Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 81, 2009, стор. 46–52

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 81, 2009, pp. 46–52

НЕКОТОРЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ РЕГУЛИРУЕМЫХ ВЕТВЯЩИХСЯ ПРОЦЕССОВ

УДК 519.21

Я. М. ХУСАНБАЕВ

Аннотация. .

Abstract. .

Аннотация. Получены предельные теоремы для ветвящихся процессов, зависящих от размера популяции, содержащие достаточные условия сходимости таких процессов к детерминированному процессу. Доказаны функциональные центральные предельные теоремы для флуктуации.

Пусть $\{\xi_{k,j}(l),\ k,j,l \in \mathbb{N}\}$ — совокупность неотрицательных, целозначных независимых случайных величин, причем величины $\xi_{k,j}(l)$, $k,j \in \mathbb{N}$, одинаково распределены. Определим процесс X_k, $k \geq 0$ следующими рекуррентными соотношениями

$$X_0 = 1, \quad X_k = \sum_{j=1}^{X_{k-1}} \xi_{k,j}\left(X_{k-1}\right), \ \ k \geq 1. \tag{1}$$

Так определенный процесс называют ветвящимся процессом, зависящим от размера популяции, или регулируемым ветвящимся процессом.

Ветвящиеся процессы, зависящие от размера популяции, изучены, например, в работах [1], [2], [5]–[10], [14]–[16], [18]–[21]. Так, в работах [2]–[5] и [6], [7], [18] исследованы условия вырождения процессов типа (1), а также достаточные условия сходимости соответствующим образом нормированных величин X_n к конечной случайной величине. Условия справедливости центральной предельной теоремы для регулируемых ветвящихся процессов (1) изучены в работе [8]. В работах [16], [21] найдены условия, при которых распределение X_n/n слабо сходится при $n \to \infty$ к гамма-распределению. В работе [19] рассмотрена популяция клеток, каждая из которых живет единицу времени, после чего либо делится на две, либо умирает, причем вероятность деления зависит от численности популяции, и найдена асимптотическая функция распределения времени выхода численности популяции из заданных пределов. А в работе [20] результаты, полученные в [19], обобщены на более общий класс процессов. Статистические задачи для процессов типа (1) изучены, например, в работах [9], [10]. В [14]–[15] исследованы φ-регулируемые ветвящиеся процессы. В данной работе установлены некоторые достаточные условия сходимости при $n \to \infty$ процессов $\{X_{[nt]}, t \geq 0\}$, $n \geq 1$ (где знак $[a]$ означает целую часть числа a), к детерминированному процессу и функциональные центральные предельные теоремы для отклонения $X_{[nt]}$, $t \geq 0$, от предельного процесса.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $\mathbf{E}\xi_{1,1}^2(x) < \infty$ для любого $x \in \mathbb{N}$ и введем следующие обозначения

$$m(x) = \mathbf{E}\xi_{1,1}(x), \quad \sigma^2(x) = \mathbf{var}\xi_{1,1}(x).$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60J80; Secondary 60F17, 60J65.

Ключевые слова и фразы. Ветвящийся процесс, зависящий от размера популяции, слабая сходимость, винеровский процесс, предельная теорема.

Пусть $\mathcal{F}_k = \sigma\{X_0, X_1, \ldots, X_{k-1}\}$ — σ-алгебра, порожденная величинами
$$\{X_0, X_1, \ldots, X_{k-1}\}.$$
Процесс (1) представим в виде
$$X_k = X_{k-1} + (m(X_{k-1}) - 1)\, X_{k-1} + M_k, \tag{2}$$
где
$$M_k = \sum_{k=1}^{X_{k-1}} \left(\xi_{k,j}(X_{k-1}) - m(X_{k-1})\right).$$

Очевидно, что M_k, $k \geq 1$, образуют мартингал-разность относительно потока $\mathcal{F}_k$, $k \geq 1$. Пусть $\varepsilon_\infty = \{X_n \to \infty\}$ и $q = 1 - \mathbf{P}(\varepsilon_\infty)$. В дальнейшем $T > 0$ — любое фиксированное число, знак $I(A)$ будет обозначать индикатор события A.

Теорема 1. *Пусть для $x > 0$ $m(x) = 1 + \frac{\alpha}{x}$ для некоторого $\alpha > 0$, и $x\sigma^2(x) \leq Cx^\beta$ для некоторого $0 \leq \beta < 1$. Тогда*
$$\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \frac{X_{[nt]}}{n} - \alpha t \right| \xrightarrow{P} 0 \quad \textit{при} \quad n \to \infty$$
на множестве ε_∞.

Заметим, что при условиях теоремы 1 из результатов работы [4] следует, что $P(\varepsilon_\infty) > 0$.

Доказательство теоремы 1. Имеем
$$X_{k+1} = X_k + (m(X_k) - 1)X_k I(X_k > 0) + M_k.$$
Усредняя последнее соотношение и суммируя получаем
$$\mathbf{E}X_{n+1} = 1 + \alpha \sum_{k=0}^{n} P(X_k > 0).$$

Так как $\lim_{n\to\infty} P(X_n > 0) = 1 - q$, то из последнего соотношения и из леммы Тёплица следует, что
$$\mathbf{E}\frac{X_n}{n} \to \alpha(1 - q) \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{3}$$

Далее, из (2) имеем
$$X_{k+1}^2 = X_k^2 + 2(m(X_k) - 1)X_k^2 + (m(X_k) - 1)^2 X_k^2 + M_k^2 + 2m(X_k)X_k M_k.$$
Отсюда получаем
$$\mathbf{E}X_{k+1}^2 = \mathbf{E}X_k^2 + 2\alpha\mathbf{E}X_k + \alpha^2 P(X_k > 0) + \mathbf{E}X_k\sigma^2(X_k).$$
Суммируя имеем
$$\mathbf{E}X_{n+1}^2 = 1 + 2\alpha \sum_{k=0}^{n} \mathbf{E}X_k + \alpha^2 \sum_{k=0}^{n} P(X_k > 0) + \sum_{k=0}^{n} \mathbf{E}X_k\sigma^2(X_k). \tag{4}$$

Очевидно, что
$$\frac{1}{(n+1)^2} \sum_{k=0}^{n} P(X_k > 0) \leq \frac{n}{(n+1)^2} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{5}$$

В силу леммы Тёплица и из (3) получаем
$$\frac{2\alpha}{(n+1)^2} \sum_{k=0}^{n} \mathbf{E}X_k \sim \frac{2\alpha^2(1-q)}{(n+1)^2} \sum_{k=1}^{n} k \to \alpha^2(1 - q) \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{6}$$

Согласно условию теоремы и применяя известное неравенство
$$\left(\mathbf{E}|\xi|^r\right)^{1/r} \leq \left(\mathbf{E}|\xi|^l\right)^{1/l}, \quad r \leq l$$

имеем
$$\mathbf{E}X_k\sigma^2(X_k) \le C\mathbf{E}X_k^{\beta} \le C\left(\mathbf{E}X_k\right)^{\beta}.$$

Теперь отсюда, учитывая (3) и применяя лемму Тёплица, получаем
$$\sum_{k=0}^{n}\mathbf{E}X_k\sigma^2(X_k) \le C\sum_{k=1}^{n}(\mathbf{E}X_k)^{\beta} \sim C(\alpha(1-q))^{\beta}\sum_{k=1}^{n}k^{\beta} \sim$$
$$\sim C(\alpha(1-q))^{\beta}\int_0^1 x^{\beta}dx\cdot n^{1+\beta} = C\frac{(\alpha(1-q))^{\beta}}{1+\beta}n^{1+\beta} \text{ при } n\to\infty. \tag{7}$$

Следовательно,
$$\frac{1}{(n+1)^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}X_k\sigma^2(X_k) \le C\frac{(\alpha(1-q))^{\beta}}{1+\beta}\cdot\frac{n^{1+\beta}}{(n+1)^2}\to 0 \text{ при } n\to\infty,$$
так как $\beta<1$. Отсюда и из (4)–(6) следует, что
$$\mathbf{E}\left(\frac{X_n}{n}\right)^2 \to \alpha^2(1-q) \text{ при } n\to\infty.$$

Последнее соотношение вместе с (3) влечет, что
$$\frac{X_{[nt]}}{n}\xrightarrow{P}\alpha t \text{ при } n\to\infty \tag{8}$$
на множестве ε_∞ для любого $t\ge 0$. Отсюда, применяя приём Крамера-Уолда, получаем, что конечномерные распределения $n^{-1}X_{[nt]}$, $t\ge 0$, слабо сходятся к соответствующим распределениям αt, $t\ge 0$ на множестве ε_∞.

Теперь установим плотность $\left\{n^{-1}X_{[nt]}, t\in[0,T]\right\}$, $n\ge 1$. Пусть $s,t\in[0,T]$ и $0\le s<t\le T$. Применяя элементарное неравенство $(a+b)^2\le 2(a^2+b^2)$ имеем
$$\mathbf{E}\left(\frac{X_{[nt]}}{n}-\frac{X_{[ns]}}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^2}\mathbf{E}\left(\alpha\sum_{k=[ns]+1}^{[nt]}I(X_k>0)+\sum_{k=[ns]+1}^{[nt]}M_k\right)^2 \le$$
$$\le\frac{2}{n^2}\left(\alpha^2([nt]-[ns])^2+\sum_{k=[ns]+1}^{[nt]}\mathbf{E}M_k^2\right)\le 3\left(\alpha^2(t-s)^2+\frac{1}{n^2}\sum_{k=[ns]+1}^{[nt]}\mathbf{E}X_k\sigma^2(X_k)\right).$$

Теперь, аналогичными рассуждениями как и при получении (7), для достаточно больших n имеем
$$\mathbf{E}\left(n^{-1}X_{[nt]}-n^{-1}X_{[ns]}\right)^2\le 3\left((\alpha^2(t-s)^2+C\frac{\alpha^{\beta}}{1+\beta}\frac{n^{1+\beta}}{n^2}\left(t^{1+\beta}-s^{1+\beta}\right)\right)\le$$
$$\le 3\left(\alpha^2(t-s)^2+\frac{C(\alpha T)^{\beta}}{n^{1-\beta}}(t-s)\right).$$

Отсюда и из того, что $\frac{X_0}{n}\xrightarrow{P}0$ при $n\to\infty$ согласно теореме 12.3 [13] следует, что $\frac{X_{[nt]}}{n}$, $t\in[0,T]$, $n\ge 1$ плотно. Тогда в силу (8) из критерия сходимости [13] получаем слабую сходимость в $D[0,T]$
$$\frac{X_{[nt]}}{n}\to\alpha t \text{ при } n\to\infty \tag{9}$$
на множестве ε_∞. Так как предельный процесс непрерывен, то сходимость (9) имеет место и в равномерной топологии, что и завершает доказательство теоремы 2.

Всюду в дальнейшем мы будем рассматривать ветвящийся процесс X_k, $k\ge 0$ только на множестве ε_∞. Принимая во внимание метод сужения мы всегда можем считать, что пространством элементарных событий является ε_∞. Очевидно, что $X_k\ge 1$ для всех $k\ge 0$ на этом множестве.

Обозначим через $\xrightarrow{D}$ слабую сходимость случайных процессов в пространстве $D[0,T]$, а через W будем обозначать стандартный винеровский процесс.

Теорема 2. *Пусть $m(x) = 1 + \frac{\alpha}{x}$ для некоторого $\alpha > 0$, и $x\sigma^2(x) = 1$. Пусть для любого $\varepsilon > 0$*

$$\gamma_n(\varepsilon) = n \sup_{x\geq 1} \mathbf{E}\left((\xi_{1,1}(x) - m(x))^2 I\left(|\xi_{1,1}(x) - m(x)| > \varepsilon\sqrt{n}\right)\right) \to 0$$

при $n \to \infty$. Тогда имеет место слабая сходимость

$$\frac{X_{[nt]} - n\alpha t}{\sqrt{n}},\ t \in [0,T]\ \xrightarrow{D} W(t),\ t \in [0,T]\ \text{ при }\ n \to \infty$$

в пространстве $D[0,T]$ на множестве ε_∞.

Теорема 3. *Пусть $m(x) = 1 + \frac{\alpha}{x}$ для некоторого $\alpha > 0$, и $x\sigma^2(x) = 1$. Пусть существует неслучайное число $A > 0$ такое, что $\xi_{k,j}(x) \leq A$ п.н. для всех $k, j, x \in \mathbb{N}$. Тогда справедливо утверждение теоремы 2.*

Теорема 4. *Пусть $m(x) = 1 + \frac{\alpha}{x}$ и $x\sigma^2(x) = x^{-2(1-\gamma)}$ при некоторых $\alpha > 0$ и $0 < \gamma < 1$. Пусть*

$$n^{2(1-\gamma)} \sup_{x\geq 1} \mathbf{E}\left((\xi_{1,1}(x) - m(x))^2 \cdot I\left(|\xi_{1,1}(x) - m(x)| > \varepsilon n^\gamma\right)\right) \to 0\ \text{ при }\ n \to \infty$$

для любого $\varepsilon > 0$. Тогда имеет место слабая сходимость

$$n^{-\gamma}(X_{[nt]} - n\alpha t),\ t \in [0,T]\ \xrightarrow{D}\ W(\rho(t)),\ t \in [0,T]\ \text{ при } n \to \infty$$

в пространстве $D[0,T]$ на множестве ε_∞, где $\rho(t) = \frac{\alpha^{2\gamma-1}}{2\gamma}t^{2\gamma}$.

Заметим, что условия, накладываемые на $m(x)$ и $\sigma^2(x)$ в теоремах 2–4, согласно результатам работы [4], обеспечивают выполнение $\mathbf{P}(\varepsilon_\infty) > 0$.

Легко увидеть, что условие равномерной ограниченности величин $\xi_{k,j}(x)$ в теореме 3 обеспечивает выполнение условия $\gamma_n(\varepsilon) \to 0$ при $n \to \infty$ теоремы 2, а теоремы 2 и 4 доказываются аналогичными рассуждениями. Поэтому мы остановимся только на доказательстве теоремы 2.

Замечание. *Утверждения теорем 2 и 3 остаются в силе, если в них условие $x\sigma^2(x) = 1$ заменить на $x\sigma^2(x) \to 1$ при $x \to \infty$.*

Доказательство теоремы 2. Нетрудно видеть, что

$$\frac{X_{[nt]} - n\alpha t}{\sqrt{n}} = \frac{1 + [nt]\alpha - n\alpha t}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{[nt]} M_k. \tag{10}$$

Так как

$$\sup_{0\leq t\leq T} \frac{|1 + [nt]\alpha - n\alpha t|}{\sqrt{n}} \to 0\ \text{ при }\ n \to \infty, \tag{11}$$

то в силу теоремы 4.1 [13] для доказательства теоремы 2 достаточно показать, что

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{[nt]} M_k,\ t \in [0,T]\ \xrightarrow{D} W(t),\ t \in [0,T]\ \text{ при }\ n \to \infty.$$

В силу теоремы 7.1.11 [12] последнее соотношение имеет место, если

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{[nt]} \mathbf{E}\left(M_k^2\ /\mathcal{F}_k\right) \to t\ \text{ при }\ n \to \infty, \tag{12}$$

и для любого $\varepsilon > 0$

$$L_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{[nt]} \mathbf{E}\left(M_k^2 I\left(|M_k| > \varepsilon\sqrt{n}\right)/\mathcal{F}_k\right) \xrightarrow{P} 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{13}$$

Рассмотрим (12). Ясно, что

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{[nt]} \mathbf{E}\left(M_k^2\ /\mathcal{F}_k\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{[nt]} X_{k-1}\sigma^2(X_{k-1}) = \frac{[nt]}{n} \to t \ \text{ при } \ n \to \infty,$$

что и показывает справедливость (12).

Теперь докажем (13). Имеем

$$L_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{[nt]} \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{X_{k-1}} \left(\xi_{k,i}(X_{k-1}) - m(X_{k-1})\right)^2 I\left(|M_k| > \varepsilon\sqrt{n}\right)/\mathcal{F}_k\right) +$$

$$+\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{[nt]} \mathbf{E}\sum_{i=2}^{X_{k-1}}\sum_{j=1}^{i-1} \left(\left(\xi_{k,i}(X_{k-1}) - m(X_{k-1})\right)\left(\xi_{k,j}(X_{k-1}) - m(X_{k-1})\right) \times\right.$$

$$\left.\times\, I\left(|M_k| > \varepsilon\sqrt{n}\right)/\mathcal{F}_k\right) = L_{n1}(t) + L_{n2}(t). \tag{14}$$

Обозначим

$$S_j^k = \sum_{i=1}^{X_{k-1}} \left(\xi_{k,i}(X_{k-1}) - m(X_{k-1})\right) - \left(\xi_{k,j}(X_{k-1}) - m(X_{k-1})\right), \ \ j \le X_{k-1}.$$

Используя неравенство

$$I(|X+Y| > 2\varepsilon) \le I\left(|X| > \varepsilon\right) + I\left(|Y| > \varepsilon\right),$$

справедливое для любых случайных величин X, Y и для любого $\varepsilon > 0$, имеем

$$L_{n1}(t) \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{[nt]} \mathbf{E}\left(\sum_{j=1}^{X_{k-1}} \left(\xi_{k,j}(X_{k-1}) - m(X_{k-1})\right)^2 I\left(|S_j^k| > \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{2}\right)\Big/\mathcal{F}_k\right) +$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{[nt]} \mathbf{E}\left(\sum_{j=1}^{X_{k-1}} \left(\xi_{k,j}(X_{k-1}) - m(X_{k-1})\right)^2 \times\right.$$

$$\left.\times\, I\left(|\xi_{k,j}(X_{k-1}) - m(X_{k-1})| > \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{2}\right)\Big/\mathcal{F}_k\right) = L_{n1}^{(1)}(t) + L_{n1}^{(2)}(t). \tag{15}$$

Так как $\xi_{k,j}(X_{k-1}) - m(X_{k-1})$ и S_j^k условно независимы относительно $\mathcal{F}_k$, то, применяя условный вариант неравенства Чебышева [17], получаем

$$L_{n1}^{(1)}(t) \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{[nt]}\sum_{j=1}^{X_{k-1}} \sigma^2(X_{k-1}) \cdot \mathbf{P}\left(|S_j^k| > \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{2}\Big/\mathcal{F}_k\right) \le$$

$$\le \frac{4}{\varepsilon^2 n^2}\sum_{k=1}^{[nt]} X_{k-1}(X_{k-1}-1)\sigma^4(X_{k-1}) \le \frac{4[nt]}{\varepsilon^2 n^2} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{16}$$

Из теоремы 1 и теоремы о непрерывном отображении (теорема 5.1 [13]) получаем

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{[nt]} X_k \to \frac{1}{n}\int_0^{\frac{[nt]}{n}} X_{[ns]}ds \xrightarrow{P} \frac{\alpha t^2}{2} \ \text{ при } \ n \to \infty.$$

Тогда

$$L_{n1}^{(2)}(t) \le \gamma_n\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{[nt]} X_{k-1} = \frac{1}{n}\int_0^{\frac{[nt]}{n}} X_{[ns]}ds\cdot\gamma_n\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \xrightarrow{P} 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty. \tag{17}$$

Из (15)-(17) следует, что

$$L_{n1}(t) \xrightarrow{P} 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty. \tag{18}$$

Теперь перейдем к оценке $L_{n2}(t)$. Положим

$$\theta_k = 2\sum_{i=2}^{X_{k-1}}\sum_{j=1}^{i-1}\left(\xi_{k,i}(X_{k-1}) - m(X_{k-1})\right)\left(\xi_{k,j}(X_{k-1}) - m(X_{k-1})\right).$$

Тогда

$$L_{n2}(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{[nt]}\mathbf{E}\left(\theta_k\cdot I\left(|M_k| > \varepsilon\sqrt{n}\right)/\mathcal{F}_k\right).$$

Нетрудно видеть, что

$$\mathbf{E}\left(\theta_k^2/\mathcal{F}_k\right) = 4\sum_{i=2}^{X_{k-1}}(i-1)\sigma^4(X_{k-1}) = 2X_{k-1}(X_{k-1}-1)\sigma^4(X_{k-1}) \le 2.$$

Теперь, учитывая последнее соотношение и применяя условный вариант неравенства Коши-Буняковского [17], имеем

$$L_{n2}(t) \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{[nt]}\left(\mathbf{E}\left(\theta_k^2/\mathcal{F}_k\right)\right)^{1/2}\cdot\left(\mathbf{P}\left(|M_k| > \varepsilon\sqrt{n}/\mathcal{F}_k\right)\right)^{1/2} \le$$

$$\le \frac{\sqrt{2}}{n}\sum_{k=1}^{[nt]}\left(\frac{\mathbf{E}\left(M_k^2/\mathcal{F}_k\right)}{\varepsilon^2 n}\right)^{1/2} = \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon n^{3/2}}\sum_{k=1}^{[nt]}\left(X_{k-1}\cdot\sigma^2(X_{k-1})\right)^{1/2} = \frac{\sqrt{2}[nt]}{\varepsilon n^{3/2}} \to 0$$

при $n\to\infty$. Отсюда и из (14), (18) следует (13), что и завершает доказательство теоремы 2.

Пример. Пусть случайная величина $\xi_{k,j}(x)$ принимает значения 0, 1 и 2 с вероятностями $\frac{1}{2}x^{-2}$, $1 - x^{-1} - x^{-2}$ и $x^{-1} + \frac{1}{2}x^{-2}$, соответственно. В этом случае имеем $m(x) = 1 + x^{-1}$, $\sigma^2(x) = x^{-1}$. Значит, выполнены условия теоремы 1 с $\alpha = 1$, $\beta = 0$. В силу этой теоремы процесс $n^{-1}X_{[nt]}$, $t\in[0,T]$ при $n\to\infty$ слабо сходится к процессу t, $t\in[0,T]$ на множестве ε_∞. Причем $q < 1$ в силу теоремы 1.4 [3]. Кроме того, для этого случайного процесса также выполнены все условия теоремы 3, в силу которой процесс $n^{-1/2}(X_n(t) - nt)$, $t\ge 0$ слабо сходится в $D[0,T]$ при $n\to\infty$ к винеровскому процессу $W(t)$, $t\ge 0$.

Автор выражает свою благодарность рецензенту, замечания которого способствовали улучшению данной работы.

Список литературы

1. P. Haccou, P. Jagers, and V. A. Vatutin, *Branching Processes. Variation, Growth, and Extinction of Populations*, Cambridge University Press, 2005.
2. Joshua B. Levy, *Transience and recurrence of state-dependent branching processes with an immigration component*, Adv. Appl. Probab. **11** (1979), 73–92.
3. G. Kersting, *On recurrence and transience of growth models*, J. Appl. Probab. **23** (1986), 614–625.
4. G. Kersting, *Some properties of stochastic difference equations*, Stochastic Modeling in Biology (P. Tautu, ed.), World Scientific, Singapore, 1990, pp. 328–339.
5. P. Küster, *Asymptotic growth of controlles Galton–Watson processes*, Ann. Probab. **13** (1985), no. 4, 1157–1178.

6. F. C. Klebaner, *A limit theorem for population-size-dependent branching processes*, J. Appl. Probab. **22** (1985), 48–57.
7. F. C. Klebaner, *Geometric rate of growth in population-size-dependent branching processes*, J. Appl. Probab. **21** (1984), 40–49.
8. Loti Viaud Pierre, *A strong law and a central limit theorem for controlled Galton–Watson processes*, J. Appl. Probab. **31** (1994), 22–37.
9. N. Lalam and C. Jacob, *Estimation of the offspring mean in a supercritical or near-critical size-dependent branching process*, Adv. Appl. Probab. **36** (2004), 582–601.
10. N. Lalam, C. Jacob, and P. Jagers, *Modelling the PCR amplification process by a size-dependent branching process and estimation of the efficiency*, Adv. Appl. Probab. **36** (2004), 602–615.
11. А. Н. Ширяев, *Вероятность*, "Наука", Москва, 1980.
12. Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев, *Теория мартингалов*, "Наука", Москва, 1986.
13. П. Биллингсли, *Сходимость веротяностных мер*, "Наука", Москва, 1977.
14. Б. А. Севастьянов, А. М. Зубков, *Регулируемые ветвящиеся процессы*, Теория вер. и ее прим. **19** (1974), №. 1, 15–25.
15. А. М. Зубков, *Аналогии между процессами Гальтона–Ватсона и φ-ветвящимися процессами*, Теория вер. и ее прим. **19** (1974), № 2, 319–339.
16. F. C. Klebaner, *On population-size-dependent branching processes*, Adv. Appl. Probab. **16** (1984), 30–55.
17. А. А. Боровков, Теория вероятностей, Москва, "Наука", 1986.
18. T. Fujimagari, Controlled Galton–Watson processes and its asymtotic behaviour, Kodai Math. Sem. Rep. **27** (1976), 11–18.
19. Л. В. Левина, А. М. Леонтович, И. И. Пятецкий-Шапиро, *Об одном регулируемом ветвящемся процессе*, Проблемы передачи информации **IV** (1968), № 2, 72–82.
20. В. А. Лабковский, *Предельная теорема для обобщенных ветвящихся случайных процессов, зависящих от размера популяции*, Теория вер. и ее прим. **17** (1972), № 1, 71–83.
21. F. C. Klebaner, *Population-size-dependent branching process with linear rate of growth*, J. Appl. Probab., **20** (1983), 242–250.

Отдел теории вероятностей и математической статистики, Институт математики и информационных технологий, ул. Дурмон йули, 29, Ташкент 100125, Узбекистан
Адрес электронной почты: yakubjank@mail.ru

Поступила 06/08/2007