представлення для стаціонарної щільності. $\square$

Тепер розглянемо прямий добуток двох однакових ймовірнісних просторів з вінеровими процесам, з двома однаковими копіями марківських процесів $(X_t, t\ge 0)$, і $(\tilde X_t, t\ge 0)$, з початковими значеннями x і $\tilde x$. Позначення для ймовірності і сподівань залишаються без змін. Нехай $\gamma\equiv\gamma_{R_1}=\inf(t\ge 0:\ |X_t|\vee|\tilde X_t|\le R_1)$, $\gamma(t)=\min(\gamma,t)$. В наступній лемі ми припускаємо, що константу R вже обрали і зафіксували.

Лема 4. *Для будь-яких* $0<m<\nu/2$, *існує* $R_1\ge R$, $C>0$ *таке, що*

$$\mathbb{E}_{x,\tilde x}\exp(\alpha\gamma)\le C\left(1+\left|\frac{x-\mu}{\delta}\right|^{2m}+\left|\frac{\tilde x-\mu}{\delta}\right|^{2m}\right). \tag{19}$$

Доведення. Щоб довести правильність оцінки, розглянемо функцію Ляпунова із деякою $\alpha>0$ по змінним y і $\tilde y$,

$$f(t,y,\tilde y)=\exp(\alpha t)(\psi(y)+\psi(\tilde y)).$$

Схожим чином до доведення леми 1, застосовуючи формулу Іто, отримуємо

$$df(t,Y_t,\tilde Y_t)=\alpha\exp(\alpha t)(\psi(Y_t)+\psi(\tilde Y_t))\,dt+\exp(\alpha t)\,\psi'(Y_t)\,dY_t$$

$$+\exp(\alpha t)\,\psi'(\tilde Y_t)\,d\tilde Y_t+\frac12\exp(\alpha t)\,\psi''(Y_t)\,(dY_t)^2+\frac12\exp(\alpha t)\,\psi''(\tilde Y_t)(d\tilde Y_t)^2.$$

Щоб довести правильність оцінки, вираз біля dt має бути від'ємним, тобто

$$1(t<\gamma)\ \Big[\alpha(\psi(Y_t)+\psi(\tilde{Y}_t))+C_1(\psi'(Y_t)+\psi'(\tilde{Y}_t))$$
$$\frac{1}{2}C_2^2(\psi''(Y_t)\,(1+|Y_t|^2)+\psi''(\tilde{Y}_t)(1+|\tilde{Y}_t|^2))\Big]\le 0. \tag{20}$$

Маємо три основні випадки (і кілька симметричних підвипадків):

(I) $$|Y_t|\ge R_1\ \ |\tilde{Y}_t|\ge R_1,$$

або

(II) $$|Y_t|\ge R_1,\quad \text{та}\quad R\le|\tilde{Y}_t|<R_1,$$

або

(III) $$|Y_t|\ge R_1\quad \text{та}\quad |\tilde{Y}_t|<R.$$

У випадках (I) і (II), цілий вираз (20) є від'ємним для всіх $R_1\ge R$, в точності завдяки викладкам із доведення Леми 1, оскільки, із вибору R,

$$\left[\alpha|Y_t|^{2m}+2mC_1|Y_t|^{2m}+m(2m-1)(|Y_t|^{2m}+|Y_t|^{2m-2})C_2^2\right]<0,$$

і

$$\left[\alpha|\tilde{Y}_t|^{2m}+2mC_1|\tilde{Y}_t|^{2m}+m(2m-1)(|\tilde{Y}_t|^{2m}+|\tilde{Y}_t|^{2m-2})C_2^2\right]<0.$$

У випадку (III), ми не можемо гарантувати від'ємність внеску члена $\tilde{Y}$: він може виявитись додатнім. Однак, із заданим R, додатня частина членів обмежена модулем

$$\sup_{|y|\le R}\left|\alpha\psi(y)+C_1\psi'(y)+\frac{1}{2}C_2^2\psi''(y)\,(1+|y|^2)\right|=:C_0<\infty.$$

(Ця константа навіть не залежить від R, втім, навіть якби й залежала, то зміна була б незначна.) Виберемо R_1 досить велике щоб для будь-яких $|y|\ge R_1$,

$$\left|2mC_1|y|^{2m}+m(2m-1)(|y|^{2m}+|y|^{2m-2})C_2^2\right|>>C_0.$$

Оскільки від'ємна частина з огляду на Y_t має порядок щонайменше R_1^{2m}, то вона перевищує $g(R)$ за модулем. Отже, шукане твердження випливає із міркувань, аналогічних доведенню Леми 1, і, таким чином, Лему 4 доведено. □

5. Доведення Теореми 1

1. Розглянемо дві незалежні версії нашого марківського процесу X і $\tilde{X}$, обидва є розв'язками рівняння (6) з двома незалежними Вінерівськими процесами, відповідно, $(W_t,t\ge 0)$ та $(\tilde{W}_t,t\ge 0)$, і невипадковими початковими значеннями $X_0=x\in R$ і $\tilde{X}_0=\tilde{x}\in R$. Пізніше, на певних етапах доведення, пари $(\tilde{x},\tilde{y})$ будуть обиратися випадково. Після заміни змінних як у (14), позначимо відповідні процеси через Y і $\tilde{Y}$. Зафіксуємо $s_0\ge 0$. Розглянемо послідовність моментів зупинки, $\gamma_1<\gamma_2<\dots$, визначених наступним чином:

$$\gamma_1=\inf(t\ge s_0:\ |Y_t|\le R\ \text{ і }\ |\tilde{Y}_t|\le R),$$

і для $n\ge 1$ за індукцією,

$$T_n=\inf(t\ge\gamma_n:|Y_t|\ge R+1,\ \text{ або }\ |\tilde{Y}_t|\ge R+1)\wedge(\gamma_n+1);$$
$$\gamma_{n+1}=\inf(t\ge T_n:\ |Y_t|\le R\ \text{ і }\ |\tilde{Y}_t|\le R).$$

Згідно леми 1, отримуємо *апріорні* границі

$$\mathbb{E}(\exp(\alpha(\gamma_1-s_0))|\hat{F}_{s_0})\le C(1+|Y_{s_0}|^{2m}+|\tilde{Y}_{s_0}|^{2m}).$$

і

$$\mathbb{E}(\exp \alpha(\gamma_{n+1} - \gamma_n)|\hat{F}_{\gamma_n}) \leq C.$$

Тут початкові значення не мають сенсу і тому опущені.

2. Ми будемо використовувати процедуру парування як у [6] і [7], основуючись на нерівності Харнака. При заданих Y_{γ_n}, $\tilde{Y}_{\gamma_n}$, розглянемо вихідні міри обох процесів на параболічній границі Γ циліндру

$$(t, y, \tilde{y}) : \gamma_n \leq t \leq \gamma_n + 1, \ |y| \leq R + 1, \ |\tilde{y}| \leq R + 1,$$

тобто,

$$\Gamma = \{(t, y, \tilde{y}) : \gamma_n \leq t \leq \gamma_n + 1, \ |y| = R + 1, \ |\tilde{y}| = R + 1\}$$

$$\bigcup \{(t, y, \tilde{y}) : t = \gamma_n + 1, \ |y| \leq R + 1, \ |\tilde{y}| \leq R + 1\}.$$

Нехай $\delta \in (0, 1)$. Розглянемо, наприклад, частину Γ,

$$\Gamma_\delta = \{(t, y, \tilde{y}) : \gamma_n + \delta \leq t \leq \gamma_n + 1, \ |y| = R + 1, \ |\tilde{y}| = R + 1\}$$
$$\bigcup \{(t, y, \tilde{y}) : t = \gamma_n + 1, \ |y| \leq R + 1, \ |\tilde{y}| \leq R + 1\}.$$

Використовуючи нерівність Харнака [4], вихідні міри обох процесів Y і $\tilde{Y}$ на Γ_δ є еквівалентними з обмеженою варіацією.

Таким чином, на цілому Γ, маємо наступну нерівність,

$$\inf_{y, \tilde{y} \in B_R} \int_\Gamma \left(\frac{P_y((T, Y_T) \in dv)}{P_{\tilde{y}}((T, Y_T) \in dv)} \wedge 1 \right) P_{\tilde{y}}((T, Y_T) \in dv) =: c > 0,$$

яку ми називатимемо локальними умовами перемішування Добрушина і dv є просторовим елементом на Γ.

Отже, використовуючи, наприклад, техніку із [8, Розділ 2.4]), можна вибрати нові представлення для Y і $\tilde{Y}$ на деякому розширеному ймовірнісному просторі на їх виході в Γ таким чином, що вони співпадуть із

$$P_{Y_{\gamma_n}, \tilde{Y}_{\gamma_n}}((T_n, Y_{T_n}) = (T_n, \tilde{Y}_{T_n})) \geq c.$$

Звичайно, такі представлення конструюються на деяких розширеннях нашого початкового ймовірнісного простору. Більше того, маючи значення на γ_n і на виході на Γ, скажімо, T_n, ми можемо відновити траекторію між цими двома значеннями як умовну міру.

Важливо, що тепер, для цього нового представлення

$$P_{F_{\gamma_n}}(Y_{T_n} = \tilde{Y}_{T_n}) \geq c > 0. \tag{21}$$

Отже, ми можемо позначити паруючий момент

$$L := \inf(T_n : Y_{T_n} = \tilde{Y}_{T_n}).$$

Для більш детального опису див. [8].

3. У випадку одного виміру, парування можна представити для більш простої ідеї перетину. Розглянемо заміну змінних

$$y \mapsto \sqrt{\frac{\nu - 1}{2\theta}} (y + \sqrt{1 + y^2}).$$

Для цієї нової шкали, рівняння (6) перетворюється на наступне

$$dY_t = \tilde{b}(Y_t)\, dt + dW_t, \quad Y_0 = y,$$

із

$$\tilde{b}(y) = -\sqrt{\frac{2\theta(\nu - 1)^2 + \theta}{2(\nu - 1)}} \, \frac{\exp(2y) - 1}{\exp(2y) + 1},$$

тобто, корефіцієнт дифузії для цієї шкали рівний одиниці, в той час як $\tilde b$ – обмежена. Замість рівнів R і $R+1$ як у попередніх доведеннях, тут зручніше розглядати рівні R і $R+K$, де K ще слід підібрати. Одне з обмежень на K є те, що K має бути таким, що $K/2 \geq \|\tilde b\|_C$; ще одне обмеження буде наведено нижче. Розглянемо наступну подію,

$$A := \{(Y_{\gamma_n} - \tilde Y_{\gamma_n})Y_{\gamma_n+1} \leq 0, \quad \text{і} \quad (Y_{\gamma_n} - \tilde Y_{\gamma_n})\tilde Y_{\gamma_n+1} \geq 0\}.$$

Для будь-яких Y_{γ_n}, $\tilde Y_{\gamma_n}$ ймовірність цієї події задовольняє таку оцінку

$$\mathbb{P}(A) \geq \Phi(-R - \|\tilde b\|)^2. \tag{22}$$

Дійсно, припустмо, наприклад, що $Y_{\gamma_n} > \tilde Y_{\gamma_n}$. Тоді мінімум ймовірності досягається якщо $Y_{\gamma_n} = R$, $\tilde Y_{\gamma_n} = -R$, і, більше того,

$$A \supset \{W_{\gamma_n+1} - W_{\gamma_n} \leq -R - \|\tilde b\|\} \cap \{\tilde W_{\gamma_n+1} - \tilde W_{\gamma_n} \geq R + \|\tilde b\|\},$$

що і доводить оцінку (22).

Якщо відбувається A, то тоді траєкторії Y і $\tilde Y$ на $[\gamma_n, \gamma_n + 1]$ мусять перетнутись. Їх перший перетин на цьому інтервалі є моментом зупинки, тобто після цього першого перетину ми можемо "зклеїти" два процеси, причому, перший процес Y буде слідувати за другим $\tilde Y$. Є тільки один невеликий нюанс, якщо ми конструюємо напряму, а саме, що ще перед перетином одна чи обидві траєкторії можуть бути далеко від початку координат, іншими словами, вистрибнути із $[-R-K, R+K]$. Шоб уникнути технічних проблем, зручно зупинити процес на такому першому моменті перестрибу. Іншими словами, ми не будемо намагатись парувати їх до $\gamma_n + 1$, натомість будемо починати процедуру заново, тобто чекати до наступної γ_{n+1}, коли обидві компоненти потраплять всередину $[-R, R]$ і будемо намагатись парувати (перетинати) їх знов у $[\gamma_{n+1}, \gamma_{n+1} + 1]$. Ми можемо обрати K досить великим для того, щоб зробити вистрибування із $[-R-K, R+K]$ в часовому інтервалі $[\gamma_n, \gamma_n + 1]$ малоймовірним, тобто для події

$$\begin{aligned} A_K := \{(Y_{\gamma_n} - \tilde Y_{\gamma_n})Y_{\gamma_n+1} \leq 0\} \cap \{(Y_{\gamma_n} - \tilde Y_{\gamma_n})\tilde Y_{\gamma_n+1} \geq 0\} \\ \cap\{\sup_{\gamma_n \leq t \leq \gamma_n+1} (|Y_t| \vee |\tilde Y_t|) < R + K\}, \end{aligned}$$

ми маємо, наприклад,

$$\mathbb{P}(A_K) \geq \Phi(-R - \|\tilde b\|)^2/2. \tag{23}$$

Тепер, парування через перетини L буде прийняте тільки якщо такі перетини трапляються на $[\gamma_n, \gamma_n + 1]$ раніше ніж час виходу $\tilde T_n$, де

$$\tilde T_n := \inf(t \geq \gamma_n : \ |Y_t| \vee |\tilde Y_t| \geq R + K) \wedge (\gamma_n + 1) < \gamma_n + 1.$$

Ймовірність останньої принаймні така ж, як і ймовірність $\mathbb{P}(A_K)$, що задовольняж оцінку (23),

$$\mathbb{P}(\text{перетин раніше ніж } \tilde T_n \mid F_{\gamma_n}) \geq \Phi(-R - \|\tilde b\|)^2/2. \tag{24}$$

Якщо, тим не менш, $\tilde T_n$ відбудеться раніше, то ми просто чекаємо наступної γ_{n+1}, щоб повторити процедуру. Помітимо, що ми можемо досягти кращої оцінки знизу ніж (23), розглядаючи ймовірність події

$$A' := \{(Y_{\gamma_n} - \tilde Y_{\gamma_n})(Y_{\gamma_n+1} - \tilde Y_{\gamma_n+1}) \leq 0\},$$

а саме,

$$\mathbb{P}(A') \geq \Phi(-\sqrt{2}(R + \|\tilde b\|)).$$

Зрозуміло, A' також включає можливість перетину. В частині доведення, що залишилась, ми будемо працювати із послідовністю моментів зупинки (γ_n, T_n) як було запропоновано в пункті 2. Тим не менш, те саме може бути схожим чином пророблене із $(\gamma_n, \tilde T_n)$.

4. Отже, тепер ми тепер будемо аналізувати наступний ітеративний алгоритм "спроб" для парування двох процесів в $L = T_1, T_2, \ldots$

Інакше, якби ми хотіли використовувати перетини, ми можемо визначити момент парування L як

$$L := \inf(t \geq s_0 : \; Y_t = \tilde{Y}_t, |Y_t| < R + K, \; t \in \bigcup_{n \geq 0} [\gamma_n, \gamma_n + 1]).$$

Помітимо, що якщо два процеси не були спаровані раніше γ_n, їх можна спарувати в момент T_n із ймовірністю (21) (або через $(\tilde{T}_n)$, в цьому випадку ми будемо використовувати (24)). Момент парування L є моментом зупинки. Оскільки має місце сильна марківська властивість, після парування, траєкторії двох процесів *можутъ* бути продовжені як ідентичні; наприклад, перший процес буде слідувати за другим. Це не змінює факту, що кожен процес є сильно марківським і таким, що розв'язує рівняння (6). Наша процедура парування автоматично дає оцінку

$$P_y(L_{s_0} > T_n) \leq (1 - c)^n =: \kappa^n. \tag{25}$$

Схожа оцінка має місце у випадку з перетинами

$$P_y(L_{s_0} > \tilde{T}_n) \leq (1 - \tilde{c})^n =: \tilde{\kappa}^n. \tag{26}$$

Тепер, $\forall B \in \mathcal{B}(R)$, ми маємо оцінити різницю,

$$|P_y(Y_{s_0+t} \in B \mid \hat{F}_{s_0}) - P_y(Y_{s_0+t} \in B)|. \tag{27}$$

З цією метою, ми розглянемо другу незалежну версію нащого процесу X, наприклад, $\tilde{X}$, *з початком в* s_0, *із розподілом* $\mu^x_{s_0}$,, тобто, з таким само розподілом, як і у самого X_{s_0}. В термінах процесів Y і $\tilde{Y}$, розглянемо $\hat{Y}_t := \tilde{Y}_{s_0+t}$, $t \geq 0$, з початком в s_0 і розподілом $\nu^y_{s_0}$ (ми використовуємо позначення ν^y_s для розподілу Y_s із початком в y). Маємо,

$$|P_y(Y_{s_0+t} \in B \mid \hat{F}_{s_0}) - P_y(Y_{s_0+t} \in B)| \equiv |P_y(Y_{s_0+t} \in B \mid \hat{F}_{s_0}) - P_{\nu^y_{s_0}}(\hat{Y}_t \in B)|.$$

Викорисовуючи нашу процедуру парування із часом парування L, і припускаючи, для простоти, $s_0 = 0$, ми можемо оцінити для $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $p, q > 0$,

$$|P_{y_1}(Y_t \in B) - P_{y_2}(\tilde{Y}_t \in B)| \leq \mathbb{P}(L > t) \tag{28}$$

$$\leq \mathbb{E}(1(L > t)1(t < T_0)) + \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}(1(L > t)1(T_n \leq t < T_{n+1}))$$

$$\leq \mathbb{E}(1(t < T_0)) + \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(L > T_n)^{1/p} \mathbb{P}(T_{n+1} > t)^{1/q}.$$

Як відомо, $\mathbb{P}(L > T_n) \leq \kappa^n$. Із нерівності Б'єнейме–Чебишева випливає, що

$$\mathbb{P}(\gamma_{n+1} > t) \leq \exp(-\alpha t)\mathbb{E}\exp(\gamma_{n+1})$$

$$\leq \exp(-\alpha t)\mathbb{E}\exp(\alpha[(\gamma_{n+1} - \gamma_n) + (\gamma_n - \gamma_{n-1}) + \ldots + (\gamma_2 - \gamma_1) + \gamma_1])$$

$$\equiv \exp(-\alpha t)\mathbb{E}\exp(\alpha[(\gamma_n - \gamma_{n-1}) + \ldots + (\gamma_2 - \gamma_1) + \gamma_1])$$

$$\times \mathbb{E}_{\gamma_n, Y_{\gamma_n}, \tilde{Y}_{\gamma_n}} \exp(\alpha(\gamma_{n+1} - \gamma_n)).$$

Із леми 2, маємо

$$\mathbb{E}_{\gamma_n, Y_{\gamma_n}, \tilde{Y}_{\gamma_n}} \exp(\alpha(\gamma_{n+1} - \gamma_n)) \leq C.$$

За індукцією, отримуємо,

$$\mathbb{P}(\gamma_{n+1} > t) \leq \exp(-\alpha t) C^{n+1}(1 + |y_1|^{2m} + |y_2|^{2m}).$$

Оскільки $\gamma_{n+1} \leq T_{n+1} \leq \gamma_{n+1} + 1$, ми також маємо,

$$\mathbb{P}(T_{n+1} > t) \leq \exp(-\alpha(t - 1)) C^n (1 + |y_1|^{2m} + |y_2|^{2m}).$$

Отже, оскільки Y_{s_0} і $\tilde{Y}_{s_0}$ є насправді випадковими, отримуємо,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(L > t) &= \mathbb{E}1(L > t)1(t < T_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}1(L > t)1(T_n \le t < T_{n+1}) \\ &\le \mathbb{E}1(t < T_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(L > T_n)^{1/p}\mathbb{P}(T_{n+1} > t)^{1/q} \\ &\le \mathbb{P}(t < T_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \kappa^{n/p}\mathbb{P}(T_{n+1} > t)^{1/q} \\ &\le C\exp(-\alpha(t-1)) \int (1 + |Y_{s_0}|^{2m} + |\tilde{y}|^{2m})\, \mu^y_{s_0}(d\tilde{y}) \\ &+ \sum_{n\ge1}^{\infty} \kappa^{n/p}\exp(-\alpha(t-1))(\hat{C}^{n+1})^{1/q} \int (1 + |Y_{s_0}|^{2m} + |\tilde{y}|^{2m})^{1/q}\, \mu^y_{s_0}(d\tilde{y}) \\ &\le C\exp(-\alpha t)(1 + |Y_{s_0}|^{2m}),\end{aligned}$$

причому остання нерівність має місце, якщо ми виберемо p, q так, що

$$\kappa^{1/p}\hat{C}^{1/q} < 1. \tag{29}$$

Позначення $\hat{C}$ було використане в доведенні замість звичайного C, щоб показати як обирати p і q, щоб вони задовольняли (29). Звідси, із цим вибором, ми оцінюємо коефіцієнт β-перемішування процесу Y за допомогою леми 2,

$$\beta^y_t \le \sup_{s\ge0} C\exp(-\alpha t)\mathbb{E}_y(1 + |Y_s|^{2m}) \le C\exp(-\alpha t)(1 + |y|^{2m}).$$

В термінах початкового процесу X, отримуємо

$$\beta^x_t \le C\exp(-\alpha t)\left(1 + \left|\frac{x-\mu}{\delta}\right|^{2m}\right).$$

5. Загальна відстань варіації оцінюється схожим чином. Нехай $s_0 = 0$, пару незалежних процесів Маркова X і $\tilde{X}$ – або, відповідно, Y і $\tilde{Y}$ – тепер процес $\tilde{X}$ є стаціонарним, так само як і $\tilde{Y}$. Процедура парування є схожою до кроків 2 і 3 вище. Маємо, аналогічно до (28) і в силу леми 3,

$$\begin{gathered}|P_y(Y_t \in B) - P_\nu(\tilde{Y}_t \in B)| \le \mathbb{P}(L > t) \\ \le C\exp(-\alpha(t-1)) \int (1 + |y|^{2m} + |\tilde{y}|^{2m})\, \nu^y_\infty(d\tilde{y}) \le C\exp(-\alpha t)(1 + |y|^{2m}).\end{gathered}$$

В термінах процесу X, звідси випливає оцінка (9). Теорему 1 доведено.

Зауваження 2. Для $1 \le m < \nu/2$, досить брати $\psi(y) \equiv |y|$, що дещо спрощує викладки.

Доведення Наслідку 1 випливає напряму із [2, Теореми 18.4.1], Теореми 1 і нерівності моментів $\mathbb{E}_{st}|X_0|^{2m} < \infty$, припускаючи, що $f \in L_2(\nu)$. (Тут умова обмеженості функції f може бути послаблена.)

Нестаціонарна версія ЦГТ випливає із наступного зауваження, що зводить випадок до стаціонарної версії. Маємо, $\tilde{X}$ – стаціонарна версія процесу і L – час парування.

$$\frac{\int_0^t f(X_s)\,ds - t\,\mathbb{E}f(X_s)}{\sqrt{t}} \equiv \frac{\int_0^t f(\tilde{X}_s)\,ds - t\,\mathbb{E}f(\tilde{X}_s)}{\sqrt{t}} + \frac{\int_0^t (f(X_s) - f(\tilde{X}_s))1(s \le L)\,ds}{\sqrt{t}}.$$

Тут перший член слабко збігається до гауссової випадкової величини, з огляду на (10). Другий член задовольняє оцінку,

$$\left|\frac{\int_0^t (f(X_s) - f(\tilde{X}_s))1(s \le L)\,ds}{\sqrt{t}}\right| \le \mathbb{E}_{x,\mu} \frac{\int_0^t |f(X_s) - f(\tilde{X}_s)|\,1(s \le L)\,ds}{\sqrt{t}}$$

$$\le \frac{2||f||_B}{\sqrt{t}} \int_0^t \mathbb{P}_{x,\mu}(L \ge s)\,ds \le \frac{2||f||_B}{\sqrt{t}}\, C_x\, \frac{1}{c}(1 - \exp(-ct)) \to 0, \quad t \to \infty.$$

Отже, звідси випливає (11) і, таким чином, наслідок доведено.

Подяки

Автори вдячні анонімному рецензенту за корисні зауваження. Другий автор був підтриманий грантом RFBR 08-01-00105a. Стаття є частиною дисертації першого автора.

Література

1. C. C. Heyde and N. N. Leonenko, *Student processes*, Adv. in Appl. Probab. **37(2)** (2005), 342–365.
2. I. A. Ibragimov and Yu. V. Linnik, *Independent and Stationary Sequences of Random Variables*, Wolters-Noordhoff Publ., Groningen, 1971.
3. N. V. Krylov, *The selection of a Markov process from a Markov system of processes, and the construction of quasidiffusion processes*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **37** (1973), 691–708. (Russian)
4. N. V. Krylov and M. V. Safonov, *A property of the solutions of parabolic equations with measurable coefficients*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **44(1)** (1980), 161–175, 239. (Russian)
5. N. N. Leonenko and N. Šuvak, *Statistical inference for Student diffusion process*, Stoch. Analysis Appli. (to appear)
6. A. Yu. Veretennikov, *Estimates of the mixing rate for stochastic equations*, Teor. Veroyatnost. Primenen. **32** (1987), no. 2, 299–308; English transl. in Theory Probab. Appl. **32** (1987), no. 2, 273–281.
7. A. Yu. Veretennikov, *On polynomial mixing and the rate of convergence for stochastic differential and difference equations*, Teor. Veroyatn. Primenen. **44** (1999), no. 2, 312–327; Engl. transl. in Theory Probab. Appl. **44** (2000), no. 2, 361–374.
8. A. Yu. Veretennikov, *On Approximations of Diffusions with Equilibrium*, Institute of Mathematics Reports C17, Helsinki University of Technology, 2004; on-line version at `http://math.tkk.fi/visitors0405/AVslides.pdf`.
9. A. Yu. Veretennikov and S. A. Klokov, *On the subexponential rate of mixing for Markov processes*, Teor. Veroyatn. Primenen. **49** (2004), no. 1, 21–35. (Russian)

School of Mathematics, University of Leeds, LS2 9JT Leeds, UK
Адреса електронної пошти: `niloufar@leeds.ac.uk`

Інститут проблем передачі інформації, Москва, Росія
Поточна адреса: School of Mathematics, University of Leeds, LS2 9JT Leeds, UK
Адреса електронної пошти: `A.Veretennikov@leeds.ac.uk`

Надійшла 28/05/2009