НЕРІВНІСТЬ ДЛЯ ВІДСТАНІ ЛЕВІ МІЖ ДВОМА ФУНКЦІМИ РОЗПОДІЛУ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

УДК 519.21

К.-Х. ІНДЛЕКОФЕР, О. І. КЛЕСОВ І Й. Г. ШТАЙНЕБАХ

Анотація. Ми доводимо нерівномірну оцінку у термінах відстані Леві для відхилення між двома функціями розподілу. Наведені застосування цієї оцінки до так званої глобальної центральної граничної теореми та повної збіжності.

1. Вступ

Нехай F та G — дві функції розподілу. Відстань Леві $\mathfrak{L}(F,G)$ між F та G визначається наступним чином

$$\mathfrak{L}(F,G) = \inf \mathbb{H}, \tag{1.1}$$

де

$$\mathbb{H} = \{h\colon G(x-h) - h \le F(x) \le G(x+h) + h \text{ для всіх } x\}.$$

Відстань Леві є менш популярною у теорії ймовірностей, ніж рівномірна відстань

$$\Delta(F,G) = \sup_{x\in\mathbf{R}} |F(x) - G(x)|. \tag{1.2}$$

Переваги відстані Леві стають зрозумілими при вивченні слабкої збіжності

$$F_n \xrightarrow{w} G, \qquad n\to\infty,$$

яка є еквівалентною до $\mathfrak{L}(F_n,G)\to 0$ $(n\to\infty)$ (див., наприклад, [7]). Якщо функція G є неперервною, то слабка збіжність $F_n \xrightarrow{w} G$ $(n\to\infty)$ є також еквівалентною і до $\Delta(F_n,G)\to 0$ $(n\to\infty)$, хоча, якщо G має розриви, ця властивість може не виконуватись. Ми також нагадаємо, що завжди

$$\mathfrak{L}(F,G) \le \Delta(F,G).$$

Маючи на меті вивчати деякі питання, пов'язані зі слабкою збіжністю, ми розглядаємо відхилення $|F(x) - G(x)|$ між двома функціями розподілу. Оцінка, яку ми отримуємо в розділі 2, є нерівномірною за x та записується у термінах відстані Леві $\mathfrak{L}(F,G)$. Після цього ми розглядаємо деякі приклади застосувань отриманої оцінки. В розділі 3, ми доводимо узагальнення так званої глобальної центральної граничної теореми. Розділ 4 містить деякі результати для узагальненої повної збіжності.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60F15.

Ключові слова і фрази. Відстань Леві, глобальна центральна гранична теорема, повна збіжність.

Підтримано грантом DFG.

2. Оцінка відхилення через відстань Леві

В цьому розділі ми зосередимось на випадку $G = \Phi$, де Φ — це стандартна $\mathcal{N}(0,1)$ гауссівська функція розподілу.

Оцінки для $|F(x)-\Phi(x)|$, які виражаються через рівномірну відстань, вивчалися у багатьох роботах. Найбільш популярним є випадок, коли F відповідає сумі незалежних випадкових величин. Початок цим дослідженням було покладено у роботі Ессеена [5].

Колодяжний [11] розширив результати роботи [5], довівши наступну теорему.

Теорема A (Теорема Колодяжного). *Нехай F — довільна функція розподілу. Покладемо $\Delta = \Delta(F,\Phi)$. Нехай $p > 0$. Припустимо, що для F існує момент порядку p. Позначимо*

$$\lambda_p = \left| \int_{-\infty}^{\infty} |x|^p \, dF(x) - \int_{-\infty}^{\infty} |x|^p \, d\Phi(x) \right|. \tag{2.1}$$

Якщо

$$0 < \Delta \le \frac{1}{\sqrt{e}}, \tag{2.2}$$

то існує універсальна константа c_Δ, яка залежить тільки від p, така, що

$$|F(x) - \Phi(x)| \le \frac{\lambda_p + c_\Delta \Delta \left(\ln \frac{1}{\Delta}\right)^{p/2}}{1 + |x|^p} \tag{2.3}$$

для всіх $x \in \mathbf{R}$.

Схожий результат у термінах відстані Леві отримано в [10].

Теорема B (Теорема Індлекофера–Клесова). *Нехай F — довільна функція розподілу. Покладемо $L = \mathcal{L}(F,\Phi)$. Нехай $p > 0$. Припустимо, що для F існує момент порядку p. Якщо*

$$0 < L \le \frac{1}{\sqrt{e}}, \tag{2.4}$$

то існує універсальна константа c_L, яка залежить тільки від p, така, що

$$|F(x) - \Phi(x)| \le \frac{\lambda_p + c_L L \left(\ln \frac{1}{L}\right)^{p/2}}{1 + |x|^p} \tag{2.5}$$

для всіх $x \in \mathbf{R}$, де константа λ_p визначена рівністю (2.1).

Зауваження 2.1. Умови та твердження теорем A та B дійсно викладають дуже схожими. Тим не менше, зауважимо, що якщо

$$L \le \frac{1}{\sqrt{e}} < \Delta,$$

то умови теореми B виконані, а теореми A — ні.

Зауваження 2.2. Оскільки нижче ми доводимо кращий результат, ми не будемо проводити порівняльний аналіз теорем A та B. Тим не менше, зробимо кілька зауважень з цього приводу.

Існують випадки, у яких з однієї з двох теорем A або B випливає інша. Оскільки функція $x\left(\ln x^{-1}\right)^{p/2}$ зростає на інтервалі $\left(0, e^{-p/2}\right)$ і спадає на інтервалі $\left(e^{-p/2}, 1\right)$, то з (2.5) випливає (2.3), якщо

$$\Delta \le \min\left\{ \frac{1}{\sqrt{e^p}}, \frac{1}{\sqrt{e}} \right\}. \tag{2.6}$$

Більше того, константа c_Δ набуває того ж значення, що й c_L у цьому випадку. З іншої сторони, з нерівності (2.3) випливає (2.5), якщо $p \geq 1$ та

$$\frac{1}{\sqrt{e^p}} \leq L \leq \Delta \leq \frac{1}{\sqrt{e}}. \tag{2.7}$$

Тепер вже константа c_L має те ж значення, що і c_Δ. Обмеження (2.6) можна вживати при вивченні центральної граничної теореми, а (2.7) — ні оскільки для центральної граничної теореми необхідно, щоб $\Delta \to 0$.

Оскільки

$$\Delta \leq \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) L$$

при $G = \Phi$, то існують інші взаємозв'язки між теоремами А та В. У подальшому ми використовуємо нерівність (2.5), а не (2.3) навіть у тих випадках, де справджуються обидві. Це пояснюється тим, що і інші функції G (навіть розривні) можуть виникати у (2.5) замість Φ, тоді як (2.3) не має узагальнення для випадку розривних функцій, які можуть виникати у якості границь для слабкої збіжності. Ми сподіваємось пізніше опублікувати теорему В також і для інших G.

У наступному результаті ми позбуваємось обмеження (2.4).

Теорема 1. *Нехай F — довільна функція розподілу. Позначимо через $L = \mathfrak{L}(F, \Phi)$ відстань Леві між F та Φ. Нехай $p > 0$ і нехай F має момент порядку p. Тоді існує функція g, означена на інтервалі $(0, 1)$, яка залежить лише від p, така, що*

$$\lim_{s \downarrow 0} g(s) = 0$$

та

$$|F(x) - \Phi(x)| \leq \frac{\lambda_p + g(L)}{1 + |x|^p} \tag{2.8}$$

для всіх $x \in \mathbf{R}$, якщо $0 \leq L < 1$.

Зауваження 2.3. Випадок $L = 0$ еквівалентний до $F = \Phi$. Дійсно, для будь-якого $h \in \mathbb{H}$ маємо

$$\Phi(x) \geq F(x - h) - h, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Якщо $L = 0$, то $\Phi(x) \geq F(x)$, $x \in \mathbf{R}$, оскільки F неперервна зліва. Переставивши Φ та F в означенні L, ми доводимо обернену нерівність, звідки $F = \Phi$.

Зауваження 2.4. Випадок $L = 1$ неможливий для будь-якої функції розподілу F. Це випливає з оцінки

$$L \leq \Delta < 1$$

оскільки $0 < \Phi(x) < 1$ для всіх x.

Зауваження 2.5. Нерівність (2.8) покращує нерівність Маркова у деяких випадках. Нехай $F^*(x)$ — це хвіст F, тобто

$$F^*(x) = 1 - F(x) + F(-x), \qquad x \geq 0. \tag{2.9}$$

Для спрощення припустимо, що $p = 2$ та що перші два моменти F та Φ рівні. Тоді з нерівності Маркова випливає

$$F^*(x) \leq \frac{1}{x^2},$$

тоді як (2.8) ми отримуємо

$$F^*(x) \leq |F^*(x) - \Phi^*(x)| + \Phi^*(x) \leq \frac{2g(L)}{1 + x^2} + \Phi^*(x).$$

Якщо L мале, а x велике, то остання оцінка краща за ту, що отримана з нерівності Маркова.

Функцію g можна подати у явному вигляді при додатковому припущенні.

Теорема 2. *Нехай F — довільна функція розподілу. Позначимо $L = \mathcal{L}(F,\Phi)$. Нехай $p > 0$. Припустимо, що F має момент порядку p. Нарешті, нехай $L_0 \in (0,1)$ фіксоване, а $0 < L \le L_0$. Тоді існує константа c_p, яка залежить лише від p та L_0, така, що*

$$|F(x) - \Phi(x)| \le \frac{\lambda_p + c_p L \left(\ln \frac{1}{L}\right)^{p/2}}{1 + |x|^p} \tag{2.10}$$

для всіх $x \in \mathbf{R}$.

Теорема 2 співпадає з теоремою B, якщо $L_0 = e^{-1/2}$. Зауважимо також, що константа c_p спадає при спаданні L_0, якщо p фіксоване.

Доведення теореми 1. На підставі зауважень 2.3 та 2.4 ми обмежуємось розглядом випадку $0 < L < 1$. Доведення нижче використовує основні ідеї доведення у [11], але адаптовані для випадку відстані Леві.

Позначимо через $\mathcal{C}(F)$ множину точок неперервності функції F. Для тих $a > 0$, для яких $\pm a \in \mathcal{C}(F)$, ми маємо

$$\begin{aligned}
\int_{(-a,a)} |x|^p \, dF(x) &= \int_{(-a,a)} |x|^p \, d[F(x) - \Phi(x)] + \int_{(-a,a)} |x|^p \, d\Phi(x) \\
&= a^p[F(a) - \Phi(a)] - a^p[F(-a) - \Phi(-a)] \\
&\quad - p \int_{(0,a)} x^{p-1}[F(x) - \Phi(x)] \, dx \\
&\quad + p \int_{(-a,0)} |x|^{p-1}[F(x) - \Phi(x)] \, dx + \int_{(-a,a)} |x|^p \, d\Phi(x).
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Для всіх $h \in \mathbb{H}(F,\Phi)$ та всіх $x \in \mathbf{R}$

$$\begin{aligned}
F(x) - \Phi(x) &= F(x) - \Phi(x-h) + h - h + \Phi(x-h) - \Phi(x) \\
&\ge -h - [\Phi(x) - \Phi(x-h)].
\end{aligned}$$

З теореми про середнє та з нерівності $\Phi'(\xi) = \varphi(\xi) \le 1/\sqrt{2\pi}$ випливає, що

$$\Phi(x) - \Phi(x-h) \le \frac{h}{\sqrt{2\pi}},$$

звідки

$$F(x) - \Phi(x) \ge -h\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right), \qquad h \in \mathbb{H}(F,\Phi), \tag{2.12}$$

для всіх $x \in \mathbf{R}$. Це означає, що

$$F(a) - \Phi(a) \ge -h\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right), \qquad h \in \mathbb{H}(F,\Phi). \tag{2.13}$$

Аналогічно

$$\begin{aligned}
F(x) - \Phi(x) &= F(x) - \Phi(x+h) - h + h + \Phi(x+h) - \Phi(x) \\
&\le h + [\Phi(x+h) - \Phi(x)],
\end{aligned}$$

тобто

$$F(x) - \Phi(x) \le h\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right), \qquad h \in \mathbb{H}(F,\Phi), \tag{2.14}$$

для всіх $x \in \mathbf{R}$. При $x = -a$ отримуємо

$$F(-a) - \Phi(-a) \le h\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right), \qquad h \in \mathbb{H}(F,\Phi). \tag{2.15}$$

З (2.14) випливає, що для кожного $h \in \mathbb{H}(F, \Phi)$

$$\int_{(0,a)} |x|^{p-1}[F(x) - \Phi(x)]\, dx \le \int_{(0,a)} |x|^{p-1} h \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) dx = \frac{1}{p} a^p h \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right).$$

Аналогічно, з (2.12) випливає, що

$$\int_{(-a,0)} |x|^{p-1}[F(x) - \Phi(x)]\, dx \ge -\frac{1}{p} a^p h \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right).$$

Комбінуючи останні дві оцінки з (2.13), (2.15) та підставляючи їх до (2.11), ми отримуємо

$$\int_{(-a,a)} |x|^p\, dF(x) \ge -hB_p + \int_{(-a,a)} |x|^p\, d\Phi(x),$$

де

$$B_p = 4\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) a^p. \tag{2.16}$$

З означення λ_p виводимо

$$\lambda_p \ge \int_{|x|<a} |x|^p\, dF(x) - \int_{|x|<a} |x|^p\, d\Phi(x) + \int_{|x|\ge a} |x|^p\, dF(x) - \int_{|x|\ge a} |x|^p\, d\Phi(x)$$
$$\ge -hB_p + \int_{|x|\ge a} |x|^p\, dF(x) - \int_{x\ge a} |x|^p\, d\Phi(x),$$

звідки

$$\int_{|x|\ge a} |x|^p\, dF(x) \le \lambda_p + hB_p + \int_{|x|\ge a} |x|^p\, d\Phi(x).$$

Далі, якщо $x \ge a$, то

$$\int_{|y|\ge a} |y|^p\, dF(y) \ge \int_{y\ge x} y^p\, dF(y) \ge x^p(1 - F(x)) \ge x^p[\Phi(x) - F(x)].$$

Тому для будь-якого $h \in \mathbb{H}(F, \Phi)$

$$x^p[\Phi(x) - F(x)] \le \lambda_p + hB_p + \int_{|y|\ge a} |y|^p\, d\Phi(y). \tag{2.17}$$

Тепер

$$F(x) - \Phi(x) \le 1 - \Phi(x) \le \int_{|y|\ge x} d\Phi(y) \le \frac{1}{x^p} \int_{|y|\ge x} |y|^p\, d\Phi(y), \qquad x \in \mathbf{R}, \tag{2.18}$$

звідки випливає, що для всіх $x \ge a$

$$x^p[F(x) - \Phi(x)] \le \int_{|y|\ge a} |y|^p\, d\Phi(y).$$

Поєднуючи цю оцінку з (2.17), доводимо для $x \ge a$ та $h \in \mathbb{H}(F, \Phi)$, що

$$|x|^p|F(x) - \Phi(x)| \le \lambda_p + hB_p + \int_{|y|\ge a} |y|^p\, d\Phi(y). \tag{2.19}$$

Аналогічна оцінка виконана й для $x \le -a$. Нарешті, ця ж оцінка справджується і для $|x| < a$ на підставі (2.12) та (2.14). Тому (2.19) виконується для всіх $x \in \mathbf{R}$.

Таке ж міркування проводимо і для $p = 0$. Зауважимо, що $\lambda_0 = 0$. Тому

$$(1 + |x|^p)|F(x) - \Phi(x)| \le \lambda_p + hB_p + hB_0 + \int_{|y|\ge a} |y|^p\, d\Phi(y) + \int_{|y|\ge a} d\Phi(y). \tag{2.20}$$

Права частина цієї оцінки є неперервною функцією a (див (2.16)), тому обмеження $\pm a \in \mathcal{C}(F)$ можна усунути. Таким чином (2.20) виконується для всіх $a > 0$. Більше того, переходячи до інфімуму відносно $h \in \mathbb{H}(F, \Phi)$, ми доводимо для всіх $x \in \mathbf{R}$ та всіх $a > 0$, що

$$(1+|x|^p)|F(x)-\Phi(x)| \leq \lambda_p + LB_p + LB_0 + \int_{|y|\geq a} |y|^p \, d\Phi(y) + \int_{|y|\geq a} d\Phi(y), \quad (2.21)$$

де L — відстань Леві між F та Φ. Тому одержуємо (2.8) з

$$g(L) = \inf_{a>0} f(L,a),$$

де, для $0 \leq s < 1$ та $a > 0$,

$$f(s,a) = s\kappa a^p + s\kappa + \int_{|y|\geq a} |y|^p \varphi(y)\, dy + \int_{|y|\geq a} \varphi(y)\, dy, \quad (2.22)$$

а $\kappa = 4\left(1+(2\pi)^{-1/2}\right)$ (див (2.16)).

Якщо функція α є зростаючою на $(1,\infty)$ та такою, що

$$\lim_{z\to\infty} \alpha(z) = \infty, \qquad \lim_{z\to\infty} \frac{\alpha(z)}{z^{1/p}} = 0,$$

то

$$g(s) \leq f(s, \alpha(1/s)) \to 0, \qquad s \downarrow 0.$$

Це закінчує доведення теореми 1. □

Доведення теореми 2. Спочатку ми міркуємо, як і у доведенні теореми 1, і доводимо (2.21). Тепер ми обиремо $\alpha(z) = \sqrt{2\ln z}$ та розглянемо функцію в (2.22) для $a \geq a_0$, де $a = \sqrt{2\ln(1/L)}$ та $a_0 = \sqrt{2\ln(1/L_0)}$. Тоді

$$L \leq c_1 L \left(\ln\frac{1}{L}\right)^{p/2},$$

де $c_1 = (\ln(1/L_0))^{-p/2}$, та

$$\int_a^\infty \varphi(x)\, dx \leq c_2 \int_a^\infty x^p \varphi(x)\, dx,$$

де $c_2 = a_0^{-p}$. Зауважимо також, що для деякої константи c_3, яка залежить від a_0,

$$\int_a^\infty x^p \varphi(x)\, dx \leq c_3 a^{p-1}\varphi(a), \qquad a \geq a_0.$$

Тому

$$\begin{aligned} f(L,a) &\leq c_3\left(La^p + \int_a^\infty x^p\varphi(x)\, dx\right) \\ &\leq c_4\left(L\left(\ln\frac{1}{L}\right)^{p/2} + L\left(\ln\frac{1}{L}\right)^{(p-1)/2}\right) \\ &\leq c_5 L\left(\ln\frac{1}{L}\right)^{p/2}. \quad \square \end{aligned}$$

3. Узагальнення глобальної центральної граничної теореми

Агнью [2] першим вивчав співвідношення між слабкою збіжністю та збіжністю дл нуля інтегралів в (3.3) (див. нижче). Необхідно зазаначити, що гранична функція у Агнью може бути довільною, а не тільки Φ. Ми ж обмежуємось випадком Φ у якості слабкої границі для того, щоб підкреслити основні можливості нашого підходу. Більше того, щоб мати можливість порівняти, ми формулюємо результати інших авторів також тільки для Φ навіть у тих випадках, коли вони справджуються і для більш загальних граничних функцій розподілу.

Схожі результати можна також отримати і з теореми A, (див., наприклад, [15] та [16]). Інші методи доведення можна знайти в [18] та [12].

Агнью [2] довів такий результат.

Теорема C (Агнью [2]). *Нехай $\{F_n\}$ — послідовність функцій розподілу таких, що*

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\,dF_n(x) = 0 \qquad \text{та} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^2\,dF_n(x) = 1. \tag{3.1}$$

Припустимо, що

$$F_n \xrightarrow{w} \Phi, \qquad n \to \infty. \tag{3.2}$$

Тоді для всіх $r > \frac{1}{2}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F_n(x) - \Phi(x)|^r\,dx \to 0, \qquad n \to \infty. \tag{3.3}$$

Фактично Агнью [2] довів, що у деякому розумінні слабка збіжність еквівалентна умові (3.3).

Ми можемо доповнити цей результат, розглянувши випадок $r = \frac{1}{2}$.

Теорема 3. *Нехай $\{F_n\}$ — послідовність функцій розподілу, які задовольняють умові* (3.1). *Якщо виконується* (3.2), *то*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|F_n(x) - \Phi(x)|^{1/2}}{(\ln(1+|x|))^{1+\delta}}\,dx \to 0, \qquad n \to \infty, \tag{3.4}$$

для всіх $\delta > 0$.

Зауважимо, що функції розподілу $\{F_n\}$ в теоремі C довільні і не обов'язково відповідають частковим сумам незалежних випадкових величин. Цей більш частковий, хоча і більш типовий, випадок розглядається у наступному випадку.

Наслідок 1. *Нехай $\{X_n\}$ — послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин, а $\{S_n\}$ — їхні часткові суми. Припустимо, що*

$$\mathsf{E}\,X_1 = 0 \quad \text{та} \quad \mathsf{E}\,X_1^2 = 1.$$

Якщо $r > \frac{1}{2}$, то виконується умова (3.3), *де F_n означає функцію розподілу випадкової величини $n^{-1/2}S_n$.*

Цей результат був узагальнений Ессееном [6] для незалежних, але не обов'язково однаково розподілених випадкових величин $\{X_n\}$ у припущенні, що вони задовольняють центральну граничну теорему. Наступні узагальнення належать Акості та Жіне [1].

Зрозуміло, що чим меншим є $r > 0$, тим сильнішим є збіжність в (3.3). Тому природним є з'ясувати чи можна обмеження $r > \frac{1}{2}$ у попередніх результатах послабити до $r > 0$. Вперше позитивну відповідь на це питання дав Нішімура [14]. Як відзначено Росальскі [17], доведення в [14] є неповним, причому умови Нішімури можна покращити.

Теорема D (Лаубе [13] та Росальскі [17]). *Нехай $\{F_n\}$ — послідовність функції розподілу таких, що*

$$\sup_{n\geq 1}\int_{-\infty}^{\infty}|x|^p\,dF_n(x)<\infty \tag{3.5}$$

для деякого $p>1$. Припустимо, що F_n збігається слабко до Φ при $n\to\infty$. Тоді виконується (3.3) *для всіх $r>\frac{1}{p}$.*

Ми доводимо аналог теореми D для $r=1/p$.

Теорема 4. *Нехай виконані всі припущення теореми D. Тоді*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|F_n(x)-\Phi(x)|^{1/p}}{(\ln(1+|x|))^{1+\delta}}\,dx\to 0,\qquad n\to\infty, \tag{3.6}$$

для всіх $\delta>0$.

Доведення теореми 4 є таким же, як і доведення теореми 3.

Теорему D можна узагальнити наступним чином.

Теорема 5. *Нехай $p>0$ та $r>0$. Нехай $\{F_n\}$ — послідовність функцій розподілу, таких, що $F_n\xrightarrow{w}\Phi$, $n\to\infty$, й виконується умова* (3.5)*. Нехай g — додатна функція, така, що*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(x)}{(1+|x|)^{rp_1}}\,dx<\infty\quad \text{для деякого } 0<p_1<p. \tag{3.7}$$

Тоді

$$\int_{-\infty}^{\infty}g(x)|F_n(x)-\Phi(x)|^r\,dx\to 0,\qquad n\to\infty.$$

Зауваження 3.1. Теорему 5 для $g(x)=1+|x|^q$, $q\geq 0$, довів Петров (див. теорему 14 в [16, глава 1]). Умова (3.7) в цьому випадку зводиться до $pr>1+q$.

Випадок $q=0$ у теоремі Петрова приводить до теореми D. Свій результат для часткового випадку $q=0$, $p=2$ Петров отримує з теореми A (див. теорему 15 в [15, §5, Chapter V] або [16, §5, Chapter V]).

Якщо виключити припущення про слабку збіжність з умови теореми 5, ми отримаємо наступний загальний результат.

Теорема 6. *Нехай $p>0$ та $r>0$. Нехай $\{F_n\}$ — послідовність функцій розподілу, таких, що виконується умова* (3.5)*. Нехай g — додатна функція, яка задовольняє умову* (3.7)*. Тоді*

$$\limsup_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(x)|F_n(x)-\Phi(x)|^r\,dx<\infty.$$

Зауваження 3.2. Доведення нижче базується на теоремі 2. Одна з умов цієї теореми стосується існування константи L_0, яка обмежує відстань Леві. Таким чином, щоб використання цього результату було можливим, необхідно, щоб

$$\limsup_{n\to\infty}L_n<1. \tag{3.8}$$

Співвідношення (3.8) можна отримати з обмеженості моментів, яка випливає з умови (3.5). Дійсно, покладемо $L_n=\mathfrak{L}(F_n,\Phi)$ та $\Delta_n=\Delta(F_n,\Phi)$. Якщо (3.8) не виконується, то для деякої підпослідовності $\{n_k\}$,

$$\lim_{k\to\infty}L_{n_k}=1,$$

звідки

$$\lim_{k\to\infty}\Delta_{n_k}=1.$$

Не втрачаючи загальності, вважаємо, що $\{n_k\}$ співпадає з множиною натуральних чисел. Існує підпослідовність дійсних $\{x_n\}$, таких, що

$$|F_n(x_n) - \Phi(x_n)| \to 1.$$

Виберемо збіжну підпослідовність для $\{\Phi(x_n)\}$ та знову припустимо, що вона співпадає з множиною всіх натуральних чисел. Зрозуміло, що обрана підпослідовність збігається або до to 0, або до 1. В першому випадку $x_n \to -\infty$ й тому $F_n(x_n) \to 1$, а у другому випадку $x_n \to \infty$ й тому $F_n(x_n) \to 0$. В будь-якому випадку $F_n^*(c) \to 1$ для всіх $c > 0$ (див. означення (2.9) хвоста функції розподілу). Таким чином, для всіх $c > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^p \, dF_n \geq \int_{|x|\geq c} |x|^p \, dF_n \geq c^p F_n^*(c),$$

що протирічить (3.5) оскільки c довільне.

Доведення теореми 3. З зауваження 3.2 випливає, що існує $L_0 < 1$, таке, що $L_n \leq L_0$ для всіх $n \geq 1$. Тоді, з теореми 2 отримуємо для $p = 2$, що

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|F_n(x) - \Phi(x)|^{1/2}}{(\ln(1+|x|))^{1+\delta}} \, dx &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{c_2 L_n \ln \frac{1}{L_n}}{1+x^2}\right)^{1/2} \frac{1}{(\ln(1+|x|))^{1+\delta}} \, dx \\ &= o(1) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^{1/2} (\ln(1+|x|))^{1+\delta}} \, dx\end{aligned}$$

(ми використали рівність $\lambda_p = 0$). Ця оцінка завершує доведення теореми 3. □

Доведення теореми 5. З зауваження 3.2 випливає, що існує $L_0 < 1$, при якому $L_n \leq L_0$ для всіх $n \geq 1$. Тоді, з теореми 2 отримуємо

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)|F_n(x) - \Phi(x)|^r \, dx &\leq \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \left(\frac{\lambda_{p_1,n} + c_{p_1} L_n \left(\ln \frac{1}{L_n}\right)^{p_1/2}}{(1+|x|)^{p_1}}\right)^r dx \\ &= o(1) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x)}{(1+|x|)^{rp_1}} \, dx,\end{aligned}$$

де $o(1) \to 0$ при $n \to \infty$. Це закінчує доведення теореми 5. □

Доведення теореми 6. Необхідно провести ті ж міркування, що і при доведенні теореми 5. Єдиною відмінністю є те, що $O(1)$ замінює $o(1)$. □

4. Узагальнена повна збіжність

Означення *повної збіжності* належить Сюю та Роббінсу [9]. Послідовність випадкових величин $\{\xi_n\}$ називається збіжною повністю до нуля (позначається $\xi_n \xrightarrow{\text{c.c.}} 0$ при $n \to \infty$), якщо не тільки $\xi_n \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$, але і $\xi_n' \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$ при $n \to \infty$ для довільної послідовності випадкових величин $\{\xi_n'\}$, для яких $\xi_n \stackrel{\text{d}}{=} \xi_n'$ при всіх $n \geq 1$. Скорочення "a.s." використовується для збіжності майже напевно, а символ $\stackrel{\text{d}}{=}$ вживається для рівності розподілів. Означення інших граничних значень для повної збіжності, очевидним чином випливають з наведеного.

Зауваження 4.1. $\xi_n \xrightarrow{\text{c.c.}} 0$ при $n \to \infty$ є еквівалентною до

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(|\xi_n| \geq \varepsilon) < \infty \quad \text{для всіх } \varepsilon > 0.$$

Використовуючи позначення $F^*(x)$ для хвоста функції розподілу F, (див. (2.9)), останню умову можна переписати у такому вигляді

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n^*(\varepsilon) < \infty \quad \text{для всіх } \varepsilon > 0,$$

де F_n означає функцію розподілу випадкової величини ξ_n.

Сюй та Роббінс [9] вивчали збіжність $n^{-1}S_n \xrightarrow{\text{c.c.}} 0$ при $n \to \infty$ для випадку послідовності часткових сум $\{S_n\}$ незалежних однаково розподілених випадкових величин $\{X_n\}$.

Теорема E (Сюй та Роббінс [9]). *Нехай $\{X_n\}$ — послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин, а $\{S_n\}$ — їхні часткові суми. Тоді $n^{-1}S_n \xrightarrow{\text{c.c.}} 0$ при $n \to \infty$ тоді і тільки тоді, коли виконується умова* (3.1).

Якщо F_n позначає функцію розподілу випадкової величини $n^{-1/2}S_n$, то теорему E можна подати у наступному вигляді.

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{c.c.}} 0, \quad n \to \infty \quad \Longleftrightarrow \quad (3.1) \text{ виконується} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} F_n^*\left(\varepsilon\sqrt{n}\right) < \infty \quad \forall\, \varepsilon > 0.$$

Наступний результат містить умови збіжності останнього ряду для загального випадку.

Теорема 7. *Нехай $\{F_n\}$ — довільна послідовність функцій розподілу. Припустимо, що виконується умова* (3.5) *для деякого $p > 2$. Тоді*

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n^*\left(\varepsilon\sqrt{n}\right) < \infty \quad \text{для всіх } \varepsilon > 0. \tag{4.1}$$

Ми не доводимо теорему 7 оскільки воно повторює доведення більш загальної теореми 8.

Хейді [8] розглядав асимптотику при $\varepsilon \downarrow 0$ ряду (4.1) у випадку сум незалежних однаково розподілених випадкових величин.

Теорема F (Heyde [8]). *Нехай $\{X_n\}$ — послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин, а $\{S_n\}$ — їхні часткові суми. Нехай F_n — це функція розподілу випадкової величини $n^{-1/2}S_n$, а F_n^* — хвіст функції F_n. Якщо виконана умова* (3.1), *то*

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \varepsilon^2 \sum_{n=1}^{\infty} F_n^*\left(\varepsilon\sqrt{n}\right) = 1. \tag{4.2}$$

Ми доповнюємо цей результат наступним чином.

Теорема 8. *Нехай $p > 2$. Нехай $\{F_n\}$ — послідовність функцій розподілу, для яких $F_n \xrightarrow{w} \mathcal{N}(0,\sigma^2)$, $\sigma^2 > 0$. Припустимо, що виконується умова* (3.5). *Тоді*

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \varepsilon^2 \sum_{n=1}^{\infty} F_n^*\left(\varepsilon\sqrt{n}\right) = \sigma^2. \tag{4.3}$$

Доведення. Ми доведемо теорему для випадку $\sigma^2 = 1$. Загальний випадок $\sigma^2 \neq 1$ є безпосереднім наслідком $\sigma^2 = 1$. Таким чином ми вважаємо, що $F_n \xrightarrow{w} \Phi$.

Спочатку ми зауважимо, що

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \varepsilon^2 \sum_{n=1}^{\infty} \Phi^*\left(\varepsilon\sqrt{n}\right) = 1 \tag{4.4}$$

згідно до теореми F для гауссових випадкових величин X_n. Нехай тепер число $c > 0$ фіксовано. Тоді

$$\sum_{n<c\varepsilon^{-2}} \left|F_n^*\left(\varepsilon\sqrt{n}\right) - \Phi^*\left(\varepsilon\sqrt{n}\right)\right| \le \frac{c}{\varepsilon^2},$$

звідки

$$\limsup_{\varepsilon\downarrow 0} \varepsilon^2 \sum_{n<c\varepsilon^{-2}} \left|F_n^*\left(\varepsilon\sqrt{n}\right) - \Phi^*\left(\varepsilon\sqrt{n}\right)\right| \le c. \tag{4.5}$$

Нехай тепер $2 < p_1 < p$. Згідно до зауваження 3.2, існує число $L_0 < 1$, таке, що $L_n \le L_0$ для всіх $n \ge 1$. З теореми 2 випливає, що,

$$\sum_{n\ge c\varepsilon^{-2}} \left|F_n^*\left(\varepsilon\sqrt{n}\right) - \Phi^*\left(\varepsilon\sqrt{n}\right)\right| \le 2 \sum_{n\ge c\varepsilon^{-2}} \frac{\lambda_{p_1,n} + c_{p_1} L_n \left(\ln \frac{1}{L_n}\right)^{p_1/2}}{\left(1+\varepsilon\sqrt{n}\right)^{p_1}},$$

звідки

$$\sum_{n\ge c\varepsilon^{-2}} \left|F_n^*\left(\varepsilon\sqrt{n}\right) - \Phi^*\left(\varepsilon\sqrt{n}\right)\right| = o(1) \sum_{n\ge c\varepsilon^{-2}} \frac{1}{\left(1+\varepsilon\sqrt{n}\right)^{p_1}},$$

де $o(1) \to 0$ при $\varepsilon \downarrow 0$. Таким чином

$$\varepsilon^2 \sum_{n\ge c\varepsilon^{-2}} \left|F_n^*\left(\varepsilon\sqrt{n}\right) - \Phi^*\left(\varepsilon\sqrt{n}\right)\right| = o(1).$$

З цього співвідношення та з (4.5) ми отримуємо

$$\limsup_{\varepsilon\downarrow 0} \varepsilon^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left|F_n^*\left(\varepsilon\sqrt{n}\right) - \Phi^*\left(\varepsilon\sqrt{n}\right)\right| \le c.$$

Оскільки $c > 0$ довільне, то співвідношення (4.3) можна тепер отримати з (4.4). □

Література

1. A. de Acosta and E. Giné, *Convergence of moments ma related functionals in the central limit theorem in Banach spaces*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **48** (1979), 213–231.
2. R. P. Agnew, *Global versions of the central limit theorem*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **48** (1954), 800–804.
3. R. P. Agnew, *Estimates for global central limit theorems*, Ann. Math. Statist. **28** (1957), 26–42.
4. R. P. Agnew, *Asymptotic expansions in global central limit theorems*, Ann. Math. Statist. **30** (1959), 721–737.
5. C. G. Esseen, *Fourier analysis of distribution functions. A mathematical study of the Laplace–Gaussian law*, Acta Math. **77** (1945), 1–125.
6. C. G. Esseen, *On mean central limit theorems*, Kungl. Tekn. Högsk. Handl. Stockholm **121** (1958), 1–31.
7. B. V. Gnedenko and A. N. Kolmogorov, *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables*, GTTI, Moscow-Leningrad, 1949; English transl., Addison-Wesley, Cambridge, 1954.
8. C. C. Heyde, *A supplement to the strong law of large numbers*, J. Appl. Probab. **12** (1975), 173–175.
9. P. L. Hsu and H. Robbins, *Complete convergence ma the law of large numbers*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **33** (1947), 25–31.
10. K.-H. Indlekofer and O. I. Klesov, *A generalization of a Kolodyazhnyĭ theorem for the відстань Леві*, Internat. J. Pure Appl. Math. **47** (2008), № 2, 235–241.
11. A. F. Kolodyazhnyĭ, *A generalization of a theorem of Esseen*, Vestnik. Leningrad. Univ. **13** (1968), 28–33. (Russian).
12. V. M. Kruglov, *Convergence of numeric characteristics of sums of independent випадкових величин and global theorems*, Proceedings of the Second Japan–USSR Symposium on Probability Theory, Lecture Notes in Math., т. 330, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1973, стор. 255–286.
13. G. Laube, *Weak convergence and convergence in the mean of функції розподілу*, Metrika **20** (1973), № 2, 103–105.
14. S. Nishimura, *An inequality for a metric in a випадкових collision process*, J. Appl. Prob. **12** (1975), № 2, 239–247.

15. V. V. Petrov, *Sums of Independent Random Variables*, "Nauka", Moscow, 1972; English transl., Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1975.
16. V. V. Petrov, *Limit Theorems of Probability Theory. Sequences of Independent Random Variables*, "Nauka", Moscow, 1987; English transl., Oxford University Press, Oxford, 1995.
17. A. Rosalsky, *A generalization of the global limit theorems of R. P. Agnew*, Internat. J. Math. & Math. Sci. **11** (1988), № 2, 365–374.
18. Yu. P. Studnev and Yu. I. Ignat, *Refinement of the central limit theorem and of its global version*, Teor. Veroyatnost. i Primenen. **12** (1967), № 3, 562–567; English transl. in Theory Probab. Appl. **12** (1967), 508–512.

Universität Paderborn, Fakultät für Elektrotechnik, Informatik und Mathematik, Institut für Mathematik, Warburger Strasse 100, 33098 Paderborn, Germany
Адреса електронної пошти: k-heinz@uni-paderborn.de

Department of Mathematical Analysis ta Probability Theory, National Technical University of Ukraine (KPI), pr. Peremogy, 37, Kyiv 03056, Ukraine
Адреса електронної пошти: oleg@math.uni-paderborn.de

Universität zu Köln, Mathematisches Institut, Weyertal 86–90, D–50931 Köln, Germany
Адреса електронної пошти: jost@math.uni-koeln.de

Надійшла 11/09/2009