Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 81, 2009, стор. 65–75

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 81, 2009, pp. 65–75

ОБМЕЖЕНІСТЬ, ГРАНИЦІ ТА СТІЙКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕОДНОРІДНОГО ЗБУРЕННЯ РІВНЯННЯ ВІДНОВЛЕННЯ НА ПІВОСІ

УДК 519.21

М. В. КАРТАШОВ

Анотація. Розглядається неоднорідне за часом збурення класичного рівняння відновлення на півосі з неперервним часом, що зводиться до інтегрального рівняння Вольтерра з невід'ємним обмеженим (чи навіть субстохастичним) ядром. Гранична схема полягає у тому, що для великих відтинків часу це ядро апроксимується ядром згортки, яке породжується субстохастичним розподілом. За певних припущень на малість відповідного збурення для розв'язків збуреного рівняння знайдено критерій обмеженості, за його умов доведено існування границі розв'язку збуреного рівняння та знайдено оцінки відхилення від розв'язку незбуреного рівняння.

Наведено ряд прикладів.

Abstract. We consider a generalized inhomogeneous continuous time renewal equation on the halfline, that is the Volterra integral equation with a nonnegative bounded (or substochastic) kernel. It is assumed that this kernel on the large time scale can be approximated by a convolution kernel, generated by a substochastic distribution. Under some asymptotic conditions on the perturbation we find the criteria of boundness, under which is proved the existence of limits and the numerical estimations of the stability of the solution of the perturbed equation.

Some applications are considered.

1. Вступ

Процеси ризику з неоднорідним середовищем вивчались у роботах [2-9].

Ми розглядаємо неоднорідне за часом узагальнення класичного рівняння відновлення на півосі з неперервним часом, що зводиться до інтегрального рівняння Вольтерра з невід'ємним обмеженим (чи навіть субстохастичним) ядром. Граничне припущення полягає у тому, що для великих відтинків часу це ядро апроксимується за варіацією ядром згортки, яке породжується субстохастичним розподілом на додатній півосі.

Постановка задачі ініційована проблемою дослідження асимптотики функції банкрутства для процесу ризику зі змінною інтенсивністю премій, яка розглядалася, зокрема, у [7].

Аналогічна задача вивчалась у роботі автора [9] для рівняння відновлення на всій прямій. Звуження області досліджень дозволило отримати більш конкретні результати.

Доведення у першій частині роботи використовують ідеї неопублікованої роботи автора [10] та роботи H.Schmidli [5].

За певних умов на відповідне збурення та на мінімальний розв'язок збуреного рівняння встановлено існування границі на нескінченності для довільного розв'язку збуреного рівняння.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60J45; Secondary 60A05, 60K05.

Ключові слова і фрази. Volterra equation, renewal theory, transition kernel,regularity, minimal solution, stability, Рівняння Вольтерра, теорема відновлення, перехідне ядро, регулярність, мінімальний розв'язок, стійкість.

2. Збурене рівняння відновлення

Розглянемо піввісь $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ з борелівською сигма-алгеброю $\mathfrak{B}_+ = \mathfrak{B}(\mathbb{R}_+)$ та мірою Дірака $\delta_a(B) = 1_{a \in B}$.

Визначимо такі класи функцій:

$$B_0 \equiv \left\{x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x - \text{ борелєва, } \sup_{s \le t} |x(s)| < \infty, \forall t \ge 0\right\},$$

$$B_0^+ \equiv B_0 \cap \{x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+\},$$

$$L_1^0 \equiv \left\{y \in B_0 : \lim_{t\to\infty} y(t) = 0, \int_{[0,\infty)} |y(s)|\, ds < \infty\right\}.$$

Простір L_1^0 є банаховим з нормою

$$\|y\|_{01} = \|y\|_0 + \|y\|_1, \|y\|_0 = \sup_{s \ge 0} |y(s)|, \|y\|_1 = \int_{[0,\infty)} |y(s)|\, ds. \tag{1}$$

Нехай G - субстохастична міра на $\mathfrak{B}_+$.

Узагальненим рівнянням відновлення на $\mathbb{R}_+$, що породжене мірою G, називається інтегральне рівняння

$$x_0(t) = y(t) + \int_{[0,t]} x_0(t-s) G(ds), t \ge 0, \tag{2}$$

для невідомої функції x_0 з класу B_0.

Зауважимо [11-14], що для кожної функції $y \in B_0$ рівняння (2) має єдиний розв'язок $x_0 \in B_0$, що дорівнює *згортці*

$$x_0(t) = y * U(t) \equiv \int_{[0,t]} y_0(t-s) U(ds), \tag{3}$$

де сигма-скінчена *міра відновлення* U визначається як

$$U(B) = \sum\nolimits_{n \ge 0} G^{*n}(B). \tag{4}$$

Нагадаємо [15], що міра G має *абсолютно неперервний тип*, якщо згортка G^{*m} при деякому $m \ge 1$ має абсолютно неперервну компоненту, тобто має місце нерівність: $G^{*m}(B) \ge \nu(B)$ для всіх борелєвих B та деякої невід'ємної ненульової абсолютно неперервної міри ν.

Класична теорема відновлення для розподілу абсолютно неперервного типу. *Нехай імовірнісний розподіл G має абсолютно неперервний тип. Тоді для кожної функції $y \in L_1^0$ рівняння (2) має єдиний у класі B_0 розв'язок x_0, причому існує границя:*

$$\lim_{t\to\infty} x_0(t) = m_G^{-1} \int_{[0,\infty)} y(s) ds, m_G \equiv \int_{[0,\infty)} s G(ds). \tag{5}$$

Зокрема, $\sup_{t \in \mathbb{R}} |x(t)| < \infty$.

Справедливість даного твердження доведена у [12,13, 14,теор.8 прил.3, 15].

Нехай $(F(t, B), t \ge 0, B \in \mathfrak{B}_+)$ - обмежене невід'ємне ядро.

Означення. *Неоднорідним збуренням рівняння відновлення (2) називається узагальнене інтегральне рівняння Вольтерра*

$$x(t) = y(t) + \int_0^t x(t-s) F(t, ds), t \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

для невідомої функції $x \in B_0$, та заданої функції $y \in L_1^0$.

Тут ядро F наближається до міри G за варіацією:

$$\Delta(t, B) \equiv F(t, B) - G(B) \to 0, t \to \infty, \tag{7}$$

рівномірно за $B \in \mathfrak{B}_+$, тобто функція збурення

$$\delta(t) \equiv |\Delta|(t,[0,t]) = \sup_{|x|\le 1}\left|\int_0^t x(s)\Delta(t,ds)\right| \to 0, t\to\infty. \tag{8}$$

Зауваження 1. Множенням (6) на $\exp(\alpha t)$ переконуємось, що функції та ядро

$$x_\alpha(t) = e^{\alpha t}x(t), y_\alpha(t) = e^{\alpha t}y(t), F_\alpha(t,ds) = e^{\alpha s}F(t,ds) \tag{9}$$

задовольня‘ють рівняння, подібне (6):

$$x_\alpha(t) = y_\alpha(t) + \int_0^t x_\alpha(t-s)F_\alpha(t,ds), t\in\mathbb{R}. \tag{10}$$

Визначимо лінійні обмежені оператори на B_0 для ядер F, H:

$$F[x](t) = \int_0^t F(t,ds)x(t-s), t\ge 0, \tag{11}$$

$$F*H[x](t) = \int_0^t F*H(t,ds)x(t-s), t\ge 0,$$

$$F*H(t,B) = \int_0^t F(t,ds)H(t-s,B\cap[s,t]-s),$$

$$F^n[x](t) = \int_0^t F^{*n}(t,ds)x(t-s),$$

$$F^{*n}(t,B) = \int_0^t F(t,dt_1)\int_0^{t-t_1} F(t-t_1,dt_2)\dots$$

$$\dots\int_{t_1+\dots+t_{n-1}}^t F(t-t_1-\dots-t_{n-1},dt_n-t_1-\dots-t_{n-1})1_{t_n\in B}. \tag{12}$$

Наступне твердження дещо узагальнює доведене у [10].

Теорема 1. *Нехай субстохастична міра G має абсолютно неперервний тип, її збурення (8) задовольняє умову $\delta\in L_1^0$, а функція $y\in L_1^0$. Якщо розв'язок рівняння (6) $x\in B_0$ - обмежений, то існує скінченна границя $\lim_{t\to\infty}x(t)$.*

Для аналізу розв'язків (6) застосуємо таке поняття.

Означення. *(а) Мінімальним розв'язком рівняння (6) для функції $y\in B_0^+$ називається монотонно поточково збіжна у множині $\mathbb{R}_+\cup\{\infty\}$ сума ряду*

$$x_0(t) = \sum\nolimits_{n\ge 0} F^n[y](t), t\ge 0. \tag{13}$$

(б) Мінімальним розв'язком рівняння (6) для функції $y\in B_0$ називається різниця $\sum_{n\ge 0}F^n[y^+](t) - \sum_{n\ge 0}F^n[y^-](t)$ за умови коректної визначеності цієї різниці.

Відомі фундаментальні властивості мінімальних розв'язків відображені у наступному твердженні [17, гл.1].

Лема 1. *Нехай $(F(t,B), t\ge 0, B\in\mathfrak{B}_+)$ - обмежене невід'ємне ядро.*

(1) Мінімальний розв'зок x_0 з (13) для $y\in B_0^+$ є розв'язком рівняння (6) у класі невід'ємних борелевих функцій зі значеннями у $\mathbb{R}_+\cup\{\infty\}$.

(2) Для довільного розв'язку $x\in B_0^+$ рівняння (6) з функцією $y\in B_0^+$ має місце поточкова нерівність $x(t)\ge x_0(t)$, $t\ge 0$.

(3) Розв'язок $x\in B_0^+$ рівняння (6) з $y\in B_0^+$ є мінімальним тоді і тільки тоді, коли $\lim_{t\to\infty}F^n[x](t) = 0$, $t\ge 0$.

(4) Мінімальний розв'язк $x_0\in B_0^+$ (6) з $y\in B_0^+$ обмежений тоді і тільки тоді, коли для деякої обмеженої функції $w\in B_0^+$

$$w(t)\ge F[w](t) + y(t), t\ge 0. \tag{14}$$

В цьому разі має місце поточкова нерівність $w\ge x_0$.

Зауваження 2. Умова (14) при $w = c$ є достатньою та не є необхідною для виконання нерівності $w \geq x_0$.

Наступна властивість гарантує обмеженість розв'язку (6).

Означення. *Ядро* $F(t, B)$ *називається (а) регулярним, якщо*

$$\exists a > 0, T \geq 0 : \inf_{t \geq T} F(t, [a, \infty)) > 0, \tag{15}$$

(б) цілком регулярним, якщо $T = 0$ *в умові* (15).

Теорема 2. *Нехай* $F(t, B)$ *- регулярне субстохастичне ядро, а* $x \in B_0$ *- розв'язок рівняння (6).*

(а) Цей розв'язок є обмеженим тоді і тільки тоді, коли мінімальний розв'язок (6) $x_0 \in B_0$ *з функцією* $y \in B_0$ *є обмеженим.*

(б) Якщо ядро $F(t, B)$ *- цілком регулярне, то розв'язок* x *збігається з мінімальним:* $x = x_0$.

Властивість стійкості є достатньою для регулярності.

Лема 2. *Якщо ядро* $(F(t, B))$ *задовольняє умову збіжності (7), а міра* G *має абсолютно неперервний тип, то ядро* F *- регулярне.*

З теорем 1 та 2 випливає критерій існування границі для розв'язку (6).

Теорема 3. *Нехай міра* G *має абсолютно неперервний тип, для її збурення з (8) до субстохастичного ядра* $F(t, B)$ *має місце включення* $\delta \in L_1^0$, *а* $x \in B_0$ *- розв'язок рівняння (6) з функцією* $y \in L_1^0$.

(а) Для існування скінченої границі $\lim_{t \to \infty} x(t)$ *необхідно і достатньо, щоб мінімальний розв'язок (13) цього рівняння був обмеженим.*

(б) За умови (а) вказана границя дорівнює

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = m_G^{-1} \int_{[0, \infty)} (y(s) + \Delta[x](s)) ds. \tag{16}$$

Зауваження 3. При виконанні всіх умов Теореми 3 рівняння (6) може мати більше одного обмеженого розв'язку, якщо ядро F не є цілком регулярним.

Приклад 1. У припущеннях теореми 3 за умови підпорядкованості: $F(t, B) \leq G(B), t \geq 0, B \in \mathfrak{B}_+$ (тобто для $F(t, ds) = \rho(t, s) G(ds)$ з $\rho(t, s) \in [0, 1]$), з імовірнісною мірою G абсолютно неперервного типу, мінімальний розв'язок (6) при $y \in L_1^0$ є обмеженим, отже, існує границя $\lim_{t \to \infty} x(t)$.

Стійкість розв'язків (2) можна оцінити чисельно.

Теорема 4. *Нехай міра* G *має абсолютно неперервний тип, а* x *та* x_0 *- розв'язки у класі* B_0 *рівнянь (6),(2) відповідно, з функцією* $y \in L_1^0$. *Якщо збурення* $\delta \in L_1^0$ *ядра* G *з (8) задовольняє умову*

$$\|\delta\|_G \equiv \sup_{t \geq 0} \delta * U(t) < 1 \tag{17}$$

з мірою відновлення (4), то розв'язок x *у класі* B_0 *є единим, збігається з мінімальним, та задовольняє нерівності:*

$$\sup_{t \geq 0} |x(t)| \leq (1 - \|\delta\|_G)^{-1} \sup_{t \geq 0} |x_0(t)| \tag{18}$$

$$\sup_{t \geq 0} |x(t) - x_0(t)| \leq \|\delta\|_G \sup_{t \geq 0} |x(t)|. \tag{19}$$

Крім того, за умови $G(\mathbb{R}_+) = 1$ *виконується нерівність*

$$\left| \lim_{t \to \infty} x(t) - \lim_{t \to \infty} x_0(t) \right| \leq m_G^{-1} \int_{\mathbb{R}_+} \delta(s) ds \sup_{t \geq 0} |x(t)|. \tag{20}$$

Зауваження 4. З теореми відновлення [13-15] випливає, що $\|\delta\|_G < \infty$ при $\delta \in L_1^0$. Більше того, у [11-12] доведено, що має місце нерівність:

$$\|\delta\|_G \leq C(G) \|\delta\|_{01}, \tag{21}$$

де норма $\|\delta\|_{01}$ визначена у (1), а стала $C(G)$ визначається виключно мірою G. У [10] наведені чисельні оцінки для $C(G)$ для різних класів мір G.

Зауваження 5. За умови, що функція $\delta(t)$ має обмежену варіацію, можна вказати просту оцінку для норми (17):

$$\sup_{t\geq 0} \delta * U(t) \leq$$
$$\leq m_G^{-2} \left(m_G \int_0^\infty \delta(s)ds + (\delta(0) + \mathrm{var}\delta) \int_{\mathbb{R}_+} t^2/2G(dt) \right). \tag{22}$$

Приклад 2 (про суттєвість умови $\delta \in L_1^0$). Розглянемо при $\alpha \geq 0$ та $\varepsilon \in [0,1)$ ядро, міру та функцію

$$F(t, ds) = e^{-s}(1 - \varepsilon(1 + t - s)^{-\alpha-1})ds, G(ds) = e^{-s}ds, y(t) = e^{-t}, t \geq 0.$$

Тоді роз'язок *(2)* дорівнює $x_0(t) = 1$, а функція збурення (8) еквівалентна $\delta(t) \approx \varepsilon(1+t)^{-\alpha-1}$, $t \to \infty$, та належить простору L_1^0 тоді і тільки тоді, коли $\alpha > 0$. Зведенням рівняння *(6)* до диференціального дозволяє обчислити $x(t) = (1+t)^{-\varepsilon}$ при $\alpha = 0$, та $x(t) = \exp(-\varepsilon(1 - (1+t)^{-\alpha})/\alpha)$ при $\alpha > 0$. Отже, $x(t) \to x_0(t)$ при $\varepsilon \to 0$ для кожного t, однак збіжність границь $x(\infty) \to x_0(\infty)$ при $\varepsilon \to 0$ має місце тоді і тільки тоді, коли $\alpha > 0$, тобто за умови $\delta \in L_1^0$.

Приклад 3 (про суттєвість умови $\|\delta\|_G < 1$). Розглянемо ядро

$$F(t, ds) = e^{-s}1_{s<t} + \delta_t(ds)\varepsilon e^{-t}, G(ds) = e^{-s}ds,$$

де $\varepsilon \in (0,1]$. Тоді функція збурення (8) дорівнює $\delta(t) = \varepsilon e^{-t}$, та $\|\delta\|_G = \sup_{t\geq 0}(\delta(t) + \int_0^t \delta(s)ds) = \varepsilon$. У припущенні $\varepsilon < 1$ єдиний розв'язок рівняння (6), що зводиться до лінійного диференціального рівняння, існує та має вигляд $x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_0(t)/(1-\varepsilon)$. Якщо ж $\varepsilon = 1$, то порушується умова єдиності, оскільки у даному випадку розв'язки рівняння (6) інваріантні відносно додавання довільної сталої.

Наслідок 1. *У припущеннях Теореми 4 при виконанні умов* $G(\mathbb{R}_+) = 1, m_G < \infty$, $\lim_{t\to\infty} x_0(t) \neq 0$, *та при настільки малих* δ *з (8), що*

$$0 < m_G^{-1} \int_{\mathbb{R}_+} \delta(s)ds \sup_{t\geq 0} |x_0(t)| \leq \frac{1}{2}(1 - \|\delta\|_G) \left| \lim_{t\to\infty} x_0(t) \right|, \tag{23}$$

границя $\lim_{t\to\infty} x(t)$ *- не нульова.*

Зауваження 6. У припущенні, що $x \in B_0^+$, повну варіацію у означенні (8) функції $\delta(t)$ можна зменшити до

$$\delta_+(t) \equiv \sup_{0\leq x\leq 1} \left| \int_0^t x(s)\Delta(t, ds) \right|. \tag{24}$$

3. Застосування до ризикового процесу виплат

Нижче наведено застосування неоднорідної теореми відновлення до аналізу однієї моделі процесу ризику. Певна нестандартність цієї моделі пояснюється тим, що вона грунтується саме на процесі відновлення як послідовності незалежних виплат, в той час як явище розорення не пов'язується з поступленням премій і їх балансом з виплатами, а моделюється заданням ймовірностей розорення у послідовні моменти виплат. Останні залежать від залишкового фонду на такі моменти.

Розглянемо страховий фонд з початковим капіталом $t > 0$, і незалежними сумами виплат $(\xi_k, k \geq 1)$ зі спільним розподілом G абсолютно неперервного типу, та визначимо $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n, S_0 = 0$.

Припустимо, що перед початком k-ої виплати з імовірністю $\pi(t - S_{k-1})$, що залежить від наявного капіталу на цей момент, фонд достроково банкрутує, а у протилежному випадку продовжує виплати.

Підкреслимо, що подія банкрутства вважається незалежною від послідовності сум виплат, при заданій залишковій суми фонду на відповідний момент виплати.

Позначимо через $\nu(t)$ кількість виплат до банкрутства. Тоді

$$P(\nu(t)=n|S_0,\dots S_n)=\left[\prod\nolimits_{k=0}^{n-1}(1-\pi(t-S_k))\right]\pi(t-S_n),n\geq 0.$$

Визначимо функцію розподілу залишкового капіталу на момент дострокового банкрутства з сумою b :

$$x(t)=P(t-b\leq S_{\nu(t)}<t)=P(0<t-S_{\nu(t)}\leq b).$$

Вона є розв'язком неоднорідного рівняння відновлення

$$x(t)=\pi(t)1_{t\leq b}+(1-\pi(t))\int_0^t x(t-s)G(ds). \tag{25}$$

Зауважимо, що у випадку можливості банкрутства лише *після* чергового платежу замість $x(t)$ слід розглянути функцію $x*G(t)=P(t-S_{\nu(t)+1}\in(0,b])$.

Відповідне (25) ядро відновлення у (6) дорівнює

$$F(t,ds)=(1-\pi(t))G(ds)1_{s<t}.$$

Припустимо, що існує границя $\theta\equiv\lim_{t\to\infty}\pi(t)$, причому $\sup_{t\geq 0}\pi(t)<1$. Тоді вказане ядро є регулярним і задовольняє умову (7) з мірою $(1-\theta)G$.

Нехай також виконується умова Крамера

$$\exists\delta>0:\widehat{G}(\delta)\equiv E\exp(\delta\xi_1)<\infty. \tag{26}$$

(а) Розглянемо випадок, коли $\theta\in(0,1)$. Для спрощення вважатимемо, що виконується включення $(1-\theta)\widehat{G}(\delta)\in(1,\infty)$ при деякому $\delta>0$. Тоді у припущенні $\pi(t)-\theta\in L_1^0$ внаслідок теореми 3 для кожного $b>0$ існує

$$\lim_{t\to\infty}\exp(\alpha t)x(t)=m_\alpha^{-1}\int_0^b\exp(\alpha t)\pi(t)dt+$$

$$m_\alpha^{-1}\int_0^\infty\exp(\alpha t)(\theta-\pi(t))dt\int_0^t x(t-s)G(ds), \tag{27}$$

де $m_\alpha=(1-\theta)E\xi_1\exp(\alpha\xi_1)$, а стала $\alpha>0$ є єдиним коренем рівняння Лундберга

$$(1-\theta)\widehat{G}(\alpha)=1. \tag{28}$$

Зауважимо, що другий доданок у (27), що містить невідому x, є суттєво меншим за перший, принаймні у двох випадках: коли $b\to\infty$ і досить швидко $\theta-\pi(t)\to 0$, або досить малою є норма $\|\theta-\pi(t)\|_{01}$.

(б) Нехай $\theta=\lim_{t\to\infty}\pi(t)=0$. Тоді за умови $\pi\in L_1^0$ має місце рівність

$$x(t)=\int_0^t U(ds)\pi(t-s)(1_{t-s\leq b}-x*G(t-s)), \tag{29}$$

та існує границя

$$\lim_{t\to\infty}x(t)=m_G^{-1}\int_0^\infty\pi(s)(1_{s\leq b}-x(s))ds,$$

де $U=\sum_{n\geq 0}G^{*n}$ - міра відновлення.

Для досить малих норм $\|\pi\|_{01}$ у (1) звідси маємо наближення першого порядку при $\|\pi\|_{01}\to 0$

$$x(t)=\int_{t-b}^t U(ds)\pi(t-s)ds+o(\|\pi\|_{01}),$$

$$\lim_{t\to\infty}x(t)=m_G^{-1}\int_0^b\pi(s)ds+o(\|\pi\|_{01}). \tag{30}$$

Додамо, що ймовірність планового вичерпання фонду

$$q(t) = P(S_{\nu(t)} \geq t)$$

є розв'язком рівняння

$$q(t) = (1 - \pi(t)) \left(1 - G(t) + \int_0^t q(t-s)G(ds)\right), \tag{31}$$

звідки випливають апроксимації

$$q(t) = 1 - U * \pi(t) + o(\|\pi\|_{01}),$$

$$\lim_{t\to\infty} q(t) = 1 - m_G^{-1} \int_0^\infty \pi(s)ds + o(\|\pi\|_{01}). \tag{32}$$

4. Доведення

Формули (11),(12) виводяться обчисленням ітерацій $F[H[x]]$ та $F[F[\dots F[x]\dots]$

Нагадаємо, що ядро збурення Δ та функція збурення δ визначені у (7),(8).

Обгрунтування зауваження 1 полягає у мультиплікативності експоненційної функції.

Доведення теореми 1.

Нехай $x \in B_0$ - розв'язок (6). Запишемо це рівняння у вигляді узагальненого рівняння відновлення

$$x = y + \Delta[x] + G * x = y_1 + G * x, \tag{33}$$

де функція $y_1 = y + \Delta[x] \in L_1^0$, оскільки $y \in L_1^0$ та розв'язок x - обмежений:

$$|\Delta[x](t)| = \left|\int_0^t \Delta(t, ds)x(t-s)\right| \leq \delta(t)\sup_{s\geq 0}|x(s)| \in L_1^0. \tag{34}$$

Припустимо, що G - ймовірнісний розподіл: $G(\mathbb{R}_+) = 1$. Тоді шукане випливає з *Теореми відновлення для розподілу абсолютно неперервного типу*, що наведена вище.

Якщо ж $G(\mathbb{R}_+) < 1$, то відповідна міра відновлення (4) - скінченна: $U(\mathbb{R}_+) \leq (1 - G(\mathbb{R}_+))^{-1}$. Отже, з (33) та (3) випливає існування границі

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} \int_0^t y_1(t-s)U(ds) = \lim_{t\to\infty} y_1(t)U(\mathbb{R}_+) = 0\Box$$

Доведення леми 1.

(1) За означенням $x_0 = \sum_{n\geq 0} F^n[y] \geq 0$. Тому за теоремою Лебега про монотонну збіжність при $y \in B_0^+$

$$x_0 = y + \sum_{n\geq 1} F[F^{n-1}[y]] = y + F\left[\sum_{n\geq 1} F^{n-1}[y]\right] = y + F[x_0].$$

(2) Нехай $y \in B_0^+$. Для довільного розв'язку $x \in B_0^+$ послідовними ітераціями (6) виводимо, що

$$x = \sum_{0\leq k<n} F^k[y] + F^n[x], \tag{35}$$

звідки

$$x \geq \sum_{0\leq k<n} F^k[y] \to \sum_{0\leq k} F^k[y] = x_0, n \to \infty.$$

(3) Достатність. З (35) виводимо, що

$$x = \lim_{n\to\infty} \sum_{0\leq k<n} F^k[y] + \lim_{n\to\infty} F^n[x] = x_0 + 0,$$

де x_0 - мінімальний розв'язок (6).

Доведення необхідності є наслідком збіжності ряду (13):

$$F^n[x_0] = F^n\left[\sum\nolimits_{k\geq 0} F^k[y]\right] = \sum\nolimits_{k\geq n} F^k[y] \to 0, n \to \infty.$$

(4) Для доведення достатності проітеруємо (14) та врахуємо невід'ємність w :

$$w \geq \sum\nolimits_{0\leq k<n} F^k[y] + F^n[w] \geq \sum\nolimits_{0\leq k<n} F^k[y] \to x_0, n \to \infty.$$

Отже, $w \geq x_0$ і розв'язок x_0 - обмежений.

Необхідність (14) випливає з вибору $w = x_0$⊡

Обгрунтування зауваження 2. Єдиний розв'язок рівняння відновлення $x = y + x * E$ з мірою $E(ds) = \exp(-s)ds$ має вигляд $x = y + 1 * y$. Нерівність $c \geq y + c * E$ еквівалентна $y(t) \leq c\exp(-t)$, остання нерівність не виконана для $y(t) = (1+t)^{-2} \in L_1^0$, хоча й $\sup x < \infty$.

Лема 3. *Нехай субстохастичне ядро F і функція $r \in B_0^+$ задовольняють нерівності*

$$r \leq F[r], t \geq 0. \tag{36}$$

(а) Якщо ядро F - регулярне, то $\sup r < \infty$.

(б) Якщо F - цілком регулярне, то $r = 0$.

Доведення.

Нехай сталі a, T задані в умові (15), а $\alpha > 0$ - значення правої частини (15).

Визначимо субстохастичні ядра $Q(t, B) = F(t, B \cap (a, \infty))$, $K = F - Q$, і функцію $q(t) = Q(t, \mathbb{R}_+) \in [0, 1]$. За означенням $q(t) \geq \alpha$ при $t \geq T$, та $K(t, \mathbb{R}_+) = F(t, \mathbb{R}_+) - q(t) \leq 1 - q(t)$.

З ураxіванням тотожності $Q(t, [0, a]) = 0$ з (36) виводимо при $u \geq T$

$$r(u) \leq K[r](u) + \int_0^u Q(u, ds)r(u-s) = K[r](u) + \int_a^u Q(u, ds)r(u-s) \leq$$

$$(1 - q(u)) \sup\nolimits_{s\leq u} r(s) + q(u) \sup\nolimits_{s\leq u-a} r(s) \leq$$

$$(1 - \alpha) \sup\nolimits_{s\leq u} r(s) + \alpha \sup\nolimits_{s\leq u-a} r(s).$$

Визначимо $M = \sup_{s<T} r(s)$, $\rho(t) = \sup_{T\leq s\leq t} r(s)$.

Обчисленням верхньої межі за $u \in [T, t]$ з урахуванням рівності $\sup_{0\leq s\leq t} r(s) = \max(M, \rho(t))$ з попередньої нерівності отримуємо при $t \geq T$

$$\rho(t) \leq (1 - \alpha) \max(M, \rho(t)) + \alpha \max(M, \rho(t - a)). \tag{37}$$

Для доведення обмеженості r (та ρ) від супротивного припустимо, що $\rho(t) \to \infty$ при $t \to \infty$. Тоді для деякого $T_1 \geq T$ та для всіх $t \geq T_1$ нерівність (37) має вигляд $\rho(t) \leq (1 - \alpha)\rho(t) + \alpha\rho(t - a)$. Тому $\rho(t) \leq \rho(t - a)$ при $t \geq T_1$ та $\sup \rho \leq \rho(T_1) < \infty$. Це суперечить припущенню $\rho(t) \to \infty$. Отже, $\sup r = \sup \rho < \infty$, твердження (а) доведене.

В умовах (б) леми $T = 0$, тому $M = 0$ у (37), звідки при $t < a$ маємо $\rho(t) \leq (1 - \alpha)\rho(t)$, отже, $\rho(t) = 0$ при $t < a$. Як і вище, при $t \geq a$ за індукцією з (37) виводимо, що $\rho(t) \leq \rho(a - 0) = 0$ ⊡

Доведення теореми 2.

(а) За лінійністю функція $r = x - x_0 \in B_0$ задовольняє рівняння $r = F[r]$, звідки за опуклістю $|r| \leq F[|r|]$. Тому за лемою 3(а) $\sup |r| < \infty$, що доводить шукане твердження.

(б) За лемою 3(б) $r = 0$⊡

Доведення леми 2.

Оберемо $a > 0$ так, щоб $G([a, \infty)) > 0$. З властивості (7) збіжності за варіацією виводимо, що $F(t, [a, \infty)) \geq 0.5G([a, \infty)) > 0$ для всіх $t \geq T$ та деякого $T \geq 0$ ⊡

Доведення теореми 3.

За лемою 2 ядро $F(t, B)$ - регулярне. Далі, внаслідок включення $x \in B_0$ та за теоремою 1 границя $\lim_{t\to\infty} x(t)$ існує та скінченна тоді і тільки тоді, коли розв'язок x - обмежений. Тому шукане твердження випливає з теореми 2(a). Вираз для границі (16) випливає з вигляду відповідного рівняння відновлення (33) та теореми відновлення (5) $\boxdot$

Обгрунтування зауваження 3.

Розглянемо рівняння (6) з ядром та граничною мірою

$$F(t, ds) = \delta_{t/2}(ds)1_{t<1} + \exp(-s)ds1_{t\geq 1}, G(ds) = \exp(-s)ds.$$

Визначимо функцію $y(t) = t1_{t<1}$. При такому виборі виконані всі припущення теореми 3. Прямі обчислення доводять, що мінімальний розв'язок (6) дорівнює $x_0(t) = 2t1_{t<1} + 2e^{-1}1_{t\geq 1}$, а обмежена функція $r(t) = 1_{t<1} + (1-e^{-1})1_{t\geq 1}$ є розв'язком рівняння $r = F[r]$. Тому множина розв'язків рівняння (6) містить функції $x_0 + cr$ для всіх $c \in \mathbb{R}$ $\boxdot$

Обгрунтування прикладу 1.З умови підпорядкованості випливають співвідношення $\sup \sum_{k\geq 0} F^k[y^\pm] \leq \sup \sum_{k\geq 0} G^{*k} * y^\pm = \sup U * y^\pm < \infty$ $\boxdot$

Доведення теореми 4.

Розв'язок $x \in B_0$ рівняння (6) задовольняє також (33), причому функція $y_1 = y + \Delta[x] \in B_0$, оскільки $L_1^0 \subset B_0$, а ядро Δ - обмежене та переводить B_0 у B_0. Тому єдиний у B_0 розв'язок (33) має вигляд

$$x = U * y_1 = U * y + U * \Delta[x] = x_0 + U * \Delta[x]. \tag{38}$$

з мірою відновлення (4).

Оскільки за означенням (8) при всіх $T \geq 0$

$$\sup_{t\leq T} |U * \Delta[x](t)| \leq \sup_{t\leq T} \int_0^t U(ds) \left| \int_0^{t-s} \Delta(t-s, du)x(t-s-u) \right|$$

$$\leq \sup_{t\leq T} \int_0^t U(ds)\delta(t-s) \sup_{u\leq T} |x(u)| \leq \|\delta\|_G \sup_{u\leq T} |x(u)|, \tag{39}$$

то з (38) виводимо, що

$$\sup_{t\leq T} |x(t)| \leq \sup_{t\leq T} |x_0(t)| + \|\delta\|_G \sup_{t\leq T} |x(t)|,$$

звідки граничним переходом $T \to \infty$ отримуємо (18).

Зображення (38) у вигляді $x - x_0 = U * \Delta[x]$ та застосування (39) доводить нерівність (19).

У припущенні $G(\mathbb{R}_+) = 1$ за інших умов теореми та за *Теоремою відновлення для розподілу абсолютно неперервного типу*, що наведена вище, існують границі

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = m_G^{-1} \int_{\mathbb{R}_+} y_1(s)ds, \lim_{t\to\infty} x_0(t) = m_G^{-1} \int_{\mathbb{R}_+} y(s)ds.$$

Тому

$$\lim_{t\to\infty} |x(t) - x_0(t)| = \left| m_G^{-1} \int_{\mathbb{R}_+} (y_1(s) - y(s))ds \right| =$$

$$m_G^{-1} \left| \int_{\mathbb{R}_+} \Delta[x](s)ds \right| \leq m_G^{-1} \int_{\mathbb{R}_+} \delta(s)ds \sup_{t\geq 0} |x(t)|,$$

що доводить (20) $\boxdot$

Доведення наслідка 1.

З нерівностей (20), (18) та (23) виводимо, що

$$\left| \lim_{t\to\infty} x(t) - \lim_{t\to\infty} x_0(t) \right| \leq$$

$$m_G^{-1}\int_{\mathbb{R}_+}\delta(s)ds(1-\|\delta\|_G)^{-1}\sup\nolimits_{t\geq 0}|x_0(t)|\leq\frac{1}{2}\left|\lim_{t\to\infty}x_0(t)\right|,$$

звідки випливає шукане ⊡

Обгрунтування зауваження 5.

Нерівність (22) виводиться з нерівності Дейлі [16] шляхом підстановки $\delta(t)=\delta(0)+\int_0^t d\delta(s)$:

$$\delta*U(t)=m_G^{-1}\int_0^t\delta(s)ds+\delta(0)V(t)+\int_0^t d\delta(s)V(t-s),$$

де $0\leq V(t)=U(t)-m_G^{-1}t\leq m_G^{-2}\int_{\mathbb{R}_+}t^2/2G(dt)$.

Обгрунтування зауваження 6.

На відміну від припущення $x\in B_0$ у доведенні нерівності (34) за умови $x\in B_0^+$ слід використати припущення $0\leq x(t)\leq 1$ ⊡

Доведення застосувань до процесу виплат.

Для виводу (25) обчислимо

$$P(0<S_{\nu(t)}\leq b|S_n,n\geq 1)=$$
$$\sum\nolimits_{n\geq 0}\left[\prod\nolimits_{k=0}^{n-1}(1-\pi(t-S_k))\right]\pi(t-S_n)1_{0<t-S_n\leq b}=$$
$$\pi(t)1_{0<t\leq b}+(1-\pi(t))\sum\nolimits_{n\geq 1}\left[\prod\nolimits_{k=1}^{n-1}(1-\pi(t-\xi_1-S'_{k-1}))\right]\times$$
$$\pi(t-\xi_1-S'_{n-1})1_{0<t-\xi_1-S'_{n-1}\leq b}=$$
$$P(0<S'_{\nu'(t-\xi_1)}\leq b|\xi_1,S'_n,n\geq 1)1_{\xi_1<t},$$

де $S'_k=\xi_2+\cdots+\xi_{k+1}$ однаково розподілені з S_k та не залежать від ξ_1. Перехід до математичного сподівання призводить до шуканого.

(а) Позначимо при $\alpha\geq 0$

$$x_\alpha(t)=\exp(\alpha t)x(t),\pi_\alpha(t)=\exp(\alpha t)\pi(t).$$

Рівняння (25) з урахуванням зауваження 1 має вигляд

$$x_\alpha(t)=\pi_\alpha(t)1_{t\leq b}+\int_0^t x_\alpha(t-s)F_\alpha(t,ds),\tag{40}$$

де $F_\alpha(t,ds)=(1-\pi(t))\exp(\alpha s)G(ds)$.

За умови $\theta\in(0,1)$ граничний при $t\to\infty$ розподіл для $F_\alpha(t,ds)$ має вигляд $(1-\theta)\exp(\alpha s)G(ds)$ та є імовірнісним внаслідок (28). Цей розподіл має абсолютно неперервний тип, як і G. Далі, ядро збурення (7) має вигляд $\Delta(t,ds)=(\theta-\pi(t))\exp(\alpha s)G(ds)$, функція збурення $\delta(t)\leq|\pi(t)-\theta|/(1-\theta)\in L_1^0$. Тому застосування до рівняння (40) теореми 3,б (16) доводить (27).

(б) Зображення (29) є наслідком (3) для рівняння відновлення (40). Наступний вираз випливає з теореми відновлення (16).

З рівняння (29), нерівності (21) та обмеженості x виводимо, що

$$\sup|x|=O(\sup U*\pi)=O(\|\pi\|_{01}),\|\pi\|_{01}\to 0.$$

Тому з того ж рівняння випливає (30).

Рівняння (31) має вигляд $1-q=y_1+(1-q)*G$, де

$$y_1(t)=-(1-\pi(t))(1-G(t))+(1-G(t))+\pi(t)q*G(t)=$$
$$\pi(t)(1-G(t))+\pi(t)q*G(t)=O(\|\pi\|_{01}),\|\pi\|_{01}\to 0.$$

Тому виконуються зображення (32) ⊡

Література

1. N. V. Kartashov, *Strong Stable Markov Chains*, VSP, Utrecht, the Netherlands, 1996.
2. D. C. M. Dickson, *The probability of ultimate ruin ith a variable premium rate*, Scand. Actuarial J. (1991), 75–86.
3. H. Gerber, *On the probability of ruin in the presence of a linear dividend barrier*, Scand. Actuarial J. (1981), 105–115.
4. H. Gerber and E. S. W. Shiu, *On the Time Value of Ruin*, Proc. of the 31 Actuarial Research Conference, Ball Statte Univ., Aug. 1996, pp. 145–199.
5. H. Schmidli, *An extension to the renewal theorem and an application to risk theory*, The Annals of the Applied Probability **7** (1997), no. 1, 121–133.
6. G. C. Tailor, *Probability of ruin with variable premium rate*, Scand. Actuarial J. (1980), 57–76.
7. N. V. Kartashov, *On ruin probabilities for a risk processes with bounded reserves*, Theor. Probab. Math. Stat. **60** (2000), 53–65.
8. M. V. Kartashov and O. M. Stroyev, *The Lundberg approximation for the ruin function in the almost homogeneous environment*, Theor. Probab. Math. Stat. **73** (2005), 64–72. (Ukrainian)
9. M. V. Kartashov, *Неоднорідне збурення рівняння відновлення та теорема Крамера–Лундберга для процесу ризику зі змінними інтенсивностями премій*, Теорія ймовірностей та математична статистика **78** (2008), 55–66.
10. Н. В. Карташов, *Равномерные предельные теоремы для эргодических случайных процессов и их применения в теории массового обслуживания*, Дисс. на соиск. уч. степ. доктора физ.-мат. наук, Киев, КГУ, 1985.
11. N. V. Kartashov, *A generalization of the stone representation and necessary conditions for uniform convergence in the rnewal theorem*, Theor. Probab. Math. Stat. **26** (1983), 53–67.
12. N. V. Kartashov, *Equivalence of uniform renewal theorems and criteria for their validity*, Theor. Probab. Math. Stat. **27** (1983), 55–64.
13. W. Feller, *An Intoduction to Probability Theory and its Applications*, vol. 2, John Wiley & Sons, New York, 1966.
14. А. А. Боровков, *Вероятностне процессы в теории массового обслуживания*, "Наука", Москва, 1972.
15. C. Stone, *On absolutely continous conponents and renewal theory*, Ann. Math. Stat. **37** (1966), 271–275.
16. D. J. Daley, *Tight bounds for the renewal function of a random walk*, Ann. Probab. **8** (1980), no. 3, 615–621.
17. В. М. Шуренков, *Ергодические процессы Маркова*, "Наука", Москва, 1989.

Кафедра теорії ймовірностей, математичної статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Національний університет ім. Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, 01033, Київ, Україна

Адреса електронної пошти: nkartashov@skif.com.ua

Надійшла 12/10/2009