Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 81, 2009, стор. 13–24

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 81, 2009, pp. 13–24

УЗАГАЛЬНЕННЯ ТЕОРЕМИ КАРАМАТИ ПРО АСИМПТОТИЧНУ ПОВЕДІНКУ ІНТЕГРАЛІВ

УДК 519.21

В. В. БУЛДИГІН І В. В. ПАВЛЕНКОВ

Анотація. У роботі отримано узагальнення теореми Карамати про асимптотичну поведінку інтегралів від RV функцій на функції, які містять осциляційні компоненти.

Abstract. In this paper, we consider Karamata's theorem on the asymptotic behavior of integrals for RV functions, and we study an extension of this theorem for functions with oscillation components.

Аннотация. В работе получено обобщение теоремы Караматы об асимптотическом поведении интегралов от RV функций на функции, содержащие осцилляционные компоненты.

1. Вступ

У статтях [6, 7] Й. Карамата ввів поняття регулярно змінної (RV) функції та довів ряд фундаментальних теорем, однією з яких є теорема про асимптотичну поведінку інтегралів від RV функцій. Ця теорема має багато застосувань, зокрема в теорії ймовірностей [5, 3]. Нижче вона узагальнюється на певний клас функцій з невиродженою групою регулярних точок, див. [4].

Нехай $\mathbf{R}$ — множина дійсних чисел, $\mathbf{R}_+$ — множина додатних чисел, $\mathbf{Z}$ — множина цілих чисел та $\mathbf{N}$ — множина натуральних чисел.

Нехай $A > 0$ та $\mathbb{F}_+(A)$ — множина додатних та вимірних (за Лебегом) функцій $f = (f(x), x \geq A)$.

Нагадаємо, що функцію $f \in \mathbb{F}_+(A)$ називають *регулярно змінною (на нескінченності)*, якщо границя

$$\kappa_f(\lambda) = \lim_{x\to\infty} \frac{f(\lambda x)}{f(x)}$$

існує та є додатною та скінченною для всіх $\lambda > 0$.

Про RV функцію f кажуть, що вона *повільно змінюється* (SV), якщо

$$\kappa_f(\lambda) = 1 \quad \text{для всіх } \lambda > 0.$$

Якщо f — RV функція, то знайдеться дійсне число ρ таке, що

$$\kappa_f(\lambda) = \lambda^\rho, \qquad \lambda > 0.$$

Число ρ називають *індексом* функції f. Індекс $\rho = 0$ мають SV функції і тільки вони.

Будь яка RV функція f з індексом ρ має вид

$$f(x) = x^\rho \ell(x), \qquad x \geq A,$$

де ℓ відповідна до f SV функція.

Вимірну дійсну функцію $\varphi(x)$, $x \geq A$, називають *локально інтегровною* якщо вона інтегровна (за Лебегом) на будь-якому відрізку $[a, b] \subset [A, \infty)$.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 26A12, 26A48; Secondary 34C41.

Ключові слова і фрази. RV функції, теорема Карамати, асимптотична поведінка інтегралів, осциляційні функції.

Вирази $\varphi(x) \underset{x\to\infty}{\sim} \psi(x)$, $\varphi(x) \sim \psi(x)$, $x \to \infty$, та $\varphi \sim \psi$ означають, що

$$\lim_{x\to\infty} \varphi(x)/\psi(x) = 1.$$

У цьому випадку кажуть, що функції φ та ψ *асимптотично еквівалентні.*

Теорема Карамати складається з прямої та оберненої теореми, див. [6, 7] для неперервних RV функцій, та [3, 5, 8] для локально інтегровних RV функцій. У цій статті ми розглядаємо лише випадок $\rho > -1$.

Пряма теорема. *Нехай f — локально інтегровна RV функція з індексом $\rho > -1$. Тоді*

$$\int_A^x f(t)\,dt \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{xf(x)}{\rho+1}. \tag{1}$$

Обернена теорема. *Нехай f — локально інтегровна функція з $\mathbb{F}_+(A)$. Якщо знайдеться число $\gamma \in (0,\infty)$ таке, що*

$$\int_A^x f(t)\,dt \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{xf(x)}{\gamma}, \tag{2}$$

то f — RV функція з індексом $\rho = \gamma - 1$.

Мета роботи полягає в узагальненні цих теорем на функції $f \in \mathbb{F}_+(A)$, які мають вид

$$f(x) = x^\rho \ell(x) H(\ln x), \qquad x \ge A, \tag{3}$$

де $\rho \in \mathbf{R}$, $\ell = (\ell(x), x \ge A)$ — SV функція, $H = (H(u), u \in \mathbf{R})$ — додатна неперервна періодична функція.

Клас означених вище функцій позначимо Φ.

2. Означення та попередні відомості

Зупинимось більш детально на функціях з класу Φ (див. (3)). Функції з цього класу є додатними та вимірними. Відповідно всі співмножники в (3) також є додатними та вимірними функціями.

Функція H у (3) є додатною неперервною періодичною функцією. Ця функція є сталою, тобто існує $c > 0$ таке, що $H(x) = c$, $x \in \mathbf{R}$, тоді і тільки тоді, коли f є RV функцією. У цьому випадку функцію H можна приєднати як співмножник до функції ℓ. У противному випадку функція H не є SV функцією і її не можна приєднати до функції ℓ.

Далі будемо вважати, якщо не сказано противне, що

$$H(0) = 1. \tag{4}$$

Умова (4) не звужує класу Φ, оскільки функцію $f \in \Phi$ можна подати у виді

$$f(x) = x^\rho \ell_0(x) H_0(\ln x), \qquad x \ge A,$$

де $H_0(u) = H(u)/H(0)$ і $\ell_0(x) = H(0)\ell(x)$. Зрозуміло, що $H_0(0) = 1$ та ℓ_0 — SV функція.

Функцію

$$r(x) = x^\rho \ell(x), \qquad x \ge A,$$

будемо називати *регулярною* (RV) *компонентою* функції f, а її індекс ρ будемо називати *індексом* функції f ($\rho_f = \rho$). Зрозуміло, що

$$\rho = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln f(x)}{\ln x}.$$

Функцію ℓ будемо називати *повільною* (SV) *компонентою* функції f. Зауважимо, що ця функція може бути розривною.

Функцію H будемо називати *осциляційною функцією* або *осциляційною компонентою* функції f.

Якщо $\varphi = (\varphi(x), x \in \mathbf{R})$ — неперервна періодична функція, то через $S_{\mathrm{per}}(\varphi)$ позначимо множину періодів функції φ, а через $S_{\mathrm{pper}}(\varphi)$ — множину додатних періодів функції φ.

Величину

$$T(\varphi) = \inf S_{\mathrm{pper}}(\varphi)$$

будемо називати *осциляційною характеристикою функції* φ. Оскільки функція φ неперервна, то або $T(\varphi) = 0$ і в цьому випадку функція φ є *сталою*, або $T(\varphi) > 0$ і в цьому випадку $T(\varphi)$ є найменшим додатним періодом функції φ, тобто

$$S_{\mathrm{per}}(\varphi) = \{nT(\varphi), n \in \mathbf{Z}\}.$$

Якщо H є осциляційною компонентою функції f, то її характеристику $T(H)$ будемо також називати *осциляційною характеристикою функції* f і позначати $T(H_f)$.

Клас функцій $f \in \Phi$, у яких $T(H_f) > 0$, позначимо Φ_+ і зауважимо, що функції з класу Φ_+ не є RV функціями, а є функціями з невиродженою групою регулярних точок, див. [4].

Клас функцій

$$\Phi_0 = \Phi \setminus \Phi_+$$

містить функції f з Φ виду (3), де функції H є сталими і за умови (4)

$$H(x) \equiv 1.$$

Отже клас Φ_0 співпадає з класом RV функцій.

Якщо функція f належить класу Φ та має індекс $\rho > -1$, то

$$\int_A^\infty f(x)\,dx = \infty. \tag{5}$$

Дійсно, для будь-якої RV функції $r(x)$, $x \geq A$, з індексом $\rho > -1$

$$\int_A^\infty r(x)\,dx = \infty$$

(див., наприклад, [3, 5, 8]). Тому (5) випливає з нерівності

$$\int_A^\infty f(x)\,dx = \int_A^\infty x^\rho \ell(x) H_l(x)\,dx \geq \kappa \int_A^\infty x^\rho \ell(x)\,dx = \infty,$$

де $\kappa = \inf_{x\in\mathbf{R}} H(x) > 0$.

3. Основні результати

У цьому розділі формулюються дві теореми (пряма та обернена), які узагальнюють теорему Карамати на функції з класу Φ. Приведені також зауваження до цих теорем. Доведенню присвячені наступні розділи роботи, в яких використовуються та розвиваються методи робіт [6, 7] та [3, 5, 8].

Почнемо з узагальнення прямої теореми, див. (1).

Теорема 3.1 (Пряма теорема). *Нехай $f \in \Phi$ — локально інтегровна функція з індексом $\rho > -1$, осциляційною компонентою H та осциляційною характеристикою $T(H) = T$. Тоді знайдеться така додатна неперервна періодична функція $D = (D(x), x \in \mathbf{R})$, яка залежить від ρ та H, що*

$$\int_A^x f(t)\,dt \underset{x\to\infty}{\sim} xD(\ln x) f(x). \tag{6}$$

При цьому виконуються наступні твердження:

1) $T(DH) = T(D) = T(H) = T$, *де* $T(D)$ — *осциляційна характеристика функції* D *та* $T(DH)$ — *осциляційна характеристика функції*

$$DH = (D(x)H(x), x \in \mathbf{R});$$

2) *якщо* f *є* RV *функцією, тобто* $H(x) \equiv 1$ *та* $T = 0$, *то*

$$D(x) = D_{H,\rho}(x) \equiv \frac{1}{\rho+1}; \tag{7}$$

3) *якщо* $f \in \Phi_+$, *тобто* $T > 0$, *то*

$$D(x) = D_{H,\rho}(x) = \frac{\int_0^{T\{x/T\}} e^{(\rho+1)y} H(y)\,dy + C}{H(x)\exp\left(T(\rho+1)\{x/T\}\right)}, \quad x \geq 0, \tag{8}$$

де

$$C = C_{H,\rho} = \frac{\int_0^T e^{(\rho+1)y} H(y)dy}{e^{T(\rho+1)} - 1},$$

та $\{x/T\}$ — *дробова частина числа* x/T.

Перейдемо до узагальнення оберненої теореми (див. (2)).

Теорема 3.2 (Обернена теорема). *Нехай функція* f *з* $\mathbb{F}_+(A)$ *є локально інтегровною. Тоді, якщо знайдеться така додатна неперервна періодична функція* $B = (B(x), x \in \boldsymbol{R})$ *з осциляційною характеристикою* $T(B)$, *що*

$$\int_A^x f(t)\,dt \underset{x\to\infty}{\sim} xB(\ln x)f(x), \tag{9}$$

то функція f *належить класу* Φ *і має індекс* $\rho > -1$ *та осциляційну компоненту* $H = (H(x), x \in \mathbf{R})$. *При цьому виконуються наступні твердження*:

1) $T(BH) = T(H) = T(B)$, *де* $T(H)$ — *осциляційна характеристика функції* H *та* $T(BH)$ — *осциляційна характеристика функції*

$$BH = (B(x)H(x), x \in \mathbf{R});$$

2) *якщо* $T(B) = 0$, *тобто* $B(x) \equiv \beta > 0$, *то*

$$\rho = \frac{1}{\beta} - 1, \tag{10}$$

та $H(x) \equiv 1$, *тобто* f *є* RV *функцією з індексом* (10);

3) *якщо* $T(B) > 0$ *то* f *належить класу* Φ_+,

$$\rho = \frac{1}{T(B)} \int_0^{T(B)} \frac{du}{B(u)} - 1 \tag{11}$$

та

$$H(x) = \frac{B(0)}{B(x)} \exp\left(\int_0^x \left(\frac{1}{B(t)} - (B^{-1})_{av}\right) dt\right), \qquad x \geq 0,$$

де

$$(B^{-1})_{av} = \frac{B(0)}{T(B)} \int_0^{T(B)} \frac{du}{B(u)}.$$

Зауваження 3.1. З (9) випливає, що

$$\liminf_{x\to\infty} xf(x) > 0$$

та разом з цим

$$\int_A^\infty f(t)\,dt = \infty.$$

Зауваження 3.2. Співвідношення (6) та (9) однозначно визначають функції D та B відповідно. Наприклад, якщо (6) виконується для двох додатних неперервних періодичних функцій D_1 та D_2, то $D_1 \sim D_2$, звідки випливає, що $D_1 = D_2$. Отже у теоремах 3.1 та 3.2 $D = B$ і разом з цим всі співвідношення, які виконуються для функції B, виконуються також для функції D та навпаки.

Зауваження 3.3. Якщо у (8) покласти $H(x) \to 1$, $x \in \mathbf{R}$, та $T \to 0$, то

$$D_{H,\rho}(x) \to \frac{1}{\rho+1}, \qquad x \in \mathbf{R},$$

тобто (7) та (8) узгоджені між собою. Така ж сама узгодженність має місце для (10) та (11).

Зауваження 3.4. Нехай $I(x) = \int_A^x f(t)\,dt$, $x > A$. Теорема 3.1 показує, що при інтегруванні локально інтегровної функції f з класу Φ такої, що $\rho_f > -1$, функція I також належить класу Φ. При цьому $\rho_I = \rho_f + 1$, $H_I = H_f B$ та $T(H_I) = T(H_f)$.

4. Лема про асимптотичну поведінку інтегралів

Дослідження асимптотичної поведінки інтегралів від функцій з класу Φ почнемо з наступної леми, яка з незначними змінами повторює доведення теореми Карамати для RV функций, див., наприклад, [3, 5]. Для зручности покладемо $H_l(x) = H(\ln x)$.

Лема 4.1. *Нехай $f \in \Phi$ — локально інтегровна функція з індексом $\rho > -1$, SV компонентою ℓ та осциляційною компонентою H* (див. (3)). *Тоді*

$$\int_A^x f(t)\,dt \underset{x\to\infty}{\sim} \ell(x) \int_A^x t^\rho H_l(t)\,dt. \tag{12}$$

Доведення. Нехай

$$J(x) = \int_{A/x}^1 y^\rho \left(\frac{\ell(xy)}{\ell(x)} - 1\right) H_l(xy)\,dy, \qquad x \geq A,$$

та для $\varepsilon \in (0,1)$

$$J_\varepsilon(x) = \int_\varepsilon^1 y^\rho \left(\frac{\ell(xy)}{\ell(x)} - 1\right) H_l(xy)\,dy, \qquad x \geq (A/\varepsilon).$$

Оскільки H є додатною неперервною періодичною функцією та $\rho > -1$, то для будь-яких $\varepsilon \in (0,1)$ та $x \geq (A/\varepsilon)$

$$|J_\varepsilon(x)| \leq K \int_\varepsilon^1 y^\rho \left|\frac{\ell(xy)}{\ell(x)} - 1\right| dy \leq K \mathrm{sup}_{y\in[\varepsilon,1]} \left|\frac{l(xy)}{l(x)} - 1\right|, \tag{13}$$

де

$$K = \frac{\sup_{x\in\mathbf{R}} H(x)}{\rho+1} < \infty.$$

За теоремою про рівномірну збіжність для SV функцій (див., наприклад, [8])

$$\lim_{x\to\infty} \sup_{y\in[\varepsilon,1]} \left|\frac{l(xy)}{l(x)} - 1\right| = 0$$

для будь-якого $\varepsilon \in (0,1)$.

Звідси та з (13) випливає, що для будь-якого $\varepsilon \in (0,1)$

$$\lim_{x\to\infty} J_\varepsilon(x) = 0. \tag{14}$$

Далі, для будь-яких $\varepsilon \in (0,1)$ та $x \geq (A/\varepsilon)$

$$|J(x) - J_\varepsilon(x)| \leq \int_{A/x}^\varepsilon y^\rho \left|\frac{\ell(xy)}{\ell(x)} - 1\right| H_l(xy)\,dy \leq K\left(\varepsilon^{\rho+1} + (\rho+1)\int_{A/x}^\varepsilon y^\rho \frac{\ell(xy)}{\ell(x)}\,dy\right).$$

Якщо вибрати $\delta \in (0, \rho+1)$, то за теоремою Поттера (див., наприклад, [3]) знайдеться таке $x(\delta) > 0$, що при $x \geq \max\{x(\delta), (A/\varepsilon)\}$

$$\int_{A/x}^{\varepsilon} y^{\rho} \frac{\ell(xy)}{\ell(x)}\, dy \leq 2 \int_{A/x}^{\varepsilon} y^{\rho-\delta}\, dy \leq \frac{2\varepsilon^{\rho+1-\delta}}{\rho+1-\delta}.$$

Отже для будь якого $\varepsilon \in (0,1)$

$$\limsup_{x\to\infty} |J(x) - J_{\varepsilon}(x)| \leq K\left(\varepsilon^{\rho+1} + \frac{2(\rho+1)\varepsilon^{\rho+1-\delta}}{\rho+1-\delta}\right)$$

і, таким чином,

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \limsup_{x\to\infty} |J(x) - J_{\varepsilon}(x)| = 0, \tag{15}$$

оскільки $\rho + 1 - \delta > 0$.

Співвідношення (14) та (15) показують, що

$$\lim_{x\to\infty} J(x) = 0,$$

звідки

$$\int_{A/x}^{1} y^{\rho} \ell(xy) H_l(xy)\, dy \underset{x\to\infty}{\sim} \ell(x) \int_{A/x}^{1} y^{\rho} H_l(xy)\, dy \tag{16}$$

оскільки

$$\liminf_{x\to\infty} \int_{A/x}^{1} y^{\rho} H_l(xy)\, dy > 0.$$

Для завершення доведення леми зауважимо, що в силу (3)

$$\int_A^x f(t)\, dt = \int_A^x t^{\rho} \ell(t) H_l(t)\, dt = x^{\rho+1} \int_{A/x}^{1} y^{\rho} \ell(xy) H_l(xy)\, dy, \qquad x \geq A.$$

Тому, враховуючи (16), бачимо, що при $x \to \infty$

$$\int_A^x f(t)\, dt = x^{\rho+1} \int_{A/x}^{1} y^{\rho} \ell(xy) H_l(xy)\, dy$$
$$\sim x^{\rho+1} \ell(x) \int_{A/x}^{1} y^{\rho} H_l(xy)\, dy = \ell(x) \int_A^x t^{\rho} H_l(t)\, dt,$$

тобто виконується (12). □

Зауваження 4.1. Оскільки в лемі 4.1 $\rho > -1$, то враховуючи (5) бачимо, що співвідношення (12) рівносильне тому, що знайдуться (для всіх) $x_1 \geq A$ та $x_2 > 0$

$$\int_{x_1}^{x} f(t)\, dt \underset{x\to\infty}{\sim} \ell(x) \int_{x_2}^{x} t^{\rho} H_l(t)\, dt.$$

Зауваження 4.2. З леми 4.1 при $H(x) \equiv 1$ випливає пряма теорема Карамати для RV функцій (див. (1)).

5. Початок доведення прямої теореми для функцій з класу Φ_+

Оскільки з леми 4.1 випливає пряма теорема Карамати для RV функцій, то для узагальнення цієї теореми на клас Φ необхідно узагальнити її на клас Φ_+. Наступне твердження є першим кроком на цьому шляху. Повне доведення прямої теореми розглядається у розділі 7.

Лема 5.1. *Нехай $f \in \Phi_+$ — локально інтегровна функція з індексом $\rho > -1$, осциляційною компонентою H та осциляційною характеристикою $T(H) = T$. Тоді*

$$\int_A^x f(t)\,dt \underset{x\to\infty}{\sim} xD(\ln x)f(x), \tag{17}$$

де $(D(x), x \in \mathbf{R})$ — додатна неперервна періодична функція така, що

$$D(x) = D_{H,\rho}(x) = \frac{\int_0^{T\{x/T\}} e^{(\rho+1)y}H(y)\,dy + C}{H(x)\exp\left(T(\rho+1)\{x/T\}\right)}, \qquad x \geq 0,$$

$$C = C(H,\rho) = \frac{\int_0^T e^{(\rho+1)y}H(y)\,dy}{e^{T(\rho+1)} - 1}$$

та $\{x/T\}$ — дробова частина числа $x/T(H)$. Крім того

$$T(D) \leq T(H), \tag{18}$$

де $T(D)$ — осциляційна характеристика функції D.

Доведення. З леми 4.1, співвідношення (5) та зауваження 4.1 випливає, що

$$\int_A^x f(t)\,dt \underset{x\to\infty}{\sim} \ell(x)U_1(x), \tag{19}$$

де ℓ — SV компонента функції f (див. (3)) та

$$U_1(x) = \int_1^x t^\rho H(\ln t)\,dt, \qquad x \geq 1.$$

Зрозуміло, що

$$U_1(x) = \int_0^{\ln x} e^{(\rho+1)u}H(u)\,du = V(\ln x),$$

де

$$V(x) = \int_0^x e^{(\rho+1)u}H(u)\,du = \sum_{k=0}^{[x/T]-1}\int_{kT}^{(k+1)T} e^{(\rho+1)u}H(u)\,du + R(x),$$

$$R(x) = \int_{T[x/T]}^x e^{(\rho+1)u}H(u)\,du$$

та $[x/T]$ — ціла частина числа x/T.

Оскільки H є періодичною функцією з періодом T, то

$$\int_{kT}^{(k+1)T} e^{(\rho+1)u}H(u)\,du = \int_0^T e^{(\rho+1)(y+kT)}H(y)\,dy = e^{kT(\rho+1)}\int_0^T e^{(\rho+1)y}H(y)\,dy$$

для будь-якого $k \in \mathbf{N}$. Тому

$$V(x) = C\left(e^{T(\rho+1)[x/T]} - 1\right) + R(x),$$

де

$$C = \frac{\int_0^T e^{(\rho+1)y}H(y)\,dy}{e^{T(\rho+1)} - 1} > 0.$$

Крім того

$$R(x) = \int_{T[x/T])}^x e^{(\rho+1)u}H(u)\,du = e^{T(\rho+1)[x/T]}\int_0^{T\{x/T\}} e^{(\rho+1)u}H(u)\,du.$$

Після простих перетворень одержуємо рівність

$$U_1(x) = x^{\rho+1}\Theta(\ln x) - C, \qquad x \geq 1, \tag{20}$$

де
$$\Theta(x) = \frac{\int_0^{T\{x/T\}} e^{(\rho+1)y} H(y)\,dy + C}{\exp\left(T(\rho+1)\{x/T\}\right)}, \qquad x \ge 0.$$

При $x \ge 0$ функція Θ є додатною та періодичною з періодом T. Безпосередньо перевіряється, що ця функція є неперервною. Через $\tilde{\Theta} = (\tilde{\Theta}(x), x \in \mathbf{R})$ позначимо неперервне періодичне продовження цієї функції на $\mathbf{R}$.

Оскільки за умовою леми 5.1 $\rho > -1$, то з (20) випливає, що $\lim_{x\to\infty} U_1(x) = \infty$ та
$$U_1(x) \underset{x\to\infty}{\sim} x^{\rho+1}\tilde{\Theta}(\ln x).$$

Тепер, враховуючи (19), бачимо, що виконується (17), якщо покласти
$$D(x) = \frac{\tilde{\Theta}(x)}{H(x)}.$$

Залишається зауважити, що функція $(D(x), x \in \mathbf{R})$ є додатною неперервною періодичною функцією з періодом T, звідки випливає нерівність (18). □

6. Доведення оберненої теореми

Наступна теорема 6.1 дозволяє повністю довести обернену теорему 3.2. Крім того, вона містить деякі доповнення до теореми 3.2. При доведенні теореми 6.1 буде використовуватися лемма 5.1, яка є попереднім варіантом прямої теореми 3.1.

Доведення теореми 3.2 розглядається після доведення теореми 6.1.

Зауважимо, що повне доведення прямої теореми 3.1 використовує обернену теорему 3.2 (див. розділ 7).

Теорема 6.1. *Нехай f — локально інтегровна функція з $\mathbb{F}_+(A)$. Тоді, якщо знайдуться число $\gamma \in (0, \infty)$ та додатна неперервна періодична функція $(\Gamma(x), x \in \boldsymbol{R})$ з осциляційною характеристикою $T(\Gamma) = T$ такі, що $\Gamma(0) = 1$ та*
$$\int_A^x f(t)\,dt \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{x\Gamma(\ln x) f(x)}{\gamma}, \tag{21}$$
то f належить класу Φ, має індекс $\rho > -1$, осциляційну компоненту
$$H = (H(x), x \in \mathbf{R})$$
та осциляційну характеристику $T(H) = T$. При цьому виконуються наступні твердження:

1)
$$T(\Gamma H) = T(H) = T, \tag{22}$$
де $T(H)$ — осциляційна характеристика функції H та $T(\Gamma H)$ — осциляційна характеристика функції $\Gamma H = (\Gamma(x)H(x), x \in \mathbf{R})$;

2) *$T = 0$ тоді і тільки тоді, коли $H(x) \equiv 1$ та*
$$\rho = \gamma - 1, \tag{23}$$
тобто тоді і тільки тоді, коли f є RV функцією з індексом (23);

3) *$T > 0$ тоді і тільки тоді, коли $f \in \Phi_+$,*
$$\rho = \gamma(\Gamma^{-1})_{av} - 1$$
та
$$H(x) = \frac{1}{\Gamma(x)} \exp\left(\gamma \int_0^x \left(\frac{1}{\Gamma(t)} - (\Gamma^{-1})_{av}\right) dt\right), \qquad x \ge 0,$$
де
$$(\Gamma^{-1})_{av} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{du}{\Gamma(u)}.$$

Доведення. Покладемо

$$b(x) = \frac{xf(x)\Gamma(\ln x)}{\int_A^x f(t)\,dt}, \qquad x > A, \tag{24}$$

і зауважимо, що згідно з (21)

$$\lim_{x\to\infty} b(x) = \gamma. \tag{25}$$

З (24) випливає рівність

$$\frac{b(x)}{x\Gamma(\ln x)} = \frac{f(x)}{\int_A^x f(t)\,dt},$$

інтегруючи обидві частини якої бачимо, що

$$\int_{A+1}^x \frac{b(t)\,dt}{t\Gamma(\ln t)} = \ln\left(\int_A^x f(t)\,dt\right) - \ln\left(\int_A^{A+1} f(t)\,dt\right)$$

для будь-якого $x > A+1$. Отже

$$\int_A^x f(t)\,dt = a\cdot\exp\left(\int_{A+1}^x \frac{b(t)\,dt}{t\Gamma(\ln t)}\right), \qquad x > A+1,$$

де

$$a = \int_A^{A+1} f(t)\,dt.$$

З цієї рівності та з (24) випливає зображення

$$f(x) = \frac{ab(x)}{x\Gamma(\ln x)}\exp\left(\int_{A+1}^x \frac{b(t)\,dt}{t\Gamma(\ln t)}\right), \quad x \ge A+1,$$

яке зручно подати у наступному виді:

$$f(x) = \frac{ab(x)}{x\Gamma(\ln x)}\exp\left(\int_A^x \frac{b(t)-\gamma}{t\Gamma(\ln t)}\,dt\right)\exp\left(\gamma\int_A^x \frac{dt}{t\Gamma(\ln t)}\right).$$

При $x > A+1$ покладемо

$$\ell_1(x) = ab(x)c(x),$$

де

$$c(x) = \exp\left(\int_A^x \frac{b(t)-\gamma}{t\Gamma(\ln t)}\,dt\right).$$

Згідно з (25)

$$\lim_{t\to\infty} \frac{(b(t)-1)}{\Gamma(\ln t)} = 0,$$

звідки за теоремою про інтегральне зображення SV функцій (див. [3, 8]) випливає, що $(c(x), x > A+1)$ є SV функцією. Функція $(\ell_1(x), x > A+1)$ також є SV функцією, як добуток SV функцій.

Крім того, при $x \ge A+1$

$$\int_{A+1}^x \frac{dt}{t\Gamma(\ln t)} = \int_{x_0}^{\ln x} \frac{du}{\Gamma(u)} = \int_0^{\ln x} \frac{du}{\Gamma(u)} - \int_0^{x_0} \frac{du}{\Gamma(u)},$$

де $x_0 = \ln(A+1)$. Тому

$$f(x) = \frac{\ell(x)}{x\Gamma(\ln x)}M(\ln x), \qquad x \ge A+1, \tag{26}$$

де

$$M(x) = \exp\left(\gamma\int_0^x \frac{dt}{\Gamma(t)}\right), \qquad x \ge 0,$$

та ℓ — SV функція така, що
$$\ell(x) = \ell_1(x)\exp\left(-\gamma\int_0^{x_0}\frac{dt}{\Gamma(t)}\right), \qquad x > A+1.$$

Тепер означимо число $(\Gamma^{-1})_{av}$ та додатну неперервну періодичну функцію $\tilde{h} = (\tilde{h}(x), x \in \mathbf{R})$. Нехай
$$(\Gamma^{-1})_{av} = \frac{1}{\Gamma(0)} = 1,$$
якщо $T = 0$, тобто якщо функція Γ є сталою, та
$$(\Gamma^{-1})_{av} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{dt}{\Gamma(t)},$$
якщо $T > 0$. Крім того, нехай
$$\tilde{h}(x) \equiv 0,$$
якщо $T = 0$, та
$$\tilde{h}(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{\Gamma(t)} - (\Gamma^{-1})_{av}\right) dt, \qquad x \geq 0,$$
якщо $T > 0$. Зауважимо, що T є періодом функції $\tilde{h}$.

Тоді
$$\int_0^x \frac{dt}{\Gamma(t)} = x(\Gamma^{-1})_{av} + \int_0^x \left(\frac{1}{\Gamma(t)} - (\Gamma^{-1})_{av}\right) dt = x(\Gamma^{-1})_{av} + \tilde{h}(x), \qquad x \geq 0.$$
звідки випливає, що
$$M(x) = \exp\left(x\gamma(\Gamma^{-1})_{av} + \gamma\tilde{h}(x)\right), \qquad x \geq 0.$$

Це дозволяє, враховуючи (26), подати функцію f у наступному виді:
$$f(x) = x^\rho \ell(x) H(\ln x), \qquad x > A+1. \tag{27}$$
де
$$\rho = \gamma(\Gamma^{-1})_{av} - 1,$$
$$H(x) = \exp(h(x)), \qquad x \in \mathbf{R},$$
та
$$h(x) = \gamma\tilde{h}(x) - \ln\Gamma(x), \qquad x \in \mathbf{R}. \tag{28}$$

Оскільки H є додатною неперервною періодичною функцією з періодом T та $H(0) = 1$, то має місце (3), звідки випливає, що функція f належить класу Φ і має індекс
$$\rho = \gamma(\Gamma^{-1})_{av} - 1 > -1. \tag{29}$$

Якщо $T = 0$, то $\Gamma(x) \equiv 1$. Звідси випливає, що $H(x) \equiv 1$, тобто f є RV функцією з індексом $\rho = \gamma - 1$.

Нехай $H(x) \equiv 1$. Тоді з (28) випливає, що додатна неперервна періодична функція Γ є неперервно диференційовним розв'язком наступного лінійного диференціального рівняння першого порядку зі сталими коефіцієнтами:
$$\frac{d\Gamma(x)}{dx} = \gamma(\Gamma^{-1})_{av}\Gamma(x) - \gamma, \qquad x \in \mathbf{R}.$$
Це можливо тоді і тільки тоді, коли $\Gamma(x) \equiv 1$, тобто $T = 0$.

Таким чином рівність $T = 0$ можлива тоді і тільки тоді, коли f є RV функцією з індексом $\rho = \gamma - 1$. Цим самим твердження 2) теореми 6.1 доведено.

Відповідно, нерівність $T > 0$ можлива тоді і тільки тоді, коли функція H не є сталою. У цьому випадку функція H є додатною неперервною періодичною функцією з періодом T. Тому
$$0 < T(H) \leq T. \tag{30}$$

Таким чином $T > 0$ тоді і тільки тоді, коли $f \in \Phi_+$. Звідси та з (27) — (29) випливає твердження 3) теореми 6.1.

Для повного доведення теореми 6.1 треба довести співвідношення (22). Якщо f є RV функцією, то $H(x) \equiv \Gamma(x) \equiv \Gamma(x)H(x) \equiv 1$. Отже $T(H) = T(\Gamma) = T(\Gamma H) = 0$ і (22) виконується.

Нехай тепер $f \in \Phi_+$. Оскільки H — осциляційна компонента функції f, то з леми 5.1 випливає, що за умови (29) знайдеться додатна неперервна періодична функція D, для якої виконується співвідношення (17) и нерівність

$$T(D) \leq T(H). \tag{31}$$

З умови (21) випливає, що для додатної неперервної періодичної функції

$$D_1 = \frac{1}{\gamma}\Gamma$$

також виконується співвідношення (17). Отже дві додатні неперервні періодичні функції D та D_1 асимптотично еквівалентні. Це можливо лише тоді, коли ці функції збігаються. Тому

$$T(D) = T(D_1) = T.$$

Звідси, враховуючи (30) та (31), маємо

$$T(H) = T. \tag{32}$$

Розглянемо тепер функцію $\Gamma H = (\Gamma(x)H(x), x \in \mathbf{R})$. З (28) випливає, що

$$\Gamma(x)H(x) = \exp\left(\int_0^x \left(\frac{1}{\Gamma(t)} - (\Gamma^{-1})_{av}\right) dt\right), \qquad x \geq 0.$$

Оскільки $f \in \Phi_+$, тобто $T > 0$, то додатна періодична функція ΓH має період T. Покажемо, що меншого додатного періоду у функції ΓH не існує. Для цього достатньо довести, що немає меншого додатного періоду у функції

$$\Psi(x) = \ln(\Gamma(x)H(x)) = \int_0^x \left(\frac{1}{\Gamma(t)} - (\Gamma^{-1})_{av}\right) dt, \qquad x \geq 0.$$

Припустимо, що існує число $\tau \in (0, T)$ таке, що

$$\Psi(x + \tau) = \Psi(x)$$

для всіх $x > 0$. Функція Γ є додатною та неперервною, тому з останньої рівності випливає, що

$$\Gamma(x + \tau) = \left(\frac{d\Psi(x+\tau)}{dx}\right)^{-1} = \left(\frac{d\Psi(x)}{dx}\right)^{-1} = \Gamma(x)$$

для всіх $x > 0$. Отже маємо суперечність, оскільки T є найменшим додатним періодом функції Γ. Тому $T(\Gamma H) = T$, що разом з (32) доводить (22).

Таким чином теорему 6.1 повністю доведено. □

Доведення теореми 3.2. Теорема 3.2 випливає з теореми 6.1, якщо покласти

$$\Gamma(x) = \frac{B(x)}{B(0)} \quad \text{та} \quad \gamma = \frac{1}{B(0)}. \quad \square$$

7. Доведення прямої теореми

Нарешті ми можемо завершити у повному обсязі доведення теореми 3.1.

Доведення. Твердження 2) випливає з леми 4.1, твердження 1) випливає з твердження 1) теореми 3.2 та твердження 3) випливає з леми 5.1. □

8. Висновки

У роботі встановлено узагальнення теореми Карамати про асимптотичну поведінку інтегралів зі змінною верхньою границею від функцій з регулярною зміною, які мають індекс $\rho > -1$. Узагальнення проведене для функцій, які поряд з регулярними компонентами містять осциляційні компоненти. Одержані у роботі результати дають можливість вивчати абелеві та тауберові теореми для відповідних функцій, що має значення для теорії ймовірностей.

Література

1. S. Aljančić and D. Arandelović, *O-regulary varying functions*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) **22(36)** (1977), 5–22.
2. V. G. Avakumović, *Uber einen O-Inversionssatz*, Bull. Int. Acad. Youg. Sci. (1936), 29–30, 107–117.
3. N. H. Bingham, C. M. Goldie, and J. L. Teugels, *Regular Variation*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
4. V. V. Buldygin, O. I. Klesov, and J. G. Steinebach, *On factorization representations for Avakumović–Karamata functions with nondegenerate groups of regular points*, Anal. Math. 30 (2004), 161–192.
5. L. de Haan, *On Regular Variation and its Application to the Weak Convergence of Sample Extremes*, Math. Centre Tracts, vol. 32, Amsterdam, 1975.
6. J. Karamata, *Sur un mode de croissance régulière des fonctions*, Mathematica (Cluj) **4** (1930), 38–53.
7. J. Karamata, *Sur un mode de croissance régulière. Théoremès fondamentaux*, Bull. Soc. Math. France **61** (1933), 55–62.
8. E. Seneta, *Regularly Varying Functions*, Springer, Berlin, 1976.

Кафедра математичного аналізу і теорії ймовірностей, Національний технічний університет України ("КПІ"), просп. Перемоги, 37, Київ 03056, Україна

Адреса електронної пошти: matan@ntu-kpi.kiev.ua

Кафедра математичного аналізу і теорії ймовірностей, Національний технічний університет України ("КПІ"), просп. Перемоги, 37, Київ 03056, Україна

Надійшла 03/11/2009