Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 83, 2010, стор. 80–91

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 83, 2010, pp. 80–91

# ВИБІРКОВА НЕПЕРЕРВНІСТЬ ТА МОДЕЛЮВАННЯ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ З ПРОСТОРІВ $D_{V,W}$

УДК 519.21

Ю. В. КОЗАЧЕНКО І О. М. МОКЛЯЧУК

Анотація. У роботі вивчаються випадкові послідовності та процеси із просторів $D_{V,W}$, знайдено умови вибіркової неперервності таких процесів. Розглянуто умови збіжності послідовностей випадкових величин з просторів $D_{V,W}$. Вивчаютсья моделі випадкових процесів із просторів $D_{V,W}$, наведено приклади.

Abstract. Random sequences and stochastic processes from $D_{V,W}$ spaces are studied in the work. Conditions for selective continuity of such processes are found. Convergence of series of random numbers from $D_{V,W}$ spaces are considered. Models of stochastic processes from $D_{V,W}$ spaces are studied. Few examples are considered.

Аннотация. В работе изучаются случайные последовательности и процессы из пространств $D_{V,W}$, найдено условия выборочной непрерывности таких процессов. Рассмотрены условия сходимости последовательностей случайных величин из пространств $D_{V,W}$. Изучаются модели случайных процессов из пространств $D_{V,W}$, приведены примеры.

## Вступ

У роботі [1] було введено простори $D_{V,W}$, тобто передбанахові простори, задані певною переднормою, а саме:

$$||\xi|| = \sup_{x\geq 0} V(x)W^{(-1)}(P\{|\xi| > x\}).$$

У тій же роботі було розглянуто основні властивості таких просторів, умови збіжності рядів випадкових величин з таких просторів. Також, була вивчена поведінка супремуму випадкового процесу з просторів $D_{V,W}$. У даній роботі продовжується вивчення просторів $D_{V,W}$ та процесів з них.

У першому розділі наведено базові означення та теореми, пов'язані з просторами $D_{V,W}$. Наступний розділ містить теореми, що стосуються випадкових величин та процесів з $D_{V,W}$, які будуть використовуватися надалі. У третьому розділі вивчається вибіркова неперервність випадкових процесів. Четвертий розділ містить приклади умов збіжності рядів випадкових величин з конкретними розподілами. У п'ятому розділі наведені теореми для побудови моделей процесів з $D_{V,W}$, котрі наближають процес із заданими надійністю та точністю; і, нарешті, у шостому розділ наведено приклади моделей для деяких випадкових процесів.

---

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60G07.

*Ключові слова і фрази.* Випадкові процеси, моделювання випадкових процесів, переднорма, квазінорма, передбанахові простори, квазібанахові простори, простори $D_{V,W}$.

Перший автор вдячний за підтримку Департаменту Математики та Статистики університету “La Trobe„м. Мельбурн в рамках дослідницького гранту “Stochastic Approximation in Finance and Signal Processing„.

## 1. Простори $D_{V,W}$

Нехай $\{\Omega, \mathcal{B}, P\}$ - стандартний імовірнісний простір, $L_0(\Omega)$ - простір випадкових величин на $\{\Omega, \mathcal{B}, P\}$, $\mathcal{M} \subset L_0(\Omega)$ - деякий лінійний простір

**Означення 1.1.** [2] Функція $\Theta = (\Theta(\xi), \xi \in \mathcal{M})$ називається переднормою, якщо для всіх $\xi \in \mathcal{M}$:
1. $\Theta(\xi) \in [0, \infty)$;
2. $\Theta(0) = 0$;
3. $\Theta(-\xi) = \Theta(\xi)$.

**Означення 1.2.** [2] Повний відносно переднорми $\Theta$ простір $\mathcal{M}$ будемо називати передбанаховим простором.

**Означення 1.3.** Передбанаховий простір $\mathcal{M}$ називатимемо перед – $K_\sigma$-простором, якщо $\mathcal{M}$ має такі властивості:
a1) якщо $\xi, \eta \in \mathcal{M}$, то $max(\xi, \eta) \in \mathcal{M}$ та $min(\xi, \eta) \in \mathcal{M}$. Отже, і $|\xi| \in \mathcal{M}$.
a2) якщо $\eta \in \mathcal{M}$ та $|\xi| \leq |\eta|$ майже скрізь, то $|\xi| \in \mathcal{M}$.

**Означення 1.4.** [4] Нехай функціонал $||\cdot||$ кожній випадковій величині $\xi \in \mathcal{M}$ ставить у відповідність невід'ємне число $||\xi||$ так, що виконуються умови
1. $||\xi|| = 0 \Leftrightarrow \xi = 0$ з імовірністю одиниця;
2. $||\xi + \eta|| \leq ||\xi|| + ||\eta||$;
3. при $|\lambda| \leq 1$ $||\lambda\xi|| \leq ||\xi||$.
Тоді $||\cdot||$ називають квазінормою.

**Означення 1.5.** Повний відносно квазінорми $||\cdot||$ простір $\mathcal{M}$ будемо називати квазібанаховим.

*Зауваження* 1.1. Квазінорма є переднормою. Також, якщо замість умови 3 означення 1.4 виконується $||\lambda\xi|| = |\lambda| \cdot ||\xi||$, то квазінорма є звичайною нормою.

**Означення 1.6.** [3] Додатна монотонно неспадна послідовність $\mu(n), n \geq 1$ називається мажоруючою характеристикою передбанахового $K_\sigma$-простору $\mathcal{M}$, якщо для будь-яких $\xi_k \in \mathcal{M}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ виконується нерівність

$$\Theta(\max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k|) \leq \mu(n) \max_{1 \leq k \leq n} \Theta(\xi_k).$$

Поняття характеристики для просторів Орліча вперше введено в роботі [7], для $K_\sigma$-просторів - в [5], а для квазібанахових $K_\sigma$-просторів - в роботі [6].

**Означення 1.7.** [3] Нехай $J = J(\lambda)$ - монотонно неспадна функція, така, що $J(\lambda) \geq 0$, $J(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to 0$. Якщо для переднорми $\Theta(\cdot)$ на $\mathcal{M}$ виконується нерівність $\Theta(\lambda\xi) \leq J(|\lambda|)\Theta(\xi)$, то будемо говорити, що ця переднорма підпорядкована функції $J$.

**Означення 1.8.** [2] Неперервна парна опукла функція $U = (U(x), x \in R)$ називається $C$-функцією, якщо $U(0) = 0$ та $U(x)$ монотонно зростає при $x > 0$.

Наведемо тепер означення простору $D_{V,W}(\Omega)$.

**Означення 1.9.** [1] Нехай $W = \{W(x), x \in R\}$ та $V = \{V(x), x \in R\}$, $W(x) > 0$, $V(x) > 0$, $x \neq 0$ - деякі парні монотонно зростаючі при $x > 0$ неперервні функції, такі, що існує константа C>0, для якої $W^{(-1)}(x + y) \leq C(W^{(-1)}(x) + W^{(-1)}(y))$, та існує неперервна функція $Z = \{Z(x), x > 0\}$, така, що для будь-якої константи $a > 0$ виконується нерівність $V(ax) \leq Z(a)V(x)$ при $x > 0$, і $0 < Z(x) < \infty$, $|x| < \infty$; крім того, $W(0) = 0$. Випадкова величина $\xi$ належить простору $D_{V,W}(\Omega)$, якщо

$$\sup_{x \geq 0} V(x)W^{(-1)}(P\{|\xi| > x\}) < \infty. \quad (1)$$

Прикладами функцій $W$ та $V$ можуть слугувати такі функції: $W = |x|^a$, $V = |x|^b$, $W(x) = \exp\{|x|^a\} - 1$, $a > 0$, $b > 0$.

**Теорема 1.1.** [1] *Простір $D_{V,W}(\Omega)$ є перед- $K_\sigma$ - простором відносно переднорми*

$$||\xi||_{V,W} = (\sup_{x>0} V(x) W^{-1}(P\{|\xi| > x\}))^{1/2}.$$

*Якщо $||\xi_n - \xi_m||_{V,W} \to 0$ коли $n, m \to \infty$ та $\sup_n ||\xi_n||_{V,W} < \infty$, то існує випадкова величина $\xi \in D_{V,W}(\Omega)$ така, що $||\xi_n - \xi||_{V,W} \to 0$, $n \to \infty$. Крім того, переднорма $||\cdot||_{V,W}$ підпорядкована функції $J(\lambda) = (Z(\lambda))^{1/2}$*

*Нехай $W(x)$ - $C$ - функція Орліча, а $V(x)$ - функція, обернена до $C$ функції Орліча. Тоді функціонал $||\cdot||$ є квазінормою, і простір є повним відносно цієї квазінорми.*

*Також при всіх $x > 0$ має місце нерівність*

$$P\{|\xi| > x\} \le W\left(\frac{||\xi||^2_{V,W}}{V(x)}\right). \tag{2}$$

**Теорема 1.2.** [1] *Послідовність*

$$\mu(n) = \sup_{0<t<1/n} \left(\frac{W^{(-1)}(tn)}{W^{(-1)}(t)}\right)^{1/2}$$

*є мажоруючою характеристикою простору $D_{V,W}(\Omega)$.*

## 2. Властивості рядів та випадкових процесів з просторів $D_{V,W}$

**Теорема 2.1.** [1] *Нехай $\xi_k$ - випадкові величини з $D_{V,W}(\Omega)$, $||\xi_k||$ - переднорма, $||\xi_k|| > 0$, $f(x) = xV(W(x))$, $x > 0$, $f^{(-1)}(x)$ - функція, обернена до $f(x)$. Для того, щоб ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \tag{3}$$

*збігався за ймовірністю, досить, щоб збігався ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^*, \tag{4}$$

*де $\alpha_k^* = V^{(-1)}\left(\frac{||\xi_k||^2}{f^{(-1)}(||\xi_k||^2)}\right)$. При цьому, для $x \ge \mu = \sum_{k=1}^{\infty} V^{(-1)}\left(\frac{||\xi_k||^2}{f^{(-1)}(||\xi_k||^2)}\right)$ має місце нерівність*

$$P\left\{\left|\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k\right| \ge x\right\} \le \sum_{k=1}^{\infty} W\left(\frac{||\xi_k||^2}{V(\frac{\alpha_k^* x}{\mu})}\right), \tag{5}$$

*і ряд в (5) збігається при $x \ge \mu$.*

*Зауваження* 2.1. Функція $x/f^{(-1)}(x)$ монотонно зростає. Це випливає з того, що монотонно зростає функція $f(x)/x = V(W(x))$.

**Теорема 2.2.** [1] *Нехай $W(x) = |x|^a$ та $V(x) = |x|^b$, $a > 0, b > 0$. Тоді ряд (3) збігається за ймовірністю, коли збігається ряд*

$$\mu = \sum_{k=1}^{\infty} ||\xi_k||^{\frac{2a}{ab+1}}$$

*та при $x \ge \mu$ має місце нерівність*

$$P\{|\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k| > x\} \le \frac{1}{x^{ab}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} ||\xi_k||^{\frac{2a}{ab+1}}\right)^{ab+1},$$

*тобто* $\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k$ *належить простору* $D_{V,W}$ *та*

$$||\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k|| \le \left(\sum_{k=1}^{\infty}||\xi_k||^{\frac{2a}{ab+1}}\right)^{\frac{ab+1}{2a}}.$$

**Означення 2.1.** [1] Будемо казати, що випадковий процес $X(t) = \{X(t), t \in T\}$ належить простору $D_{V,W}$, якщо для кожного $t$ $X(t) \in D_{V,W}$.

Прикладами випадкових процесів з простору $D_{V,W}$ можуть бути процеси, котрі можуть бути представлені у вигляді ряду

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\phi_k(t),\ \ t \in T, \tag{6}$$

коли $\xi_k \in D_{V,W}$ і цей ряд збігається в просторі $D_{V,W}$.

З умовами збіжності такого ряду можна ознайомитися в [1].

**Означення 2.2.** [2] Передметрикою називається функція $\rho(t,s)$, $t,s \in T$, така, що $\rho(t,s) \in [0,\infty)$, $\rho(t,t) = 0$, $\rho(t,s) = \rho(s,t)$.

Нехай $X = \{X(t), t \in T\}$ - випадковий процес з простору $D_{V,W}$, $\rho_X(t,s) = ||X(s) - X(t)||$ - передметрика, породжена процесом $X$.

Нехай для процесу $X$ виконуються наступні умови:

**A1)** $\sup_{t\in T}||X(t)|| < \infty$;

**A2)** простір $(T,\rho_X)$ - сепарабельний та процес $X$ сепарабельний на $(T,\rho_X)$.

Позначимо $\varepsilon_0 = \sup_{t,s\in T}\rho_X(t,s)$. З умови (A1) випливає, що $\varepsilon_0 < \infty$. Позначимо $\varepsilon_k = \varepsilon_0\theta^k$, $\theta \in (0,1)$; також позначимо $N(\varepsilon)$ - метричну масивність простору $(T,\rho)$, тобто мінімальне число замкнених куль, які покривають $(T,\rho)$.

Наступна теорема дає нам умови, при яких $\sup_{t\in T}X(t) < \infty$ з імовірністю 1 та оцінки для розподілу цього супремуму.

**Теорема 2.3.** [1] *Нехай процес X задовольняє умови A1 та A2. Тоді, якщо збігається ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty}V^{(-1)}\left(\frac{\mu(N(\varepsilon_n))^2\varepsilon_{n-1}^2}{f^{(-1)}(\mu(N(\varepsilon_n))^2\varepsilon_{n-1}^2)}\right),$$

*де f задана у теоремі 2.1, то*

$$P\{\sup_{t\in T}|X(t)| \ge x\} \le W\left(\frac{\inf_{t\in T}||X(t)||^2}{V(\psi_0 x)}\right) + \sum_{k=1}^{\infty}W\left(\frac{\mu(N(\varepsilon_k))^2\varepsilon_{k-1}^2}{V(\psi_k x)}\right), \tag{7}$$

*де*

$$\psi_0 = \frac{1}{\Psi}V^{(-1)}\left(\frac{\inf_{t\in T}||X(t)||^2}{f^{(-1)}(\inf_{t\in T}||X(t)||^2)}\right), \qquad \psi_k = \frac{1}{\Psi}V^{(-1)}\left(\frac{\mu(N(\varepsilon_k))^2\varepsilon_{k-1}^2}{f^{(-1)}(\mu(N(\varepsilon_k))^2\varepsilon_{k-1}^2)}\right),$$

$$\Psi = \sum_{k=0}^{\infty}\psi_k, \qquad x > \Psi.$$

**Теорема 2.4.** [1] *Нехай процес* $X = \{X(t), t \in T\}$ *такий, що* $X \in D_{V,W}$, $W = |x|^a$, $V = |x|^b$, $a > 0, b > 0$; *крім того, X задовольняє умови A1 та A2.*

*Якщо виконується умова*

$$\int_0^{\Delta_0 p}(N(u^{\frac{ab+1}{2a}}))^{\frac{1}{2a}}du < \infty, \tag{8}$$

*де* $p = \theta^{\frac{2a}{ab+1}}$ *- деяке число,* $0 \le \theta \le 1$, $\Delta_0 = \varepsilon_0^{\frac{2a}{ab+1}}$, $\varepsilon_0 = \sup_{t,s\in T}\rho_X(t,s)$, *то тоді* $\sup_{t\in T}|X(t)| \in D_{V,W}$, *і, крім того,*

$$P\{\sup_{t\in T}|X(t)| \ge x\} \le \frac{1}{x^{ab}}\left(\inf_{t\in T}\|X(t)\|^{\frac{2a}{ab+1}} + \frac{1}{p(1-p)}\int_0^{\Delta_0 p}(N(u^{\frac{ab+1}{2a}}))^{\frac{1}{2a}}du\right).$$

## 3. Неперервність процесів з простору $D_{V,W}$

Нехай процес $X$ - випадковий процес з простору $D_{V,W}$, такий, що $\sup_{t\in T}\|X(t)\| < \infty$. Нехай $\rho_X(t,s) = \|X(t) - X(s)\|$ - передметрика, породжена процесом $X$. Нехай також простір $(T,\rho_X)$ - сепарабельний, а процес $X$ сепарабельний на $(T,\rho_X)$.

Нехай $\theta \in (0,1)$ та $\varepsilon_k = \varepsilon_0\theta^k, k \ge 0$, $\varepsilon_0 = \sup_{t,s\in T}\|X(t) - X(s)\|$. Позначимо через $V_{\varepsilon_k}$ множину центрів замкнених куль радіуса $\varepsilon_k$, які утворюють мінімальне покриття простору $(T,\rho)$. Кількість точок множини $V_{\varepsilon_k}$ дорівнює $N(\varepsilon_k)$. Нехай $t,s \in T$ - такі точки, що $\rho(t,s) < \varepsilon$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$.

Виберемо $k$ таким чином, щоб $\varepsilon_k < \varepsilon < \varepsilon_{k-1}$. Множина $V_k = \cup_{j=k}^{\infty}V_{\varepsilon_j}$ є множиною сепарабельності процесу $X(t)$, бо $X(t)$ є неперервним за ймовірністю.

Позначимо $S_n$ найменшу $\varepsilon_n$-сітку множини T відносно псевдометрики $\rho_x$, і покладемо $S = \bigcup_{n=0}^{\infty}S_n$.

**Означення 3.1.** [2] Сім'я відображень $\alpha_k(t)$, $k = 0,1,\ldots$ називається $\alpha$-процедурою, якщо кожній точці з $S$ ставиться у відповідність одна точка $\alpha_k$ з $S_k$, така, що $\rho(t,\alpha_k(t)) \le \varepsilon_k$.

**Теорема 3.1.** *Якщо процес $X$ задовольняє вищенаведеним умовам і ряди*

$$\sum_{l=k}^{\infty}V^{(-1)}\left(\frac{\mu(N(\varepsilon_l))^2\varepsilon_{l-1}^2}{f^{(-1)}(\mu(N(\varepsilon_l))^2\varepsilon_{l-1}^2)}\right)$$

*та*

$$\sum_{l=k}^{\infty}V^{(-1)}\left(\frac{\varepsilon_{l-1}^2}{f^{(-1)}(\varepsilon_{l-1}^2)}\right)$$

*збігаються, та* $x \ge \Psi$, *де*

$$\Psi = V^{(-1)}\left(\frac{\mu(2N(\varepsilon_k))^2\varepsilon_{k-1}^2}{f^{(-1)}(\mu(N^2(\varepsilon_k))^2\varepsilon_{k-1}^2)}\right) + \sum_{l=k}^{\infty}V^{(-1)}\left(\frac{\mu(N(\varepsilon_l))^2\varepsilon_{l-1}^2}{f^{(-1)}(\mu(N(\varepsilon_l))^2\varepsilon_{l-1}^2}\right),$$

*то тоді*

$$P\{\sup_{\rho(t,s)<\varepsilon}|X(t) - X(s)| \ge x\} \le$$

$$\le W\left(\frac{\mu(2N(\varepsilon_k))^2\varepsilon_{k-1}^2}{V(\psi_0 x)}\right) + \sum_{l=k}^{\infty}W\left(\frac{\mu(N(\varepsilon_l))^2\varepsilon_{l-1}^2}{V(\psi_l x)}\right),$$

*де*

$$\psi_0 = \frac{1}{\Psi}V^{(-1)}\left(\frac{\mu(2N(\varepsilon_k))^2\varepsilon_{k-1}^2}{f^{(-1)}(\mu(N^2(\varepsilon_k))^2\varepsilon_{k-1}^2)}\right),$$

$$\psi_l = \frac{1}{\Psi}V^{(-1)}\left(\frac{\mu(N(\varepsilon_l))^2\varepsilon_{l-1}^2}{f^{(-1)}(\mu(N(\varepsilon_l))^2\varepsilon_{l-1}^2)}\right).$$

*При цьому процес $X(t)$ вибірково неперервний у просторі $(T,\rho)$.*

*Доведення.* Нехай $m$-довільне число, таке, що $m > k$. Розглянемо точки:

$$t_m = \alpha_m(t), t_{m-1} = \alpha_{m-1}(t_m), \ldots, t_k = \alpha_k(t_{k+1}),$$

$$s_m = \alpha_m(t), s_{m-1} = \alpha_{m-1}(s_m), \ldots, s_k = \alpha_k(s_{k+1}),$$

де $\alpha_k(t)$ -альфа-процедура. Тоді

$$X(t)-X(s)=(X(t)-X(\alpha_m(t)))+(X(s)-X(\alpha_m(s)))+$$

$$+\sum_{l=k}^{m-1}(X(t_{l+1})-X(t_l))+\sum_{l=k}^{m-1}(X(s_{l+1})-X(s_l))+(X(t_k)-X(s_k)). \tag{9}$$

Звідси можна записати, що

$$P\{|X(t_k)-X(s_k)|\geq x\}\leq$$

$$\leq P\{|X(t)-X(\alpha_m(t))|>x\psi_1'\}+P\{|X(s)-X(\alpha_m(s))|>x\psi_1''\}+$$

$$+\sum_{l=k}^{m-1}P\{|X(t_{l+1})-X(t_l)|>x\psi_l'\}+\sum_{l=k}^{m-1}P\{|X(s_{l+1})-X(s_l)|>x\psi_l''\}+$$

$$+P\{|X(t)-X(s)|>x\psi_0\}\leq$$

$$\leq W\left(\frac{||X(t)-X(\alpha_m(t))||^2}{V(x\psi_1')}\right)+W\left(\frac{||X(s)-X(\alpha_m(s))||^2}{V(x\psi_1'')}\right)+$$

$$+\sum_{l=k}^{m-1}W\left(\frac{||X(t_l)-X(\alpha_{l-1}(t_l))||^2}{V(x\psi_l')}\right)+\sum_{l=k}^{m-1}W\left(\frac{||X(s_l)-X(\alpha_{l-1}(s_l))||^2}{V(x\psi_l'')}\right)+$$

$$+W\left(\frac{||X(t)-X(s)||^2}{V(x\psi_0)}\right)\leq$$

$$\leq 2W\left(\frac{\varepsilon_{m-1}^2}{V(x\psi_1)}\right)+2\sum_{l=k}^{m-1}W\left(\frac{\varepsilon_{l-1}^2}{V(x\psi_l)}\right)+W\left(\frac{\varepsilon_0^2}{V(x\psi_0)}\right), \tag{10}$$

адже $||X(t)-X(\alpha_{n-1}(t))||\leq\varepsilon_{n-1}$.

З (9) випливає, що

$$|X(t_k)-X(s_k)|\leq|X(t)-X(\alpha_m(t))|+|X(s)-X(\alpha_m(s))|+$$

$$+\sum_{l=k}^{m-1}|X(t_{l+1})-X(t_l)|+\sum_{l=k}^{m-1}|X(s_{l+1})-X(s_l)|+|X(t)-X(s)|\leq$$

$$\leq 2\sum_{l=k}^{m-1}\max_{u\in V_{\varepsilon_l}}|X(u)-X(\alpha_l(u))|+|X(t)-X(\alpha_k(t))|+$$

$$+|X(s)-X(\alpha_k(s))|+\max_{v,w\in V_{\varepsilon_k},(10)}|X(v)-X(w)|$$

Спрямуємо $m\to\infty$:

$$\sup_{\rho(t-s)\leq\varepsilon}|X(t)-X(s)|=\sup_{|t-s|\leq\varepsilon,t,s,\in V_{\varepsilon_k}}|X(t)-X(s)|\leq$$

$$\leq\max_{v,w\in V_{\varepsilon_k},(10)}|X(v)-X(w)|+2\sum_{l=k}^{\infty}\max_{u\in V_{\varepsilon_{l+1}}}|X(u)-X(\alpha_l(u))|$$

Перетворивши вираз, отримаємо

$$P\{\sup_{\rho(t-s)\leq\varepsilon}|X(t)-X(s)|\geq x\}\leq$$

$$\leq P\{\max_{v,w\in V_{\varepsilon_k},(10)}|X(v)-X(w)|\geq\psi_0x\}+\sum_{l=k}^{\infty}P\{\max_{u\in V_{\varepsilon_{l+1}}}|X(u)-X(\alpha_l(u))|\geq\psi_lx\}$$

Перетворюючи вирази аналогічно до доведення теореми 2.3 (із ним можна ознайомитися у [1]), отримаємо

$$P\{\sup_{\rho(t-s)\leq\varepsilon}|X(t)-X(s)|\leq x\}\leq$$

$$\le W\left(\frac{\mu(2N(\varepsilon_k))^2\varepsilon_{k-1}^2}{V(\psi_0 x)}\right)+\sum_{l=k}^{\infty}W\left(\frac{\mu(N(\varepsilon_l))^2\varepsilon_{l-1}^2}{V(\psi_l x)}\right),$$

де

$$\psi_0=\frac{1}{\Psi}V^{(-1)}\left(\frac{\mu(2N(\varepsilon_k))^2\varepsilon_{k-1}^2}{f^{(-1)}(\mu(2N(\varepsilon_k))^2\varepsilon_{k-1}^2)}\right),$$

$$\psi_l=\frac{1}{\Psi}V^{(-1)}\left(\frac{\mu(N(\varepsilon_l))^2\varepsilon_{l-1}^2}{f^{(-1)}(\mu(N(\varepsilon_l))^2\varepsilon_{l-1}^2)}\right),$$

$$\Psi=V^{(-1)}\left(\frac{\mu(2N(\varepsilon_k))^2\varepsilon_{k-1}^2}{f^{(-1)}(\mu(N^2(\varepsilon_k))^2\varepsilon_{k-1}^2)}\right)+\sum_{l=k}^{\infty}V^{(-1)}\left(\frac{\mu(N(\varepsilon_l))^2\varepsilon_{l-1}^2}{f^{(-1)}(\mu(N(\varepsilon_l))^2\varepsilon_{l-1}^2)}\right).$$

Так як $W(x)$ монотонно зростає для всіх $x>0$,то при фіксованому $x$

$$W\left(\frac{\mu(2N(\varepsilon_k))^2\varepsilon_{k-1}^2}{V(\psi_0 x)}\right)\to 0,$$

а, так як ряд

$$\sum_{l=k}^{\infty}W\left(\frac{\mu(N(\varepsilon_l))^2\varepsilon_{l-1}^2}{V(\psi_l x)}\right)$$

збігається, то, якщо спрямувати $k\to\infty$, отримаємо

$$W\left(\frac{\mu(2N(\varepsilon_k))^2\varepsilon_{k-1}^2}{V(\psi_0 x)}\right)+\sum_{l=k}^{\infty}W\left(\frac{\mu(N(\varepsilon_l))^2\varepsilon_{l-1}^2}{V(\psi_l x)}\right)\to 0,$$

що автоматично означає

$$P\{\sup_{\rho(t,s)<\varepsilon}|X(t)-X(s)|\ge x\}\to 0, k\to\infty.$$

Звідси видно, що процес є вибірково неперервним на $(T,\rho)$. □

**Теорема 3.2.** *Нехай $W(x)=x^a$, $V(x)=x^b$, $a>1$, $0<b<1$. Тоді, якщо*

$$\int_0^{\Delta_0 p^{k+1}}N(u^{\frac{ab+1}{2a}})^{1/2a}du<\infty, \tag{11}$$

*то*

$$P\{\sup_{\rho(t,s)<\varepsilon}|X(s)-X(t)|\ge x\}\le$$

$$\le\frac{2}{x^{ab}p(1-p)}\int_0^{\Delta_0 p^{k+1}}N(u^{\frac{ab+1}{2a}})^{1/2a}du.$$

*При цьому процес $X(t)$ є вибірково неперервним на $(T,\rho)$.*

*Доведення.*

$$P\{\sup_{\rho(t,s)<\varepsilon}|X(s)-X(t)|\ge x\}\le$$

$$\le\frac{1}{x^{ab}p(1-p)}\left((\mu(2N(\varepsilon_k))\varepsilon_{k-1})^{\frac{2a}{ab+1}}+2\sum_{l=k+1}^{\infty}(\mu(N(\varepsilon_l))\varepsilon_{l-1})^{\frac{2a}{ab+1}}\right)\le$$

$$\le\frac{1}{x^{ab}p(1-p)}\left(\int_{\Delta_0 p^{k+1}}^{\Delta_0 p^k}\mu(2N(u^{\frac{ab+1}{2a}}))du+2\int_0^{\Delta_0 p^{k+1}}\mu(N(u^{\frac{ab+1}{2a}}))du\right).$$

Останній результат отримано використовуючи доведення теореми 2.3 (з ним можна ознайомитися в [1]); $\Delta_0$ та $p$ задані там же.

З теореми 1.2 маємо, що

$$\mu(n)=\sup_{0<t<1/n}\left(\frac{W^{(-1)}(tn)}{W^{(-1)}(t)}\right)^{1/2}=n^{1/2a}.$$

Застосувавши цей вираз, отримаємо

$$P\{\sup_{\rho(t,s)<\varepsilon}|X(s)-X(t)|\geq x\}\leq$$

$$\leq\frac{1}{x^{ab}p(1-p)}\left(2^{1/2a}\int_{\Delta_0 p^{k+1}}^{\Delta_0 p^k}(N(u^{\frac{ab+1}{2a}}))^{1/2a}du+2\int_0^{\Delta_0 p^{k+1}}N(u^{\frac{ab+1}{2a}})^{1/2a}du\right)\leq$$

$$\leq\frac{2}{x^{ab}p(1-p)}\int_0^{\Delta_0 p^{k+1}}N(u^{\frac{ab+1}{2a}})^{1/2a}du.\quad\square$$

**Теорема 3.3.** *Нехай процес* $X=\{X(t),t\in[0,T]\}$ *такий, що* $X\in D_{V,W}$, $W(x)=|x|^a$, $V(x)=|x|^b$, $a>0$, $b>0$, *і процес* $X$*-сепарабельний на* $[0,T]$. *Нехай*

$$\sup_{|t-s|\leq h}||X(t)-X(s)||\leq Dh^{\zeta},$$

$D>0$, $\zeta>\frac{ab+1}{4a^2}$. *Тоді* $\sup_{t\in[0,T]}|X(t)|\in D_{V,W}$, *і, крім того, для будь-якого* $x>0$

$$P\{\sup_{\rho(t,s)\leq\varepsilon}|X(s)-X(t)|\geq x\}\leq\frac{2}{x^{ab}p(1-p)}\int_0^{\Delta_0 p^{k+1}}\left(\frac{DT}{2u^{\frac{ab+1}{2a\zeta}}}+1\right)^{1/2a}du,$$

*При цьому процес* $X(t)$ *є вибірково неперервним на* $(T,\rho)$.

*Доведення.* За умов теореми,

$$N(\varepsilon)\leq\frac{DT}{2\varepsilon^{1/\zeta}}+1,$$

Тоді інтеграл (11) можна переписати як

$$P\{\sup_{\rho(t,s)<\varepsilon}|X(s)-X(t)|\geq x\}\leq$$

$$\leq\frac{2}{x^{ab}p(1-p)}\int_0^{\Delta_0 p^{k+1}}N(u^{\frac{ab+1}{2a}})^{1/2a}du<\infty.$$

$$\leq\frac{2}{x^{ab}p(1-p)}\int_0^{\Delta_0 p^{k+1}}\left(\frac{DT}{2u^{\frac{ab+1}{2a\zeta}}}+1\right)^{1/2a}du.$$

Останній інтеграл збіжний, коли збіжний інтеграл

$$\int_0^{\Delta_0 p^{k+1}}\frac{1}{u^{\frac{ab+1}{4a^2\zeta}}}du,$$

що досягається, коли $\zeta>\frac{ab+1}{4a^2}$.

Значення інтеграла

$$\frac{2}{x^{ab}p(1-p)}\int_0^{\Delta_0 p^{k+1}}\left(\frac{DT}{2u^{\frac{ab+1}{2a\zeta}}}+1\right)^{1/2a}du$$

можна оцінити за допомогою гіпергеометричної функції. $\square$

## 4. Моделі випадкових процесів з просторів $D_{V,W}$

Нехай випадковий процес може бути зображений у вигляді

$$X(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\phi_k(t),\tag{12}$$

де $t\in[0,T]$. Розглянемо наступний процес:

$$X_N(t)=\sum_{k=1}^{N}\xi_k\phi_k(t).$$

Вираз $X_N(t)$ будемо називати моделлю процесу X.

Позначимо
$$\tilde{X}_N(t) := \sum_{k=N+1}^{\infty} \xi_k \phi_k(t) = X(t) - X_N(t) \tag{13}$$

**Теорема 4.1.** *Нехай процес $X = \{X(t), t \in [0,T]\}$ (див (12)) такий, що $\xi_k \in D_{V,W}$, $W = |x|^a$, $V = |x|^b$; крім того, $X$ задовольняє умови A1 та A2.*

*Якщо при*
$$\sup_{|t-s|<h} |\phi_k(s) - \phi_k(t)| \le C_k |h|^{\zeta}$$
*виконуються умови*
$$\sum_{k=1}^{\infty} ||\xi_k||^{\frac{2a}{ab+1}} C_k^{\frac{ab}{ab+1}} < \infty$$
*та*
$$\zeta > \frac{ab+1}{2a^2 b},$$
*то $\sup_{t \in T} |\tilde{X}_N(t)| \in D_{V,W}$, і, крім того,*
$$P\{\sup_{t\in[0,T]} |\tilde{X}_N(t)| > x\} \le$$
$$\le \frac{1}{x^{ab}} \left( \sum_{k=N+1}^{\infty} ||\xi_k||^{\frac{2a}{ab+1}} \inf_{t\in[0,T]} |\phi_k^{\frac{ab}{ab+1}}(t)| + \right.$$
$$\left. + \frac{T^{1/2a} (\sum_{k=N+1}^{\infty} C_k^{\frac{ab}{ab+1}} ||\xi_k||^{\frac{2a}{ab+1}})^{\frac{ab+1}{2a^2 b\zeta}}}{p(1-p)} \frac{a^2 b \zeta (\Delta_0 p)^{1-\frac{1+ab}{2a^2 b\zeta}}}{2a\zeta - ab - 1} + \frac{\Delta_0}{1-p} \right).$$

*Доведення.* Нехай $\sup_{|t-s|<h} |\phi_k(t) - \phi_k(s)| \le C_k \cdot |h|^{\zeta}$. Тоді
$$\sup_{|t-s|<h} ||\tilde{X}_N(t) - \tilde{X}_N(s)|| = \sup_{|t-s|<h} || \sum_{k=N+1}^{\infty} \xi_k (\phi_k(t) - \phi_k(s))|| \le$$
$$\le \left( \sum_{k=N+1}^{\infty} ||\xi_k||^{\frac{2a}{ab+1}} \sup_{|t-s|<h} J^{\frac{2a}{ab+1}} (\phi_k(t) - \phi_k(s)) \right)^{\frac{ab+1}{2a}} \le$$
$$\le \left( \sum_{k=1}^{\infty} ||\xi_k||^{\frac{2a}{ab+1}} \left( C_k^{b/2} h^{b\zeta/2} \right)^{\frac{2a}{ab+1}} \right)^{\frac{ab+1}{2a}} = h^{b\zeta/2} \left( \sum_{k=1}^{\infty} ||\xi_k||^{\frac{2a}{ab+1}} C_k^{\frac{ab}{ab+1}} \right)^{\frac{ab+1}{2a}}$$
так як $J(z) = z^{b/2}$ та $|| \sum_{k=N+1}^{\infty} \xi_k || \le (\sum_{k=N+1}^{\infty} ||\xi_k||^{\frac{2a}{ab+1}})^{\frac{ab+1}{2a}}$.

Так як за умовою теореми $t \in [0,T]$, то $N(\varepsilon) \le \frac{T}{2\delta^{(-1)}(h)} + 1$, де $\delta(h)$ можна покласти наступним чином:
$$\delta(h) = h^{b\zeta/2} \left( \sum_{k=1}^{\infty} ||\xi_k||^{\frac{2a}{ab+1}} C_k^{\frac{ab}{ab+1}} \right)^{\frac{ab+1}{2a}},$$
за умови, що ряд $\sum_{k=N+1}^{\infty} ||\xi_k||^{\frac{2a}{ab+1}} C_k^{\frac{ab}{ab+1}}$ збіжний.

За теоремою 2.4
$$P\{\sup_{t\in[0,T]} |\tilde{X}_N(t)| > x\} \le \frac{1}{x^{ab}} \left( \inf_{t\in[0,T]} \|\tilde{X}_N(t)\|^{\frac{2a}{ab+1}} + \frac{1}{p(1-p)} \int_0^{\Delta_0 p} (N(u^{\frac{ab+1}{2a}}))^{1/2a} du \right)$$
$$\le \frac{1}{x^{ab}} \left( \inf_{t\in[0,T]} \|\tilde{X}_N(t)\|^{\frac{2a}{ab+1}} + \frac{1}{p(1-p)} \int_0^{\Delta_0 p} \left( \frac{T}{2\delta^{(-1)}(u^{\frac{ab+1}{2a}})} + 1 \right)^{1/2a} \right) \le$$

$$\le \frac{1}{x^{ab}}\left(\inf_{t\in[0,T]}\|\tilde{X}_N(t)\|^{\frac{2a}{ab+1}}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{p(1-p)}\int_0^{\Delta_0 p}\left(\frac{T(\sum_{k=N+1}^{\infty}C_k^{\frac{ab}{ab+1}}\|\xi_k\|^{\frac{2a}{ab+1}})^{\frac{ab+1}{ab\zeta}}}{2u^{\frac{ab+1}{ab\zeta}}}+1\right)^{1/2a}\right)$$

$$\le \frac{1}{x^{ab}}\left(\inf_{t\in[0,T]}\|\tilde{X}_N(t)\|^{\frac{2a}{ab+1}}+\frac{T^{1/2a}(\sum_{k=N+1}^{\infty}C_k^{\frac{ab}{ab+1}}\|\xi_k\|^{\frac{2a}{ab+1}})^{\frac{ab+1}{2a^2b\zeta}}}{2p(1-p)}\int_0^{\Delta_0 p}\frac{1}{u^{\frac{ab+1}{2a^2b\zeta}}}+\frac{\Delta_0}{1-p}\right)$$

$$\le \frac{1}{x^{ab}}\left(\sum_{k=N+1}^{\infty}\|\xi_k\|^{\frac{2a}{ab+1}}\inf_{t\in[0,T]}|\phi_k^{\frac{ab}{ab+1}}(t)|+\right.$$

$$\left.+\frac{T^{1/2a}(\sum_{k=N+1}^{\infty}C_k^{\frac{ab}{ab+1}}\|\xi_k\|^{\frac{2a}{ab+1}})^{\frac{ab+1}{2a^2b\zeta}}}{p(1-p)}\frac{a^2b\zeta(\Delta_0 p)^{1-\frac{1+ab}{2a^2b\zeta}}}{2a\zeta-ab-1}+\frac{\Delta_0}{1-p}\right)$$

за умови, що інтеграл

$$\int_0^{\Delta_0 p}\frac{1}{u^{\frac{ab+1}{2a^2b\zeta}}}du$$

скінченний, що виконується, коли $\zeta > \frac{ab+1}{2a^2b}$. □

**Наслідок 4.1.** *Модель $X_N(t)$ наближає процес $X(t)$ при $t\in[0,T]$ із заданими точністю $æ>0$ та надійністю $1-\nu$, $0<\nu<1$ у просторі $D_{V,W}(\Omega)$, або*

$$P\{\sup_{t\in[0,T]}|\widetilde{X}_N(t)|>æ\}\le\nu,$$

*при умові, що* $\sup_{|t-s|<h}|\phi_k(s)-\phi_k(t)|\le C_k|h|^{\zeta}$, *якщо*

$$\nu\ge\frac{1}{æ^{ab}}\left(\sum_{k=N+1}^{\infty}||\xi_k||^{\frac{2a}{ab+1}}\inf_{t\in[0,T]}|\phi_k^{\frac{ab}{ab+1}}(t)|+\right.$$

$$\left.+\frac{T^{1/2a}(\sum_{k=N+1}^{\infty}C_k^{\frac{ab}{ab+1}}||\xi_k||^{\frac{2a}{ab+1}})^{\frac{ab+1}{2a^2b\zeta}}}{p(1-p)}\frac{a^2b\zeta(\Delta_0 p)^{1-\frac{1+ab}{2a^2b\zeta}}}{2a\zeta-ab-1}+\frac{\Delta_0}{1-p}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}|C_k|^{\frac{ab}{ab+1}}||\xi_k||^{\frac{2a}{ab+1}}<\infty,$$

$$\zeta>\frac{ab+1}{2a^2b}.$$

## 5. Приклади моделей випадкових процесів з просторів $D_{V,W}$

У даному розділі ми будемо розглядати процеси вигляду

$$X(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\varphi_k(t),$$

де $\xi_k\in D_{V,W}$, на проміжку $[0,T]$.

**Приклад 1.** Нехай процес $X(t)$ може бути представлений у вигляді

$$X(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{2}\xi_k\sin(\pi kt)$$

Для цього процесу

$$\sup_{|t-s|<h}|\phi_k(t)-\phi_k(s)|=\sup_{|t-s|<h}|\sin(\pi kt)-\sin(\pi ks)|\le$$

$$\leq 2\left|\sin\left(\frac{\pi kh}{2}\right)\right| \leq \pi kh,$$

тобто $C_k = \pi k$, $\zeta = 1$, і $\frac{ab+1}{2a^2b} < 1$. Це досягаєтсья для $a \in (1/4 + \sqrt{1/16 + 1/2b}, +\infty)$. Для цього ж процесу

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} ||\xi_k||^{\frac{2a}{ab+1}} \inf_{t\in[0,T]} |\sin(\pi kt)|^{\frac{ab}{ab+1}} = 0,$$

$$\varepsilon_0 = \sup_{t,s\in[0,T]} ||X(t) - X(s)|| \leq \sup_{t,s\in[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} ||\xi_k(\sin(\pi kt) - \sin(\pi ks))||^{\frac{2a}{ab+1}}\right)^{\frac{ab+1}{2a}} \leq$$

$$\leq 2^{3b/4} \left(\sum_{k=1}^{\infty} ||\xi_k||^{\frac{2a}{ab+1}}\right)^{\frac{ab+1}{2a}},$$

$$\Delta_0 = 2^{\frac{3ab}{2ab+2}} \sum_{k=1}^{\infty} ||\xi_k||^{\frac{2a}{ab+1}}.$$

Підрахувавши ці значення та обравши необхідні значення точності æ, надійності $1-\nu$ та сталої $\theta$ із нерівності

$$\nu \geq \frac{1}{\text{æ}^{ab}} \left( \frac{2a^2bT^{1/2a}\left(\theta^{\frac{2a}{ab+1}} 2^{\frac{3ab}{2ab+2}} \sum_{k=1}^{\infty} ||\xi_k||^{\frac{2a}{ab+1}}\right)^{1-\frac{1+ab}{2a^2b}}}{\theta^{\frac{2a}{ab+1}}(1-\theta^{\frac{2a}{ab+1}})(2a-ab-1)} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} ||\xi_k||^{\frac{2a}{ab+1}} (\pi k)^{\frac{ab}{ab+1}}\right)^{\frac{ab+1}{2a^2b}} + \frac{2^{\frac{3ab}{2ab+2}} \sum_{k=1}^{\infty} ||\xi_k||^{\frac{2a}{ab+1}}}{1-\theta^{\frac{2a}{ab+1}}} \right)$$

за умови

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\pi k)^{\frac{ab}{ab+1}} ||\xi_k||^{\frac{2a}{ab+1}} < \infty$$

знаходимо необхідне нам значення $N$.

Для випадку $X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2}\xi_k \cos(\pi kt)$ отримуємо ті ж самі умови, що і для розкладу за синусами.

**Приклад 2.** Нехай $X(t)$, - випадковий процес, який можна зобразити у вигляді

$$X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k (A_k \sin(B_k t) + C_k \cos(D_k t)),$$

де $A_k > 0, C_k > 0$. В даному випадку

$$\sup_{|t-s|<h} |(A_k \sin(B_k t) + C_k \cos(D_k t)) - (A_k \sin(B_k s) + C_k \cos(D_k s))| =$$

$$= \sup_{|t-s|<h} |2A_k \sin(B_k \frac{t-s}{2}) \sin(B_k \frac{t+s}{2}) - 2C_k \sin(D_k \frac{t-s}{2}) \sin(D_k \frac{t+s}{2})|$$

Так як $\sin x \leq x^\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, то

$$\sup_{|t-s|<h} |2A_k \sin(B_k \frac{t-s}{2}) \sin(B_k \frac{t+s}{2}) - 2C_k \sin(D_k \frac{t-s}{2}) \sin(D_k \frac{t+s}{2})| \leq$$

$$\leq 2A_k |\sin(B_k h/2)| + 2C_k |\sin(D_k h/2)| \leq 2^{1-\alpha}(A_k B_k^\alpha + C_k D_k^\alpha) h^\alpha.$$

Інтеграл збіжний, якщо $\frac{ab+1}{2a^2b} < \alpha$, тобто коли $a \in (\frac{1}{4\alpha} + \frac{\sqrt{8\alpha b + b^2}}{4\alpha b}, +\infty)$. Позначимо також $E_k := 2^{1-\alpha}|A_k B_k^\alpha + C_k D_k^\alpha|$. В даному випадку, $inf_{t\in[0,T]}||\tilde{X}_N||$ та $\Delta_0$ залежать від коефіцієнтів та не можуть бути обраховані явно, тому, обравши надійність $1-\nu$, точність æ та сталу $\theta$, маємо

$$\nu \geq \frac{1}{æ^{ab}} \left( \inf_{t\in[0,T]} ||\tilde{X}_N(t)||^{\frac{2a}{ab+1}} + \frac{T^{1/2a}\left(\sum_{k=N+1}^{\infty} ||\xi_k||^{\frac{2a}{ab+1}} E_k^{\frac{ab}{ab+1}}\right)^{\frac{ab+1}{2a^2b\alpha}}}{\theta^{\frac{2a}{ab+1}}(1-\theta^{\frac{2a}{ab+1}})} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{2a^2b\alpha(\Delta_0 p)^{1-\frac{1+ab}{2a^2b\alpha}}}{2a\alpha - ab - 1} + \frac{\Delta_0 p}{1-\theta^{\frac{2a}{ab+1}}} \right).$$

З даної нерівності при умові

$$\sum_{k=1}^{\infty} E_k^{\frac{ab}{ab+1}} ||\xi_k||^{\frac{2a}{ab+1}} < \infty$$

можна визначити $N$.

## Література


1. Ю.В. Козаченко, О.М. Моклячук, *Випадкові процеси у просторах $D_{V,W}$*, Теорія ймовірностей та математична статистика **82** (2010)
2. V.V. Buldygin, Yu.V. Kozachenko, *Metric characterization of Random Variables and Random Processes*, Translations of Mathematical Monographs volume 188, "AMS Publishing", Providence, Rhode Island, 2000.
3. Yu.V. Kozachenko, *Distribution of the Supremum of Random Processes From Quasi-Banach $K_\sigma$-spaces*, Ukrainian Mathematical Journal **51** (1999), №7, 1029–1043.
4. В.В. Булдыгин, *Сходимость случайных элементов в топологических пространствах*, "Наукова Думка", Київ, 1980.
5. E.A. Abzhanov and Yu.V. Kozachenko, *Specific properties of random processes in Banach $K_\sigma$-spaces*, Ukrainian Mathematical Journal **37** (1985), №3, 275–280.
6. Е.А. Абжанов, Ю.В. Козаченко, *Случайные процессы в $K_\sigma$-пространствах случайных величин*, Вероятностные методы исследования систем с бесконечным числом степеней свободы (А.В. Скороход, ред.), "Академія наук УССР, Інститут математики", Київ, 1986, стор. 4–11.
7. Yu.V. Kozachenko, *Random processes in Orlicz spaces*, Probability Theory and Mathematical Statistics **30** (1984), 92–107, **31** (1984), 44–50


Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Національний університет ім. Тараса Шевченка, проспект Глушкова, 6, Київ 03127, Україна

*Адреса електронної пошти*: yvk@univ.kiev.ua

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Національний університет ім. Тараса Шевченка, проспект Глушкова, 6, Київ 03127, Україна

*Адреса електронної пошти*: omoklyachuk@ukr.net

Надійшла 19/07/2010