Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 83, 2010, стор. 92–105

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 83, 2010, pp. 92–105

НЕПЕРЕРВНА ЗАЛЕЖНІСТЬ ВІД ПАРАМЕТРУ РОЗВ'ЯЗКІВ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ, КЕРОВАНИХ СТАНДАРТНИМ ТА ДРОБОВИМ БРОУНІВСЬКИМ РУХАМИ

УДК 519.21

Ю. С. МІШУРА, С. В. ПОСАШКОВА І С. В. ПОСАШКОВ

Анотація. У статті розглядається стохастичне диференціальне рівняння, кероване стандартним та дробовим броунівським рухами, з неоднорідними коефіцієнтами та випадковою початковою умовою. Припускається, що коефіцієнти та початкова умова залежать від параметру. Встановлено умови на коефіцієнти та початкове значення, за яких розв'язок стохастичного диференціального рівняння неперервно залежить від параметру.

Abstract. In this paper we consider stochastic differential equation involving both Wiener process and fractional Brownian motion, with nonhomogeneous coefficients and random initial condition. Coefficients and initial condition depend on a parameter. We establish conditions on coefficients and initial condition supplying that solution continuously depends on a parameter.

Аннотация. В статье рассматривается стохастическое дифференциальное уравнение, управляемое стандартным и дробным броуновским движениями, с неоднородными коэффициентами и случайным начальным условием. Предполагается, что коэффициенты и начальное условие зависят от параметра. Найдены условия на коэффициенты и начальное условие, при которых решение стохастического дифференциального уравнения непрерывно зависит от параметра.

1. Вступ

Предметом дослідження даної роботи є наступне стохастичне диференціальне рівняння з коефіцієнтами, що залежать від параметру, визначене на повному стохастичному базисі $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t, t \in [0,T]), \mathbb{P})$:

$$X_t^u = X_0^u + \int_0^t a^u(s, X_s^u)ds + \int_0^t b^u(s, X_s^u)dW_s + \int_0^t c^u(s, X_s^u)dB_s^H, \quad t \in [0,T], \quad (1)$$

де X_0^u є $\mathcal{F}_0$-вимірною випадковою величиною, $\mathbb{E}(X_0^u)^2 < \infty$, для всіх $u \in [0, u_0]$, $W = (W_t, \mathcal{F}_t, t \in [0,T])$ — стандартний броунівський рух, $B^H = (B_t^H, \mathcal{F}_t, t \in [0,T])$ — дробовий броунівський рух з параметром Хюрста $H \in (1/2, 1)$. Коефіцієнти $a^u, b^u, c^u : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є невипадковими вимірними функціями.

При $H \in (3/4, 1)$ в [2] були встановлені умови на коефіцієнти, за яких стохастичне диференціальне рівняння

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s, X_s)ds + \int_0^t b(s, X_s)dW_s + \int_0^t c(s, X_s)dB_s^H, \quad t \in [0,T], \quad (2)$$

має єдиний розв'язок з траєкторіями з простору типу Бєсова і доведено, що розв'язок є гельдеровим будь-якого порядку, що менше $1/2$. При $H \in (1/2, 3/4]$ ми будемо апріорі припускати існування розв'язку (2) з властивостями, які виведені при $H \in (3/4, 1)$. Повертаючись до рівняння, залежного від параметру, відмітимо, що

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60G22; Secondary 60H10.

Ключові слова і фрази. Дробовий броунівський рух, вінерівський процес, стохастичне диференціальне рівняння, неперервність за параметром.

ми будемо вимагати, щоб при кожному значенні параметру з множини визначення стохастичне диференціальне рівняння мало єдиний розв'язок з траєкторіями з простору типу Бєсова, і щоб розв'язок був гельдеровим будь-якого порядку, що менше 1/2. Для такого рівняння встановлюються умови на коефіцієнти та початкову умову як функцій параметру, за яких має місце збіжність за ймовірністю розв'язку як функції параметру до розв'язку стохастичного диференціального рівняння, у якого коефіцієнти та початкова умова отримані з коефіцієнтів та початкової умови вихідного рівняння граничним переходом по параметру.

В першому розділі основної частини даної роботи наведено деякі результати стосовно існування та єдиності розв'язку стохастичного диференціального рівняння, керованого стандартним та дробовим броунівським рухами.

В другому розділі знайдено умови, за яких розв'язок стохастичного диференціального рівняння, керованого стандартним та дробовим броунівським рухами, з неоднорідними коефіцієнтами та випадковою початковою умовою неперервно залежить від параметру.

2. Існування та єдиність розв'язку

Розглядається наступне стохастичне диференціальне рівняння з неоднорідними коефіцієнтами, визначене на повному стохастичному базисі $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t, t \in [0,T]), \mathbb{P})$:

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s, X_s)ds + \int_0^t b(s, X_s)dW_s + \int_0^t c(s, X_s)dB_s^H, \quad t \in [0,T], \tag{3}$$

де X_0 є $\mathcal{F}_0$-вимірною випадковою величиною, $\mathbb{E}X_0^2 < \infty$, $W = (W_t, \mathcal{F}_t, t \in [0,T])$ – стандартний броунівський рух (СБР), $B^H = (B_t^H, \mathcal{F}_t, t \in [0,T])$ дробовий броунівський рух (ДБР) з параметром Хюрста $H \in (1/2, 1)$. Коефіцієнти $a, b, c : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є детермінованими вимірними функціями.

Припустимо, що виконуються наступні умови:

(A) Існує така стала $A > 0$, що $|a(t,x)| \le A$, $|b(t,x)| \le A$, $|c(t,x)| \le A$ для всіх $t \in [0,T]$ та $x \in \mathbb{R}$.

(B) Існує така стала $L > 0$, що

$$(a(t,x) - a(t,y))^2 + (b(t,x) - b(t,y))^2 + (c(t,x) - c(t,y))^2 \le L^2(x-y)^2,$$

для всіх $t \in [0,T]$ та $x, y \in \mathbb{R}$.

(C) Функція $c(t,x)$ є диференційованою по x, та існують сталі $B > 0$ і $\beta \in (1-H, 1)$, такі що для всіх $s, t \in [0,T]$ та $x \in \mathbb{R}$

$$|c(s,x) - c(t,x)| + |\partial_x c(s,x) - \partial_x c(t,x)| \le B|s-t|^{\beta}.$$

(D) Гельдерова неперервність $\partial_x c(t,x)$ по x :

$$|\partial_x c(t,x) - \partial_x c(t,y)| \le D|x-y|^{\rho}, \tag{4}$$

для всіх $t \in [0,T]$ та $x, y \in \mathbb{R}$, параметр $\rho \in (3/2 - H, 1)$ фіксовано.

Розглянемо для деякого $1 - H < \alpha < \min(\beta, \rho/2, \rho - 1/2)$ простір типу Бєсова

$$W_\alpha([0,T]) := \{Y = Y_t(\omega) : (t,\omega) \in [0,T] \times \Omega, ||Y||_\alpha < \infty\} \tag{5}$$

з нормою

$$||Y||_\alpha^2 := \sup_{t \in [0,T]} \left(\mathbb{E}(Y_t)^2 + \mathbb{E}\left(\int_0^t \frac{|Y_t - Y_s|}{(t-s)^{1+\alpha}} ds \right)^2 \right). \tag{6}$$

Наступну теорему було доведено для $H \in (3/4, 1)$, але всі подальші викладки справедливі і при $H \in (1/2, 3/4]$.

Теорема 1. *([2]) Стохастичне диференціальне рівняння* (3) *має єдиний розв'язок на інтервалі* $[0,T]$ *з траєкторіями у* $W_\alpha([0,T])$ *і розв'язок є гельдеровим будь-якого порядку, що менше* $1/2$.

3. Збіжність розв'язків за ймовірністю

Розглянемо тепер стохастичне диференціальне рівняння вигляду (3), яке залежить від параметру $u \in [0, u_0]$:

$$X_t^u = X_0^u + \int_0^t a^u(s, X_s^u)ds + \int_0^t b^u(s, X_s^u)dW_s + \int_0^t c^u(s, X_s^u)dB_s^H, \quad t \in [0,T], \quad (7)$$

де X_0^u є $\mathcal{F}_0$-вимірною випадковою величиною, $\mathbb{E}(X_0^u)^2 < \infty$, для всіх $u \in [0, u_0]$, $W = (W_t, \mathcal{F}_t, t \in [0,T])$ — СБР, $B^H = (B_t^H, \mathcal{F}_t, t \in [0,T])$ — ДБР з параметром Хюрста $H \in (1/2, 1)$. Коефіцієнти $a^u, b^u, c^u : [0,T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ є детермінованими вимірними функціями. Припустимо, що коефіцієнти цього рівняння задовольняють умови, що є аналогами умов $(A) - (D)$:

(A1) Існує така стала $A > 0$, що $|a^u(t,x)| \le A$, $|b^u(t,x)| \le A$, $|c^u(t,x)| \le A$ для всіх $t \in [0,T]$ та $x \in \mathbb{R}$.

(B1) Існує така стала $L > 0$, що

$$(a^u(t,x) - a^u(t,y))^2 + (b^u(t,x) - b^u(t,y))^2 + (c^u(t,x) - c^u(t,y))^2 \le L^2(x-y)^2,$$

для всіх $t \in [0,T]$ та $x, y \in \mathbb{R}$.

(C1) Функція $c^u(t,x)$ є диференційованою по x, та існують сталі $B > 0$ і $\beta \in (1-H, 1)$, такі що для всіх $s, t \in [0,T]$ та $x \in \mathbb{R}$

$$|c^u(s,x) - c^u(t,x)| + |\partial_x c^u(s,x) - \partial_x c^u(t,x)| \le B|s-t|^\beta.$$

(D1) Гельдерова неперервність $\partial_x c^u(t,x)$ по x :

$$|\partial_x c^u(t,x) - \partial_x c^u(t,y)| \le D|x-y|^\rho, \quad (8)$$

для всіх $t \in [0,T]$ та $x, y \in \mathbb{R}$, параметр $\rho \in (3/2 - H, 1)$ фіксовано.

При $H \in (3/4, 1)$ до рівняння (7) застосуємо теорему 1, а при $H \in (1/2, 3/4]$ вважаємо, що рівняння має розв'язок, який є є гельдеровим будь-якого порядку, що менше $1/2$.

Далі $\alpha \in (0,1)$. Розглянемо простір $W_0^{\alpha,1}(0,T)$ вимірних функцій $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ таких, що

$$\int_0^T \frac{|f(t)|}{t^\alpha}dt + \int_0^T \int_0^t \frac{|f(t) - f(s)|}{(t-s)^{1+\alpha}}dsdt < +\infty. \quad (9)$$

Ліво-сторонні та право-сторонні дробові інтеграли Рімана-Ліувілля порядку α від функції $f \in L^1(0,T)$ визначені для майже всіх $t \in (0,T)$ наступним чином ([4]):

$$I_{0+}^\alpha f(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t f(s)(t-s)^{\alpha-1}ds,$$

$$I_{T-}^\alpha f(t) := \frac{(-1)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_t^T f(s)(s-t)^{\alpha-1}ds.$$

Нехай $I_{0+}^\alpha(L^1(0,T))$ ($I_{T-}^\alpha(L^1(0,T))$) — образ $L^1(0,T)$ під дією оператора I_{0+}^α (I_{T-}^α). Обмеження функції $f \in W_0^{\alpha,1}(0,T)$ на $(0,t)$ належить до простору $I_{0+}^\alpha(L^1(0,t))$ для майже всіх t. Якщо $f \in I_{0+}^\alpha(L^1)$ ($f \in I_{T-}^\alpha(L^1)$) та $0 < \alpha < 1$, тоді похідні Вейля ([4])

$$D_{0+}^\alpha f(t) := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{f(t)}{t^\alpha} + \alpha \int_0^t \frac{f(t) - f(s)}{(t-s)^{\alpha+1}}ds \right) \mathbb{I}_{(0,T)}(t),$$

$$D_{T-}^\alpha f(t) := \frac{(-1)^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{f(t)}{(T-t)^\alpha} + \alpha \int_t^T \frac{f(t) - f(s)}{(s-t)^{\alpha+1}}ds \right) \mathbb{I}_{(0,T)}(t)$$

визначено для майже всіх $t \in (0,T)$. Збіжність інтегралів у точці сингулярності $t = s$ є поточковою для майже всіх $t \in (0,T)$. Надалі будемо позначати $f_{a+}(x) = (f(x) - f(a+))I_{(a,b)}(x)$ та $f_{b-}(x) = (f(b-) - f(x))I_{(a,b)}(x)$.

В роботі [1] доведено наступну лему:

Лема 1. *Нехай $B^H = (B^H_t, \mathcal{F}_t, t \in [0,T])$ – дробовий броунівський рух (ДБР) з параметром Хюрста $H \in (1/2, 1)$. Якщо $1 - H < \alpha < 1/2$, тоді*

$$\mathbb{E} \sup_{0 \le s \le t \le T} |D^{1-\alpha}_{t-} B^H_{t-}(s)|^p < \infty$$

для всіх $T > 0$ та $p \in [1, \infty)$.

З леми 1 випливає, що якщо функція f належить до класу $W_0^{\alpha,1}(0,T)$ з $1 - H < \alpha < 1/2$, і задовольняє нерівність (9), то справедлива формула потраєкторного інтегралу $\int_0^t f(s)dB^H_s$ зі статті [1]:

$$\int_0^t f(s)dB^H_s = \int_0^t D^\alpha_{0+} f(s) D^{1-\alpha}_{t-} B^H_{t-}(s)ds.$$

Цей інтеграл можна оцінити наступним чином

$$\left|\int_0^t f(s)dB^H_s\right| \le C_t(\omega)\left(\int_0^t \frac{|f(s)|}{s^\alpha}ds + \int_0^t \int_0^r \frac{|f(r) - f(u)|}{(r-u)^{1+\alpha}}dudr\right), \tag{10}$$

де

$$C_t(\omega) = \sup_{0 \le u \le s \le t} |D^{1-\alpha}_{s-} B^H_{s-}(u)| < \infty.$$

В книзі [2], розділ 3.2, доведено, що процес $C_t(\omega)$ мажорується наступним чином:

$$C_t(\omega) \le C_\varepsilon \psi_t,$$

де випадковий процес ψ_t має вигляд

$$\psi_t := \left(\int_0^t \int_0^t \frac{|B^H_w - B^H_v|^{2/\varepsilon}}{|w - v|^{2H/\varepsilon}}dwdv\right)^{\varepsilon/2}. \tag{11}$$

для $0 < \varepsilon < H + \alpha - 1$, а C_ε – деяка стала, що залежить від ε. Очевидно, процес $(\psi_t, t \in [0,T])$ є неперервним та строго зростаючим з імовірністю 1.

Позначимо $b^u_v = b^u(v, X^u_v)$. Для довільного $0 < \delta < 1/2$ виберемо $p > \frac{1}{\delta}$ та $\varrho = \frac{1}{p}(1 + \frac{p}{2} - p\delta)$. Нехай $0 \le s \le t \le T$. Застосуємо до функції $f(t) = \int_0^t b^u_v dW_v$ нерівність Гарсіа-Родеміха-Рамсі (див., напр., [1]), яка для неперервної функції g має вигляд

$$|g(t) - g(s)|^p \le C_{\varrho,p}|t - s|^{\varrho p - 1} \int_0^t \int_0^t \frac{|g(x) - g(y)|^p}{|x - y|^{\varrho p + 1}}dxdy. \tag{12}$$

Отримаємо, використовуючи (12), що

$$\left|\int_s^t b^u_v dW_v\right| \le C_{\varrho,p}|t - s|^{\varrho - 1/p}\xi_t(b^u) \le C_{\varrho,p}|t - s|^{1/2 - \delta}\xi_t(b^u),$$

де

$$\xi_t(b^u) := \left(\int_0^t \int_0^t \frac{|\int_x^y b^u_v dW_v|^p}{|x - y|^{\varrho p + 1}}dxdy\right)^{1/p}.$$

Зауважимо, що процес $\xi_t(b^u)$ є неперервним і строго зростаючим.

Для будь-якого $R > 1$ визначимо момент зупинки $\tau^{u,0}_{R,\delta}$ за допомогою

$$\tau^{u,0}_{R,\delta} := \inf\{t : C^u_t(\omega, \delta) \ge R\} \wedge T, \tag{13}$$

де $C^u_t(\omega, \delta)$ визначено наступним чином

$$C^u_t(\omega, \delta) := \psi_t \vee \xi_t(b^u) \vee \xi_t(b^0) \vee 1. \tag{14}$$

Надалі через C будемо позначати всі сталі, які можуть залежати від T та сталих з умов $(A1) - (D1)$, і не залежать від u та R. Позначимо $\tau^u := \tau^{u,0}_{R,\delta}$.

Лема 2. *Нехай виконуються умови $(A1) - (D1)$. Тоді $\mathbb{P}(\tau^u < T)$ можна оцінити величиною, що не залежить від u та прямує до 0 при $R \to +\infty$.*

Доведення. Розглянемо при $R > 1$ наступний вираз:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\tau^u < T) &\le \mathbb{P}(\ C_T^u(\omega,\delta) \ge R) \\ &\le \mathbb{P}(\xi_T(b^u) \ge R) + \mathbb{P}\left(\xi_T(b^0) \ge R\right) + \mathbb{P}(\psi_T \ge R)\,. \end{aligned} \tag{15}$$

Зауважимо, що $\mathbb{P}(\psi_T \ge R)$ не залежить від u і прямує до 0 при $\mathbb{R} \to +\infty$, тому що процес $(\psi_t, t \in [0,T])$ має моменти будь-якого порядку.

Очевидно, $\mathbb{P}(\ \xi_T(b^u) \ge R) \le \frac{1}{R}\mathbb{E}\xi_T(b^u)$. Візьмемо деяку сталу $q > p > 1$. Тоді

$$\mathbb{E}\xi_T(b^u) \le (\mathbb{E}(\xi_T(b^u))^q)^{1/q}$$

$$= \left(\mathbb{E}\left(\int_0^T \int_0^T \frac{|\int_x^y b_v^u dW_v|^p}{|x-y|^{\varrho p+1}} dxdy\right)^{q/p}\right)^{1/q}$$

$$\le \left(\int_0^T \int_0^T \frac{\mathbb{E}|\int_x^y b_v^u dW_v|^q dxdy}{|x-y|^{(\varrho p+1-\theta)q/p}}\right)^{1/q} \left(\int_0^T \int_0^T \frac{dxdy}{|x-y|^{\theta\frac{q}{q-p}}}\right)^{(q-p)/(qp)},$$

де ми вибираємо $\theta \in (1 - p/q + p(\varrho - 1/2), 1 - p/q)$ (зауважимо, що $\varrho \le 1/2$). Тому $\theta\frac{q}{q-p} < 1$, та другий інтеграл збігається та є обмеженим деякою сталою на $[0,T]$. Перший інтеграл за допомогою нерівності Буркхолдера може бути оцінений величиною

$$\begin{aligned} C\left(\int_0^T \int_0^T \frac{\mathbb{E}|\int_x^y (b_v^u)^2 dv|^{q/2} dxdy}{|x-y|^{(\varrho p+1-\theta)q/p}}\right)^{1/q} &\le CA\left(\int_0^T \int_0^T |x-y|^{q/2-(\varrho p+1-\theta)q/p}\right)^{1/q} \\ &\le CA, \end{aligned}$$

оскільки $q/2 - (\varrho p + 1 - \theta)q/p > q/2 - (\varrho p + 1 - 1 + p/q - p(\varrho - 1/2))q/p = -1$. Тому $\mathbb{P}(\xi_T(b^u) \ge R) \le R^{-1}CA$ і оцінка не залежить від параметру u. Аналогічно доводиться, що $\mathbb{P}\left(\xi_T(b^0) \ge R\right) \le R^{-1}CA$. □

Далі буде потрібен наступний результат, який є модифікацією леми 7.1 з [1]. Модифікація полягає в тому, що просторова змінна береться з $\mathbb{R}$, а не з обмеженої кулі; доведення цього твердження є цілком аналогічним до доведення вихідної леми.

Лема 3. *Нехай $\sigma : [0,T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ — така функція, що $\sigma(t,x)$ — диференційована по x, існують деякі сталі $0 < \beta, \delta \le 1$ і існують сталі $M_0, M > 0$, такі, що мають місце наступні властивості:*

1) *Ліпшіцевість по x: для всіх $t \in [0,T]$ та $x, y \in \mathbb{R}$*

$$|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \le M_0|x-y|.$$

2) *Гельдеровість по x: для всіх $t \in [0,T]$ та $x, y \in \mathbb{R}$*

$$|\partial_x\sigma(t,x) - \partial_x\sigma(t,y)| \le M|x-y|^\delta.$$

3) *Гельдеровість по t: для всіх $t, s \in [0,T]$ та $x \in \mathbb{R}$*

$$|\sigma(t,x) - \sigma(s,x)| + |\partial_x\sigma(t,x) - \partial_x\sigma(s,x)| \le M_0|t-s|^\beta.$$

Тоді для всіх $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} &|\sigma(t_1,x_1) - \sigma(t_2,x_2) - \sigma(t_1,x_3) + \sigma(t_2,x_4)| \\ &\le M_0|x_1 - x_2 - x_3 + x_4| + M_0|x_1 - x_3||t_2 - t_1|^\beta \\ &+M|x_1 - x_3|(|x_1 - x_2|^\delta + |x_3 - x_4|^\delta). \end{aligned}$$

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* $(A1)-(D1)$. *Позначимо*

$$d^u(t,x) := c^u(t,x) - c^0(t,x), \quad t \in [0,T], \quad x \in \mathbb{R} \quad u \in [0,u_0].$$

Припустимо, що коефіцієнти рівняння (7) *задовольняють наступні співвідношення:*

(G0) $X_0^u \to X_0^0$ *за ймовірністю при* $u \to 0$.

(G1) Існують $\alpha^u > 0$, $\beta^u > 0$, $\gamma^u > 0$ *та* $\alpha < \nu_1 \le 1$ *такі, що*

$$|a^u(t,x) - a^0(t,x)| \le \alpha^u(1+|x|^{\nu_1}),$$

$$|b^u(t,x) - b^0(t,x)| \le \beta^u(1+|x|^{\nu_1}),$$

$$|c^u(t,x) - c^0(t,x)| \le \gamma^u(1+|x|^{\nu_1}),$$

для всіх $t \in [0,T]$ *та* $x \in \mathbb{R}$, *причому* $\alpha^u \to 0$, $\beta^u \to 0$, $\gamma^u \to 0$ *при* $u \to 0$.

(G2) Існують такі сталі $\varphi^u > 0$, $\varkappa^u > 0$, $\alpha < \nu_2 \le 1, \theta_1 > \alpha, \theta_2 > 2\alpha$, *що*

$$|d^u(t,x) - d^u(s,x)| \le \varphi^u |t-s|^{\theta_1}(1+|x|^{\nu_2}),$$

$$|d^u(t,x) - d^u(t,y)| \le \varkappa^u |x-y|^{\theta_2},$$

для всіх $t,s \in [0,T]$ *та* $x,y \in \mathbb{R}$, *причому* $\varphi^u \to 0$, $\varkappa^u \to 0$ *при* $u \to 0$.

Тоді послідовність розв'язків $\{X_t^u, t \in [0,T], u \in [0,u_0]\}$ *збігається до* $\{X_t^0, t \in [0,T]\}$ *рівномірно за ймовірністю при* $u \to 0$.

Доведення. Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$. Як і раніше, $\tau^u := \tau_{R,\delta}^{u,0}$. Тоді

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0,T]} |X_t^u - X_t^0| > \varepsilon\right) \le \mathbb{P}(\tau^u < T) + \mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0,T]} |X_t^u - X_t^0| > \varepsilon, \tau^u = T\right). \quad (16)$$

З леми 2 випливає, що перша ймовірність з правої частини (16) оцінюється величиною, яка не залежить від u і прямує до 0 при $R \to +\infty$.

Розглянемо другу ймовірність з правої частини (16). З урахуванням умови (G0) можна відразу вважати, що $X_0^u = X_0^0 = 0$.

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0,T]} |X_t^u - X_t^0| > \varepsilon, \tau^u = T\right) \le \mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0,T]} |X_{t\wedge\tau^u}^u - X_{t\wedge\tau^u}^0| > \varepsilon\right).$$

Використовуючи нерівність Чебишова, отримаємо

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0,T]} |X_{t\wedge\tau^u}^u - X_{t\wedge\tau^u}^0| > \varepsilon\right) \le \frac{1}{\varepsilon^2}\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]} |X_{t\wedge\tau^u}^u - X_{t\wedge\tau^u}^0|\right)^2. \quad (17)$$

Розглянемо для довільного $z \in [0,T]$ наступну суму

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,z]} |X_{t\wedge\tau^u}^u - X_{t\wedge\tau^u}^0|\right)^2 + \mathbb{E}\left(\int_0^{z\wedge\tau^u} \frac{|X_{z\wedge\tau^u}^u - X_{z\wedge\tau^u}^0 - X_s^u + X_s^0|}{(z-s)^{1+\alpha}} ds\right)^2$$
$$=: I_1^u(z) + I_2^u(z). \quad (18)$$

По-перше, для $I_1^u(z)$ має місце оцінка:

$$I_1^u(z) \le C\mathbb{E} \sup_{t\in[0,z]} \left(\int_0^{t\wedge\tau^u} (a^u(s,X_s^u) - a^0(s,X_s^0))ds \right)^2$$
$$+C\mathbb{E} \sup_{t\in[0,z]} \left(\int_0^{t\wedge\tau^u} (b^u(s,X_s^u) - b^0(s,X_s^0))dW_s \right)^2$$
$$+C\mathbb{E} \sup_{t\in[0,z]} \left(\int_0^{t\wedge\tau^u} (c^u(s,X_s^u) - c^0(s,X_s^0))dB_s^H \right)^2$$
$$=: C(I_{1,1}^u(z) + I_{1,2}^u(z) + I_{1,3}^u(z)).$$

Далі, враховуючи умову $(B1)$, отримаємо

$$I_{1.1}^u(z) \le C\mathbb{E}\left(\int_0^z |a^u(s,X_{s\wedge\tau^u}^u) - a^u(s,X_{s\wedge\tau^u}^0)|ds \right)^2$$
$$+C\mathbb{E}\left(\int_0^z |a^u(s,X_s^0) - a^0(s,X_s^0)|ds \right)^2 \le C\int_0^z \mathbb{E}\left(X_{s\wedge\tau^u}^u - X_{s\wedge\tau^u}^0\right)^2 ds$$
$$+C(\alpha^u)^2\left(\mathbb{E}\int_0^z (1+|X_s^0|^{\nu_1})^2 ds \right) \le C\int_0^z \mathbb{E}\sup_{q\in[0,s]} \left(X_{q\wedge\tau^u}^u - X_{q\wedge\tau^u}^0\right)^2 ds$$
$$+C(\alpha^u)^2\left(\mathbb{E}\int_0^T (1+|X_s^0|^{\nu_1})^2 ds \right) \le C\int_0^z I_1^u(s)ds + C(\alpha^u)^2,$$

де обмеженість $\mathbb{E}\int_0^T (1+|X_s^0|^{\nu_1})^2 ds$ випливає з теореми 1 наступним чином:

$$\mathbb{E}\int_0^T (1+|X_s^0|^{\nu_1})^2 ds \le C\int_0^T (1+(\mathbb{E}(X_s^0)^2)^{\nu_1})ds \le C\int_0^T (1+(\|X^0\|_\alpha^2)^{\nu_1})ds \le C.$$

Аналогічно

$$I_{1.2}^u(z) \le C\mathbb{E}\left(\int_0^z (b^u(s,X_{s\wedge\tau^u}^u) - b^u(s,X_{s\wedge\tau^u}^0))^2 ds \right)$$
$$+C\mathbb{E}\left(\int_0^z (b^u(s,X_s^0) - b^0(s,X_s^0))^2 ds \right)$$
$$\le C\int_0^z \mathbb{E}\left(X_{s\wedge\tau^u}^u - X_{s\wedge\tau^u}^0\right)^2 ds + C(\beta^u)^2\left(\mathbb{E}\int_0^T (1+|X_s^0|^{\nu_1})^2 ds \right)$$
$$\le C\int_0^z I_1^u(s)ds + C(\beta^u)^2.$$

Використовуючи означення моменту зупинки τ^u, оцінимо $I_{1,3}^u(z)$:

$$I_{1,3}^u(z) = \mathbb{E}\sup_{t\in[0,z]} \left(\int_0^{t\wedge\tau^u} (c^u(s,X_s^u) - c^0(s,X_s^0))dB_s^H \right)^2$$
$$\le CR^2\left(\mathbb{E}\sup_{t\in[0,z]} \left(\int_0^{t\wedge\tau^u} \frac{|c^u(s,X_s^u) - c^0(s,X_s^0)|}{s^\alpha} ds \right)^2 + \right.$$
$$\left. + \mathbb{E}\sup_{t\in[0,z]} \left(\int_0^{t\wedge\tau^u} \int_0^s \frac{|c^u(s,X_s^u) - c^0(s,X_s^0) - c^u(q,X_q^u) + c^0(q,X_q^0)|}{(s-q)^{1+\alpha}} dqds \right)^2 \right)$$
$$=: CR^2(I_{1,3,1}^u(z) + I_{1,3,2}^u(z)).$$

Далі, застосуємо нерівність Коші-Буняковського, врахуємо, що $2\alpha < 1$, і отримаємо:

$$I^u_{1,3,1}(z) \le C\mathbb{E}\sup_{t\in[0,z]}\left(\int_0^{t\wedge\tau^u}(c^u(s,X^u_s)-c^0(s,X^0_s))^2ds\right)$$

$$\le C\mathbb{E}\int_0^z\left(X^u_{s\wedge\tau^u}-X^0_{s\wedge\tau^u}\right)^2ds + C(\gamma^u)^2\left(\mathbb{E}\int_0^T(1+|X^0_s|^{\nu_1})^2ds\right)$$

$$\le C\int_0^z I^u_1(s)ds + C(\gamma^u)^2.$$

Розглянемо $I^u_{1,3,2}(z)$:

$$I^u_{1,3,2}(z) \le C\mathbb{E}\left(\int_0^z\int_0^{s\wedge\tau^u}\frac{|c^u(s,X^u_{s\wedge\tau^u})-c^u(s,X^0_{s\wedge\tau^u})-c^u(q,X^u_q)+c^u(q,X^0_q)|}{(s-q)^{1+\alpha}}dqds\right)^2$$

$$+C\mathbb{E}\sup_{t\in[0,z]}\left(\int_0^{t\wedge\tau^u}\int_0^s\frac{|c^u(s,X^0_s)-c^0(s,X^0_s)-c^u(q,X^0_q)+c^0(q,X^0_q)|}{(s-q)^{1+\alpha}}dqds\right)^2$$

$$:= C(I^u_{1,3,2,1}(z)+I^u_{1,3,2,2}(z))$$

Для оцінки $I^u_{1,3,2,1}(z)$ використаємо лему 3:

$$I^u_{1,3,2,1}(z) \le C\mathbb{E}\left(\int_0^z\int_0^{s\wedge\tau^u}\frac{|X^u_{s\wedge\tau^u}-X^0_{s\wedge\tau^u}-X^u_q+X^0_q|}{(s-q)^{1+\alpha}}dqds\right)^2$$

$$+C\mathbb{E}\left(\int_0^z\int_0^{s\wedge\tau^u}\frac{|X^u_{s\wedge\tau^u}-X^0_{s\wedge\tau^u}|(s-q)^\beta}{(s-q)^{1+\alpha}}dqds\right)^2$$

$$+C\mathbb{E}\left(\int_0^z\int_0^{s\wedge\tau^u}\frac{|X^u_{s\wedge\tau^u}-X^0_{s\wedge\tau^u}|(|X^u_{s\wedge\tau^u}-X^u_q|^\rho+|X^0_{s\wedge\tau^u}-X^0_q|^\rho)}{(s-q)^{1+\alpha}}dqds\right)^2$$

$$=: C(I^u_{1,3,2,1,1}(z)+I^u_{1,3,2,1,2}(z)+I^u_{1,3,2,1,3}(z)),$$

де

$$I^u_{1,3,2,1,1}(z) \le C\int_0^z\mathbb{E}\left(\int_0^{s\wedge\tau^u}\frac{|X^u_{s\wedge\tau^u}-X^0_{s\wedge\tau^u}-X^u_q+X^0_q|}{(s-q)^{1+\alpha}}dq\right)^2ds$$

$$\le C\int_0^z I^u_2(s)ds,$$

$$I^u_{1,3,2,1,2}(z) \le C\int_0^z s^{2(\beta-\alpha)}\mathbb{E}\left(|X^u_{s\wedge\tau^u}-X^0_{s\wedge\tau^u}|\right)^2ds \le C\int_0^z I^u_1(s)ds,$$

Аналогічно до доведення теореми 3.2.5 в книзі [3], можна встановити наступне співвідношення для кожного $u\in[0,u_0]$

$$|X^u_t-X^u_s| \le CC^u_T(\omega,\delta)\exp\{C^u_T(\omega,\delta)^{\frac{1}{1-\alpha}}\}|t-s|^{1/2-\delta_1}$$

для всіх $\delta_1\in(0,1/2)$, де процес $C^u_t(\omega,\delta)$ визначено співвідношенням (14). Враховуючи, що ми знаходимося в умовах, коли $\tau^u = T \ge z$, отримаємо $C^u_T(\omega,\delta) \le R$. Тому

$$|X^u_t-X^u_s| \le CR\exp\{R^{\frac{1}{1-\alpha}}\}|t-s|^{1/2-\delta_1}.$$

Тоді

$$I^u_{1.3.2.1.3}(z) \le \mathbb{E}\left(\int_0^z \int_0^{s\wedge\tau^u} \frac{|X^u_{s\wedge\tau^u} - X^0_{s\wedge\tau^u}|(2R^\rho \exp\{\rho R^{\frac{1}{1-\alpha}}\}|s-q|^{\rho(1/2-\delta_1)})}{(s-q)^{1+\alpha}} dqds\right)^2$$

$$\le CR^{2\rho}\exp\{2\rho R^{\frac{1}{1-\alpha}}\}\int_0^z s^{\rho-2\rho\delta_1-2\alpha}\mathbb{E}(|X^u_{s\wedge\tau^u} - X^0_{s\wedge\tau^u}|)^2 ds$$
$$\le CR^{2\rho}\exp\{2\rho R^{\frac{1}{1-\alpha}}\}\int_0^z I^u_1(s)ds,$$

де ми вибираємо δ_1 таким чином, що $\rho - 2\rho\delta_1 - 2\alpha > 0$. Це можливо, бо $\alpha < \rho - 1/2$ та, відповідно $\rho - 2\alpha > 1/2 - \alpha > 0$.

Розглянемо $I^u_{1.3.2.2}(z)$. Маємо

$$I^u_{1.3.2.2}(z) = \mathbb{E}\sup_{t\in[0,z]}\left(\int_0^{t\wedge\tau^u}\int_0^s \frac{|d^u(s,X^0_s) - d^u(q,X^0_q)|}{(s-q)^{1+\alpha}}dqds\right)^2$$
$$\le C\mathbb{E}\sup_{t\in[0,z]}\left(\int_0^{t\wedge\tau^u}\int_0^s \frac{|d^u(s,X^0_s) - d^u(s,X^0_q)|}{(s-q)^{1+\alpha}}dqds\right)^2$$
$$+C\mathbb{E}\sup_{t\in[0,z]}\left(\int_0^{t\wedge\tau^u}\int_0^s \frac{|d^u(s,X^0_q) - d^u(q,X^0_q)|}{(s-q)^{1+\alpha}}dqds\right)^2$$
$$\le C\mathbb{E}\sup_{t\in[0,z]}\left(\int_0^{t\wedge\tau^u}\int_0^s \frac{\varkappa^u|X^0_s - X^0_q|^{\theta_2}}{(s-q)^{1+\alpha}}dqds\right)^2$$
$$+C\mathbb{E}\sup_{t\in[0,z]}\left(\int_0^{t\wedge\tau^u}\int_0^s \frac{\varphi^u(s-q)^{\theta_1}(1+|X^0_q|^{\nu_2})}{(s-q)^{1+\alpha}}dqds\right)^2$$
$$\le C(\varkappa^u)^2R^{2\theta_2}\exp\{2\theta_2R^{\frac{1}{1-\alpha}}\}\mathbb{E}\left(\int_0^T\int_0^s \frac{(s-q)^{\theta_2(1/2-\delta_1)}}{(s-q)^{1+\alpha}}dqds\right)^2$$
$$+C(\varphi^u)^2\mathbb{E}\left(\int_0^T\int_0^s \frac{(1+|X^0_q|^{\nu_2})}{(s-q)^{1+\alpha-\theta_1}}dqds\right)^2 \le C(\varkappa^u)^2R^{2\theta_2}\exp\{2\theta_2R^{\frac{1}{1-\alpha}}\}$$
$$+C(\varphi^u)^2\mathbb{E}\left(\int_0^T(1+|X^0_q|^{\nu_2})(t-q)^{\theta_1-\alpha}dq\right)^2 \le C(\varkappa^u)^2R^{2\theta_2}\exp\{2\theta_2R^{\frac{1}{1-\alpha}}\} + C(\varphi^u)^2,$$

де δ_1 має ще задовольняти умову $\theta_2(1/2-\delta_1)-\alpha > 0$. Це можливо, оскільки $\theta_2 > 2\alpha$.

Отже,

$$I^u_1(z) \le C(\alpha^u)^2 + C(\beta^u)^2 + CR^2(\gamma^u)^2$$
$$+CR^{2+2\theta_2}\exp\{2\theta_2R^{\frac{1}{1-\alpha}}\}(\varkappa^u)^2 + CR^2(\varphi^u)^2$$
$$+CR^{2+2\rho}\exp\{2\rho R^{\frac{1}{1-\alpha}}\}\int_0^z I^u_1(s)ds + CR^2\int_0^z I^u_2(s)ds. \tag{19}$$

Повернімося до $I_2^u(z)$. Ця функція задовольняє наступну оцінку

$$I_2^u(z) \le C\left(\mathbb{E}\left(\int_0^{z\wedge\tau^u} \frac{\int_s^{z\wedge\tau^u}(a^u(q,X_q^u)-a^0(q,X_q^0))dq}{(z-s)^{1+\alpha}}ds\right)^2\right.$$
$$+\mathbb{E}\left(\int_0^{z\wedge\tau^u} \frac{\int_s^{z\wedge\tau^u}(b^u(q,X_q^u)-b^0(q,X_q^0))dW_q}{(z-s)^{1+\alpha}}ds\right)^2$$
$$\left.+\mathbb{E}\left(\int_0^{z\wedge\tau^u} \frac{\int_s^{z\wedge\tau^u}(c^u(q,X_q^u)-c^0(q,X_q^0))dB_q^H}{(z-s)^{1+\alpha}}ds\right)^2\right)$$
$$=: C(I_{2,1}^u(z)+I_{2,2}^u(z)+I_{2,3}^u(z)).$$

Оцінимо $I_{2,1}^u(z)$:

$$I_{2,1}^u(z) \le C\mathbb{E}\left(\int_0^{z\wedge\tau^u} \frac{\int_s^{z\wedge\tau^u}(a^u(q,X_q^u)-a^u(q,X_q^0))dq}{(z-s)^{1+\alpha}}ds\right)^2$$
$$+C\mathbb{E}\left(\int_0^{z\wedge\tau^u} \frac{\int_s^{z\wedge\tau^u}(a^u(q,X_q^0)-a^0(q,X_q^0))dq}{(z-s)^{1+\alpha}}ds\right)^2 = C(I_{2,1,1}^u(z)+I_{2,1,2}^u(z)).$$

Розглянемо для деякого γ такого, що $0<\alpha<\gamma<1/2$ наступні оцінки

$$I_{2,1,1}^u(z) = \mathbb{E}\left(\int_0^{z\wedge\tau^u} \frac{\int_s^{z\wedge\tau^u}(a^u(q,X_q^u)-a^u(q,X_q^0))dq}{(z-s)^{1+\alpha-\gamma}(z-s)^{\gamma}}ds\right)^2$$
$$\le C\mathbb{E}\int_0^{z\wedge\tau^u} \frac{(z-s)\int_0^{z\wedge\tau^u}|X_q^u-X_q^0|^2dq}{(z-s)^{2+2\alpha-2\gamma}}ds$$
$$\le C\int_0^z (X_{s\wedge\tau^u}^u - X_{s\wedge\tau^u}^0)^2 ds \le C\int_0^z I_1^u(s)ds.$$

Аналогічно,

$$I_{2.1,2}^u(z) \le \mathbb{E}\left(\int_0^{z\wedge\tau^u} \frac{\int_s^{z\wedge\tau^u}(\alpha^u(1+|X_q^0|^{\nu_1}))dq}{(z-s)^{1+\alpha}}ds\right)^2$$
$$\le C(\alpha^u)^2\left(\int_0^z \frac{(z-s)\int_s^z \mathbb{E}(1+|X_q^0|^{\nu_1})^2dq}{(z-s)^{2+2\alpha-2\gamma}}ds\right) \le C(\alpha^u)^2.$$

Оцінимо $I_{2,2}^u(z)$:

$$I_{2,2}^u(z) \le C\mathbb{E}\int_0^{z\wedge\tau^u} \frac{\int_s^{z\wedge\tau^u}(b^u(q,X_q^u)-b^0(q,X_q^0))^2dq}{(z-s)^{2+2\alpha-2\gamma}}ds$$
$$\le C\mathbb{E}\int_0^{z\wedge\tau^u} \frac{\int_s^{z\wedge\tau^u}(b^u(q,X_q^u)-b^u(q,X_q^0))^2dq}{(z-s)^{2+2\alpha-2\gamma}}ds$$
$$+C\mathbb{E}\int_0^{z\wedge\tau^u} \frac{\int_s^{z\wedge\tau^u}(b^u(q,X_q^0)-b^0(q,X_q^0))^2dq}{(z-s)^{2+2\alpha-2\gamma}}ds$$
$$=: C(I_{2,2,1}^u(z)+I_{2.2,2}^u(z)).$$

$$I_{2,2,1}^u(z) \le C\mathbb{E}\int_0^z \frac{\int_s^z (X_{q\wedge\tau}^u - X_{q\wedge\tau}^0)^2dq}{(z-s)^{2+2\alpha-2\gamma}}ds \le C\int_0^z \frac{I_1^u(q)}{(z-q)^{1+2\alpha-2\gamma}}dq$$

$$I^u_{2,2,2}(z) \le \mathbb{E}\int_0^{z\wedge\tau^u} \frac{\int_s^{z\wedge\tau^u}((\beta^u)^2(1+|X^0_q|^{\nu_1})^2)dq}{(z-s)^{2+2\alpha-2\gamma}}ds$$
$$\le C(\beta^u)^2\int_0^z \frac{\int_s^z \mathbb{E}(1+|X^0_q|^{\nu_1})^2dq}{(z-s)^{2+2\alpha-2\gamma}}ds \le C(\beta^u)^2.$$

Розглянемо $I^u_{2,3}(z)$:

$$I^u_{2,3}(z) \le CR^2\left(\mathbb{E}\int_0^{z\wedge\tau^u}\left(\int_s^{z\wedge\tau^u}\frac{c^u(q,X^u_q)-c^0(q,X^0_q)}{(q-s)^\alpha}dq\right)(z-s)^{-(1+\alpha)}ds\right)^2$$
$$+CR^2\left(\mathbb{E}\int_0^{z\wedge\tau^u}\left(\int_s^{z\wedge\tau^u}\int_s^q\frac{|c^u(q,X^u_q)-c^0(q,X^0_q)-c^u(v,X^u_v)+c^0(v,X^0_v)|}{(q-v)^\alpha}dvdq\right)^2\right.$$
$$\left.\times(z-s)^{-(2+2\alpha-2\gamma)}ds\right) =: CR^2(I^u_{2,3,1}(z)+I^u_{2,3,2}(z)).$$

Оцінимо доданки окремо:

$$I^u_{2,3,1}(z) \le \left(\mathbb{E}\int_0^{z\wedge\tau^u}\left(\int_s^{z\wedge\tau^u}\frac{c^u(q,X^u_q)-c^0(q,X^0_q)}{(q-s)^\alpha}dq\right)(z-s)^{-(1+\alpha)}ds\right)^2$$
$$\le \left(\mathbb{E}\int_0^{z\wedge\tau^u}(c^u(q,X^u_q)-c^0(q,X^0_q))\int_0^q\frac{1}{(q-s)^\alpha}\frac{1}{(z-s)^{1+\alpha}}dsdq\right)^2.$$

Використовуючи нерівність (4.15) із [1], отримаємо

$$I^u_{2,3,1}(z) \le C\left(\mathbb{E}\int_0^{z\wedge\tau^u}(c^u(q,X^u_q)-c^0(q,X^0_q))\frac{1}{(z-q)^{2\alpha}}dq\right)^2$$
$$\le C\mathbb{E}\int_0^{z\wedge\tau^u}\frac{(c^u(s,X^u_s)-c^0(s,X^0_s))^2}{(z-s)^{2\alpha}}ds$$
$$\le C\mathbb{E}\int_0^{z\wedge\tau^u}\frac{(c^u(s,X^u_s)-c^u(s,X^0_s))^2}{(z-s)^{2\alpha}}ds + C\mathbb{E}\int_0^{z\wedge\tau^u}\frac{(c^u(s,X^0_s)-c^0(s,X^0_s))^2}{(z-s)^{2\alpha}}ds$$
$$\le C\int_0^z\frac{I^u_1(s)}{(z-s)^{2\alpha}}ds + C(\gamma^u)^2.$$

Оцінимо $I^u_{2,3,2}(z)$:

$$I^u_{2,3,2}(z) = \mathbb{E}\int_0^{z\wedge\tau^u}\left(\int_s^{z\wedge\tau^u}\int_s^q\frac{|c^u(q,X^u_q)-c^0(q,X^0_q)-c^u(v,X^u_v)+c^0(v,X^0_v)|}{(q-v)^\alpha}dvdq\right)^2$$
$$\times(z-s)^{-(2+2\alpha-2\gamma)}ds$$
$$\le C\mathbb{E}\int_0^{z\wedge\tau^u}\left(\int_s^{z\wedge\tau^u}\int_s^q\frac{|c^u(q,X^u_q)-c^u(q,X^0_q)-c^u(v,X^u_v)+c^u(v,X^0_v)|}{(q-v)^\alpha}dvdq\right)^2$$
$$\times(z-s)^{-(2+2\alpha-2\gamma)}ds$$
$$+C\mathbb{E}\int_0^{z\wedge\tau^u}\left(\int_s^{z\wedge\tau^u}\int_s^q\frac{|c^u(q,X^0_q)-c^0(q,X^0_q)-c^u(v,X^0_v)+c^0(v,X^0_v)|}{(q-v)^\alpha}dvdq\right)^2$$
$$\times(z-s)^{-(2+2\alpha-2\gamma)}ds$$
$$=: C(I^u_{2,3,2,1}(z)+I^u_{2,3,2,2}(z)).$$

Оцінимо $I^u_{2,3,2,1}(z)$, використавши лему 3:

$$I^u_{2,3,2,1}(z) \le C\mathbb{E}\int_0^{z\wedge\tau^u}\left(\int_s^{z\wedge\tau^u}\int_s^q \frac{|X^u_q - X^0_q - X^u_v + X^0_v|}{(q-v)^{1+\alpha}}dvdq\right)^2 (z-s)^{-(2+2\alpha-2\gamma)}ds$$
$$+C\mathbb{E}\int_0^{z\wedge\tau^u}\left(\int_s^{z\wedge\tau^u}\int_s^q \frac{|X^u_q - X^0_q|(q-v)^\beta}{(q-v)^{1+\alpha}}dvdq\right)^2 (z-s)^{-(2+2\alpha-2\gamma)}ds$$
$$+C\mathbb{E}\int_0^{z\wedge\tau^u}\left(\int_s^{z\wedge\tau^u}\int_s^q \frac{|X^u_q - X^0_q|(|X^u_q - X^u_v|^\rho + |X^0_q - X^0_v|^\rho)}{(q-v)^{1+\alpha}}dvdq\right)^2$$
$$\times(z-s)^{-(2+2\alpha-2\gamma)}ds =: C(I^u_{2,3,2,1,1}(z) + I^u_{2,3,2,1,2}(z) + I^u_{2,3,2,1,3}(z)).$$

Оцінимо $I^u_{2,3,2,1,1}(z)$, враховуючи, що $2\gamma - 2\alpha > 0$:

$$I^u_{2,3,2,1,1}(z)$$
$$\le C\mathbb{E}\int_0^z\int_s^z\left(\int_s^{q\wedge\tau^u}\frac{|X^u_{q\wedge\tau^u} - X^0_{q\wedge\tau^u} - X^u_v + X^0_v|}{(q-v)^{1+\alpha}}dv\right)^2 dq(z-s)^{-(1+2\alpha-2\gamma)}ds$$
$$\le C\mathbb{E}\int_0^z\left(\int_0^{q\wedge\tau^u}\frac{|X^u_{q\wedge\tau^u} - X^0_{q\wedge\tau^u} - X^u_v + X^0_v|}{(q-v)^{1+\alpha}}dv\right)^2 dq \le C\int_0^z I^u_2(s)ds.$$

$$I^u_{2,3,2,1,2}(z) \le \mathbb{E}\int_0^{z\wedge\tau^u}\frac{\left(\int_s^{z\wedge\tau^u}|X^u_q - X^0_q|(q-s)^{\beta-\alpha}dq\right)^2}{(z-s)^{2+2\alpha-2\gamma}}ds$$
$$\le C\mathbb{E}\int_0^{z\wedge\tau^u}\frac{(z-s)^{1+2\beta-2\alpha}\int_s^{z\wedge\tau^u}(X^u_q - X^0_q)^2dq}{(z-s)^{2+2\alpha-2\gamma}}ds$$
$$\le C\mathbb{E}\int_0^z\frac{\int_s^z(X^u_{q\wedge\tau^u} - X^0_{q\wedge\tau^u})^2dq}{(z-s)^{1+4\alpha-2\beta-2\gamma}}ds \le C\int_0^z I^u_1(s)ds,$$

де остання нерівність отримана шляхом зміни порядку інтегрування та з урахуванням нерівності $2\beta + 2\gamma - 4\alpha > 0$. Тепер,

$$I^u_{2,3,2,1,3}(z)$$
$$\le CR^{2\rho}\exp\{2\rho R^{\frac{1}{1-\alpha}}\}\mathbb{E}\int_0^{z\wedge\tau^u}\left(\int_s^{z\wedge\tau^u}\int_s^q\frac{|X^u_q - X^0_q|(q-v)^{\rho(1/2-\delta_1)}}{(q-v)^{1+\alpha}}dvdq\right)^2$$
$$\times(z-s)^{-(2+2\alpha-2\gamma)}ds$$
$$\le CR^{2\rho}\exp\{2\rho R^{\frac{1}{1-\alpha}}\}\mathbb{E}\int_0^{z\wedge\tau^u}\frac{\left(\int_s^{z\wedge\tau^u}|X^u_q - X^0_q|(q-s)^{\rho(1/2-\delta_1)-\alpha}dq\right)^2}{(z-s)^{2+2\alpha-2\gamma}}ds$$
$$\le CR^{2\rho}\exp\{2\rho R^{\frac{1}{1-\alpha}}\}\mathbb{E}\int_0^{z\wedge\tau^u}\frac{(z-s)\int_0^z(X^u_{q\wedge\tau} - X^0_{q\wedge\tau})^2dq}{(z-s)^{2+2\alpha-2\gamma}}ds$$
$$\le CR^{2\rho}\exp\{2\rho R^{\frac{1}{1-\alpha}}\}\int_0^z I^u_1(s)ds,$$

де як і раніше $0 < \delta_1 < 1/2 - \alpha/\rho$ та $\alpha < \gamma < 1/2$.

Повернімося до $I^u_{2,3,2,2}(z)$:

$$I^u_{2,3,2,2}(z) = \mathbb{E}\int_0^{z\wedge\tau^u}\left(\int_s^{z\wedge\tau^u}\int_s^q \frac{|d^u(q,X^0_q)-d^u(v,X^0_v)|}{(q-v)^\alpha}dvdq\right)^2 (z-s)^{-(2+2\alpha-2\gamma)}ds$$

$$\leq C\mathbb{E}\int_0^{z\wedge\tau^u}\left(\int_s^{z\wedge\tau^u}\int_s^q \frac{|d^u(q,X^0_q)-d^u(q,X^0_v)|}{(q-v)^\alpha}dvdq\right)^2 (z-s)^{-(2+2\alpha-2\gamma)}ds$$

$$+C\mathbb{E}\int_0^{z\wedge\tau^u}\left(\int_s^{z\wedge\tau^u}\int_s^q \frac{|d^u(q,X^0_v)-d^u(v,X^0_v)|}{(q-v)^\alpha}dvdq\right)^2 (z-s)^{-(2+2\alpha-2\gamma)}ds$$

$$=: C(I^u_{2,3,2,2,1}(z)+I^u_{2,3,2,2,2}(z)).$$

$$I^u_{2,3,2,2,1}(z) \leq \mathbb{E}\int_0^{z\wedge\tau^u}\left(\int_s^{z\wedge\tau^u}\int_s^q \frac{\varkappa^u|X^0_q-X^0_v|^{\theta_2}}{(q-v)^\alpha}dvdq\right)^2 (z-s)^{-(2+2\alpha-2\gamma)}ds$$

$$\leq CR^{2\theta_2}\exp\{2\theta_2 R^{\frac{1}{1-\alpha}}\}(\varkappa^u)^2$$

$$\times\mathbb{E}\int_0^{z\wedge\tau^u}\left(\int_s^{z\wedge\tau^u}\int_s^q \frac{(q-v)^{\theta_2(1/2-\delta_1)}}{(q-v)^\alpha}dvdq\right)^2 \frac{1}{(z-s)^{2+2\alpha-2\gamma}}ds$$

$$\leq CR^{2\theta_2}\exp\{2\theta_2 R^{\frac{1}{1-\alpha}}\}(\varkappa^u)^2\mathbb{E}\int_0^{z\wedge\tau^u}\frac{\left(\int_s^{z\wedge\tau^u}(q-s)^{1+\theta_2(1/2-\delta_1)-\alpha}dq\right)^2}{(z-s)^{2+2\alpha-2\gamma}}ds$$

$$\leq CR^{\theta_2}\exp\{2\theta_2 R^{\frac{1}{1-\alpha}}\}(\varkappa^u)^2\int_0^z\frac{1}{(z-s)^{2\alpha-2\gamma}}ds \leq CR^{2\theta_2}\exp\{2\theta_2 R^{\frac{1}{1-\alpha}}\}(\varkappa^u)^2.$$

$$I^u_{2,3,2,2,2}(z) \leq \mathbb{E}\int_0^{z\wedge\tau^u}\frac{\left(\int_s^{z\wedge\tau^u}\int_s^q \frac{\varphi^u(q-v)^{\theta_1}(1+|X^0_v|^{\nu_2})}{(q-v)^\alpha}dvdq\right)^2}{(z-s)^{2+2\alpha-2\gamma}}ds$$

$$\leq C(\varphi^u)^2\int_0^z\frac{(z-s)\int_s^z\mathbb{E}(1+|X^0_v|^{\nu_2})^2dv}{(z-s)^{2+2\alpha-2\gamma}} \leq C(\varphi^u)^2.$$

Отже, враховуючи, що $\alpha<\gamma<1/2$, отримаємо

$$I^u_2(z) \leq C(\alpha^u)^2 + C(\beta^u)^2 + CR^2(\gamma^u)^2 + CR^{2+2\theta_2}\exp\{2\theta_2 R^{\frac{1}{1-\alpha}}\}(\varkappa^u)^2$$
$$+CR^2(\varphi^u)^2 + CR^{2+2\rho}\exp\{2\rho R^{\frac{1}{1-\alpha}}\}\int_0^z\frac{I^u_1(s)}{(z-s)^{1+2\alpha-2\gamma}}ds + CR^2\int_0^z I^u_2(s)ds. \qquad (20)$$

Маємо з (19) та (20), що

$$I^u_1(z)+I^u_2(z) \leq C\Bigg((\alpha^u)^2+(\beta^u)^2+R^2(\gamma^u)^2$$
$$+R^{2+2\theta_2}\exp\{2\theta_2 R^{\frac{1}{1-\alpha}}\}(\varkappa^u)^2 + R^2(\varphi^u)^2$$
$$+R^{2+2\rho}\exp\{2\rho R^{\frac{1}{1-\alpha}}\}\left(\int_0^z\frac{I^u_1(s)}{(z-s)^{1+2\alpha-2\gamma}}ds + \int_0^z I^u_2(s)ds\right)\Bigg). \qquad (21)$$

З модифікованої леми Гронуолла ([1]) маємо, що для довільного $z\in[0,T]$

$$I^u_1(z)+I^u_2(z) \qquad (22)$$
$$\leq CR^{2+2\theta_2}\exp\{2\theta_2 R^{\frac{1}{1-\alpha}}\}((\alpha^u)^2+(\beta^u)^2+(\gamma^u)^2+(\varkappa^u)^2+(\varphi^u)^2)$$
$$\times\exp\{z(CR^{2+2\rho}\exp\{2\rho R^{\frac{1}{1-\alpha}}\})^{1/(2\gamma-2\alpha)}\}. \qquad (23)$$

А, отже,

$$I_1^u(T) = \mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]} |X_{t\wedge\tau}^u - X_{t\wedge\tau}^0|\right)^2 \le CR^{2+2\theta_2}\exp\{2\theta_2 R^{\frac{1}{1-\alpha}}\}$$

$$((\alpha^u)^2 + (\beta^u)^2 + (\gamma^u)^2 + (\varkappa^u)^2 + (\varphi^u)^2)\exp\{T(CR^{2+2\rho}\exp\{2\rho R^{\frac{1}{1-\alpha}}\})^{1/(2\gamma-2\alpha)}\}. \quad (24)$$

Тоді з (17) та (24) отримаємо

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0,T]} |X_{t\wedge\tau^u}^u - X_{t\wedge\tau^u}^0| > \varepsilon\right) \le \frac{1}{\varepsilon^2} CR^{2+2\theta_2}\exp\{2\theta_2 R^{\frac{1}{1-\alpha}}\}(C(\alpha^u)^2$$

$$+C(\beta^u)^2 + C(\gamma^u)^2 + C(\varkappa^u)^2 + C(\varphi^u)^2)\exp\{T(CR^{2+2\rho}\exp\{2\rho R^{\frac{1}{1-\alpha}}\})^{1/(2\gamma-2\alpha)}\}. \quad (25)$$

Тому якщо $u \to 0$, то бачимо, що права частина (25) прямує до 0. Тоді з (16)

$$\overline{\lim}_{u\to 0+}\mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0,T]} |X_t^u - X_t^0| > \varepsilon\right) \le \overline{\lim}_{u\to 0+}\mathbb{P}(\tau^u < T).$$

Спрямовуючи R до $+\infty$, маємо $\overline{\lim}_{u\to 0+}\mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0,T]} |X_t^u - X_t^0| > \varepsilon\right) = 0$ □

4. Висновки

Розглянуто одновимірне стохастичне диференціальне рівняння, кероване стандартним броунівським рухом та дробовим броунівським рухом. Коефіцієнти рівняння неоднорідні та разом з випадковою початковою умовою залежать від деякого параметру $u \in [0, u_0]$. Встановлено умови на коефіцієнти та початкову умову як функції від параметру, за яких послідовність розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь як функцій від параметру u збігається за ймовірністю при $u \to 0$ до розв'язку граничного рівняння.

Література

1. Nualart D., Răşcanu A. Differential equation driven by fractional Brownian motion. // Collect. Math. - 2002. Vol. 53, № 1 - P. 55-81.
2. Mishura Yu.S. Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Related Processes. //Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2008. — P. 398.
3. Mishura Yu.S., Posashkov S.V. Existence and uniqueness of solution of mixed stochastic differential equation driven by fractional Brownian motion and Wiener process. //Theory of Stochastic Processes. - 2007. Vol 29 - P. 152-165.
4. Samko S.G., Kilbas A.A. and Marichev O.I. Fracional integrals and derivatives. Theory and applications.// Gordon and Breach Science Publishers, Yvendon, 1993.
5. Zähle M. Integration with respect to fractal functions and stochastic calculus. I. //Probab. Theory Relat. Fields. - 1988. Vol 111, № 3 - P. 333-374.

01601, Київ, вул. Володимирська, 64, Київський університет імені Тараса Шевченка, механіко-математичний факультет, кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики

Адреса електронної пошти: myus@univ.kiev.ua

01601, Київ, вул. Володимирська, 64, Київський університет імені Тараса Шевченка, механіко-математичний факультет, кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики

Адреса електронної пошти: revan1988@gmail.com

01601, Київ, вул. Володимирська, 64, Київський університет імені Тараса Шевченка, механіко-математичний факультет, кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики

Адреса електронної пошти: corlagon@univ.kiev.ua

Надійшла 28/05/2010