Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 83, 2010, стор. 12–21

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 83, 2010, pp. 12–21

ОЦІНКА ВІДСТАНІ МІЖ ДРОБОВИМ БРОУНІВСЬКИМ РУХОМ І ПРОСТОРОМ ГАУССОВИХ МАРТИНГАЛІВ НА ВІДРІЗКУ

УДК 519.21

О. Л. БАННА І Ю. С. МІШУРА

Анотація. Одержано оцінку знизу для відстані між дробовим броунівським рухом і простором гауссових мартингалів на відрізку. Зроблено порівняння для оцінок відстаней між дробовим броунівським рухом і деякими підпросторами гауссових мартингалів. Одержано оцінки знизу і зверху для сталої, що фігурує в зображенні дробового броунівського руху через вінерівський процес.

Abstract. We obtain the lower bound for the distance between fractional Brownian motion and the space of Gaussian martingales. The distances between fractional Brownian motion and some subspaces of Gaussian martingales are compared. The upper and lower bounds for the constant in the representation of fractional Brownian motion via Wiener process are obtained as well.

Аннотация. Получена оценка снизу для расстояния между дробным броуновским движением и пространством гауссовых мартингалов на отрезке. Сделано сравнение оценок расстояний между дробным броуновским движением и некоторыми подпространствами гауссовых мартингалов. Получены оценки снизу и сверху для константы, которая фигурирует в представлении дробного броуновского движения через винеровский процесс.

1. Вступ

Дробовим броунівським рухом (ДБР) з індексом Хюрста $H \in (0,1)$ називається гауссівський процес $\{B_t^H, t \geq 0\}$ зі середнім $\mathsf{E} B_t^H = 0$, коваріацією $\mathsf{E} B_t^H B_s^H = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H})$, такий, що $B_0^H = 0$. Ми будемо розглядати лише випадок, коли індекс Хюрста $H \in (\frac{1}{2}, 1)$. З [7] відомо, що ДБР $\{B_t^H, t \in [0,T]\}$ допускає зображення $B_t^H = \int_0^t z(t,s)dW_s$, де $\{W_t, t \in [0,T]\}$ — вінерівський процес, $z(t,s) = \left(H - \frac{1}{2}\right) \ c_H \, s^{1/2-H} \int_s^t u^{H-1/2}(u-s)^{H-3/2}du$,

$$c_H = \left(\frac{2H \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2} - H\right)}{\Gamma\left(H + \frac{1}{2}\right)\Gamma(2-2H)}\right)^{1/2}, \tag{1.1}$$

$\Gamma(x)$, $x > 0$ – гамма-функція. Далі будемо дотримуватись позначення $\alpha = H - \frac{1}{2}$.

У роботах [2]–[4] та [6] знайдено найкраще наближення дробового броунівського руху в просторі $L_\infty([0,T]; L_2(\Omega))$ мартингалами виду $\int_0^t a(s)dW_s$, де W – вінерівський процес, a – функція виду:

1) $a(s)$ – стала, тобто $a(s) = a$, $s \in [0, T]$;

2) $a(s)$ – степенева функція виду $a(s) = k \cdot s^\alpha$, $k \in \mathbb{R}$, $\alpha = H - 1/2$, H – індекс Хюрста дробового броунівського руху;

3) $a(s)$ – степенева функція виду $a(s) = k \cdot s^\gamma$, $k \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$;

4) $a(s)$ – степенева функція з від'ємним показником виду $a(s) = k \cdot s^{-\alpha}$, $k > 0$, $\alpha = H - 1/2$, H – індекс Хюрста дробового броунівського руху;

5) $a(s)$ – функція виду $a(s) = k_1 + k_2 \cdot s^\alpha, k_1, k_2 \in \mathbb{R}, s \in [0,T]$.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60G15; Secondary 60G44.

Ключові слова і фрази. Вінерівський процес, дробовий броунівський рух, гауссовий мартингал, наближення у класі функцій.

Для кожного виду функції $a(s)$ знайдено ту функцію, на якій мінімум квадрату відстані $\rho_T := \min_{a\in L_2[0,T]} \max_{0\le t\le T} \mathsf{E}(B_t^H - \int_0^t a(s)dW_s)^2$ досягається, та значення самого мінімуму. А саме, для описаних вище випадків було знайдено:

1) $\min_a \max_{0\le t\le T} \mathsf{E}(B_t^H - M_t)^2 = T^{2H}(1-c_1^2)$, де $c_1 = c_1(H) = \alpha\, c_H \cdot \frac{1}{\alpha+1} \cdot B(1-\alpha, \alpha)$ (див. [3]). Причому $a_{\min} = c_1(H)\cdot T^\alpha$.

2) $\min_k \max_{0\le t\le T} \mathsf{E}(B_t^H - M_t)^2 = T^{2H}\left(1 - \frac{c_H^2}{2H}\right)$. Причому $k_{\min} = c_H$ ([3]).

3) $\min_\gamma \min_k \max_{0\le t\le T} \mathsf{E}(B_t^H - M_t)^2 = T^{2H}(1 - c_1^2(H))$, причому мінімум досягається при $\gamma = 0$ та $k_{\min} = c_1(H)\cdot T^\alpha$ ([3]).

4) $\min_k \max_{0\le t\le T} \mathsf{E}(B_t^H - M_t)^2 = \varphi_1(k^*)$ і цей мінімум досягається на функції $a(s) = k^* s^{1/2-H}$, де k^* — менша за координатою з двох точок перетину функцій $\varphi_1(k) = k^{\frac{2H}{2H-1}} c_1(H)$, $c_1(H) = (p(H))^{-\frac{2H}{2H-1}} \frac{2H-1}{1-H}\left(\frac{2H}{c_H} p(H) - 1\right)$, і $\varphi_2(k) = T^{2H} - \frac{4kH}{c_H} T + k^2 \frac{T^{2-2H}}{2-2H}$ ([4]).

5)

$$\min_{k_1,k_2} \max_{0\le t\le T} \mathsf{E}\left(B_t^H - M_t\right)^2$$
$$= T^{2\alpha+1} - T^{2\alpha+1} c_H^2 \left(B^2(1-\alpha,\alpha) - \frac{2B(1-\alpha,\alpha)}{\alpha} + \frac{(\alpha+1)^2}{\alpha^2(2\alpha+1)}\right)$$

та досягається при $k_1 = k_1^*$, $k_2 = k_2^*$ (значення цих сталих наведено в [2], [6]).

В даній роботі наведено ненульову оцінку знизу для ρ_T. Крім того, в статті [3] було доведено, що серед усіх степеневих функцій, згаданих у випадках 1), 2) та 3) найкраще наближення надає стала функція з випадку 1). Тепер порівняємо ще й мінімуми функцій для випадків 1) та 5). Статтю побудовано наступним чином: у розділі 2 наведено властивості функції, яка за припущенням мінімізує квадрат відстані ρ_T (явний вигляд цієї функції, навіть її існування досі невідомі). В розділі 3 знайдено оцінку знизу найкращого наближення дробового броунівського руху гауссівськими мартингалами. В розділі 4 порівнюються деякі класи функцій з точки зору кращого наближення відповідними гауссовими мартингалами дробового броунівського руху. В розділі 5 за допомогою властивостей, доведених у розділі 2, одержано нову оцінку зверху квадрату відстані ρ_T, а також нову оцінку для сталої c_H. В розділі 6 різні оцінки сталої c_H порівнюються графічно.

2. Допоміжні результати

Нехай $\{W_t, t\in[0,T]\}$ — вінерівський процес, $B_t^H = \int_0^t z(t,s)dW_s$ — дробовий броунівський рух з коефіцієнтом Хюрста $H > 1/2$. Позначимо $\alpha = H - 1/2$. Для локально квадратично інтегрованої функції $a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ визначимо

$$F_a(t) = \mathsf{E}\left[\left(B_t^H - \int_0^t a(s)dW_s\right)^2\right] = \int_0^t \left(a(s) - z(t,s)\right)^2 ds.$$

Для довільного $c > 0$ з властивості

$$(c^{-1/2}W_{ct}, c^{-H}B_{ct}^H) \overset{d}{=} (W_t, B_t^H)$$

маємо

$$F_a(t) = c^{2H} F_{c^{-\alpha}a(c\cdot)}(t/c). \tag{2.1}$$

Розглянемо задачу мінімізації

$$M_a := \max_{t\in[0,1]} F_a(t) \to \min, \tag{2.2}$$

за функцією a.

Нехай функція $a^* \in C(\mathbb{R}_+)$ доставляє мінімум функціоналу M_a.

Лема 2.1. $M_{a^*} = F_{a^*}(1)$.

Доведення. Припустимо, що $F_{a^*}(1) < M_{a^*}$. Оскільки $F_{a^*}(t)$ неперервна за t, то існує $c > 1$ таке, що $F_{a^*}(t) < M_{a^*}$ для $t \in [1, c]$, отже, $\max_{t\in[0,c]} F_{a^*}(t) = M_{a^*}$. Покладемо $b(t) = c^{-\alpha} a^*(tc)$. З рівняння (2.1) маємо, що $F_b(t) = c^{-2H} F_{a^*}(tc)$, $t \in [0, 1]$. Звідси очевидно, що $M_b = c^{-2H} M_{a^*} < M_{a^*}$, що суперечить припущенню. $\square$

Припустимо тепер, що функція $F_{a^*}(t)$ неперервно диференційовна.

Лема 2.2. $F'_{a^*}(1) \geq 2H F_{a^*}(1)$.

Доведення. Одразу зауважимо, що з попередньої леми випливає, що $F'_{a^*}(1) \geq 0$. Для $c > 1$ покладемо $b(t) = c^{-\alpha} a^*(tc)$, $t \in [0, 1]$. З рівності (2.1) маємо $F_b(t) = c^{-2H} F_a(tc)$, $t \in [0, 1/c]$. Оскільки $M_b \geq M_{a^*}$, то існує точка $t_c \in [0, 1]$ така, що $F_b(t_c) \geq M_{a^*} = F_{a^*}(1)$. З попереднього випливає, що $t_c \in (1/c, 1]$. З іншого боку, маємо

$$F_{a^*}(1) \leq F_b(t_c) = c^{-2H} F_{a^*}(ct_c) \leq (ct_c)^{-2H} F_{a^*}(ct_c).$$

Звідси, оскільки $ct_c \to 1+$, $c \to 1+$, то $(x^{-2H} F_{a^*}(x))'_x|_{x=1} \geq 0$, що рівносильно твердженню леми. $\square$

З доведеної леми, зокрема, випливає, що $F'_{a^*}(1) > 0$, оскільки $F_{a^*}(1) = M_{a^*} > 0$.

3. Оцінка знизу найкращого наближення дробового броунівського руху мартингалами виду $\int_0^t a(s)dW_s$

Теорема 3.1. *Квадрат відстані* $\rho_T := \min_{a\in L_2[0,T]} \max_{0\leq t\leq T} \mathsf{E}(B_t^H - \int_0^t a(s)dW_s)^2$ *допускає оцінку*

$$\rho_T \geq \max_{0\leq t_1\leq 1} \frac{(1 - t_1^{2H} - (1-t_1)^{2H})^2}{16 t_1^{2H}} \cdot T^{2H} > 0. \tag{3.1}$$

Доведення. Внаслідок властивості автомодельності (2.1), величину ρ_T можна подати як $\rho_T = T^{2H} \cdot \rho_1$. Тобто достатньо розглянути величину ρ_T при $T = 1$. Побудуємо оцінку знизу для виразу $\max_{0\leq t\leq 1} \mathrm{E}(B_t^H - \int_0^t a(s)dW_s)^2 = \max_{0\leq t\leq 1} \int_0^t (z(t,s) - a(s))^2 ds$.

Нехай $0 < t_1 \leq 1$. Позначимо випадкову величину $\int_0^1 a(s)dW_s =: B$. Маємо

$$\max_{0\leq t\leq 1} \mathsf{E}(B_t^H - \int_0^t a(s)dW_s)^2 = \max_{0\leq t\leq 1} \mathsf{E}(B_t^H - \mathsf{E}[B|\mathcal{F}_t])^2 \geq$$
$$\geq \max\left(\mathsf{E}(B_{t_1}^H - \mathsf{E}[B|\mathcal{F}_{t_1}])^2, \mathsf{E}(B_1^H - B)^2\right) \geq$$
$$\geq \max\left(\mathrm{E}(B_{t_1}^H - \mathsf{E}[B|B_{t_1}^H])^2, \mathsf{E}\left(\mathrm{E}[B_1^H|B_{t_1}^H] - \mathsf{E}[B|B_{t_1}^H]\right)^2\right) \geq$$
$$\geq \frac{1}{2}\left(\mathsf{E}(B_{t_1}^H - \mathsf{E}[B|B_{t_1}^H])^2 + \mathsf{E}\left(\mathsf{E}[B_1^H|B_{t_1}^H] - \mathsf{E}[B|B_{t_1}^H]\right)^2\right) \geq \frac{1}{4}\mathsf{E}(B_{t_1}^H - \mathrm{E}[B_1^H|B_{t_1}^H])^2 =$$
$$= \frac{1}{4}\mathsf{E}\left(B_{t_1}^H - \frac{\mathsf{E}(B_1^H B_{t_1}^H)}{\mathrm{E}((B_{t_1}^H)^2)} B_{t_1}^H\right)^2 = \frac{1}{4}\mathrm{E}\left(B_{t_1}^H \cdot \left(1 - \frac{1 + t_1^{2H} - (1-t_1)^{2H}}{2t_1^{2H}}\right)\right)^2 =$$
$$= \frac{1}{4} t_1^{2H}\left(1 - \frac{1 + t_1^{2H} - (1-t_1)^{2H}}{2t_1^{2H}}\right)^2 = \frac{(1 - t_1^{2H} - (1-t_1)^{2H})^2}{16 t_1^{2H}}.$$

$\square$

Зауваження 3.2. За нерівністю $\frac{1}{2}(a^2 + b^2) \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, маємо

$$\frac{t_1^{2H} + (1-t_1)^{2H}}{2} \geq \left(\frac{t_1 + (1-t_1)}{2}\right)^{2H} = \frac{1}{2^{2H}},$$

причому рівність виконується тоді і тільки тоді, коли $t_1 = 1 - t_1$, тобто $t_1 = \frac{1}{2}$. Отже, якщо в умові теореми 3.1 покласти $t_1 = \frac{1}{2}$, одержимо оцінку $\rho_T \geq \frac{(2^{2H}-2)^2}{16 \cdot 2^{2H}} \cdot T^{2H}$.

4. Порівняння деяких класів функцій з точки зору кращого наближення до дробового броунівського руху

Нехай $\{B_t^H, t \geq 0\}$ — дробовий броунівський рух з індексом Хюрста $H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, число $T > 0$ фіксоване, $a : [0,T] \to \mathbb{R}$ — вимірна функція, $a \in L_2[0,T]$, квадратично інтегрований мартингал $\{M_t,\ t \in [0,T]\}$ має вид $M_t = \int_0^t a(s)dW_s$, де $\{W_t,\ t \in [0,T]\}$ — вінерівський процес, пов'язаний з дробовим броунівським рухом B^H наступним чином: для всіх $t \in [0,T]$ має місце зображення

$$B_t^H = \int_0^t z(t,s)dW_s, \tag{4.1}$$

а ядро $z(t,s) = c_H\,(H - 1/2)\ s^{1/2-H} \int_s^t u^{H-1/2}(u-s)^{H-3/2}du$. Існування зображення (4.1) було встановлено в роботі [7]. Тут $c_H = \left(\frac{2H \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2}-H\right)}{\Gamma\left(H+\frac{1}{2}\right)\Gamma(2-2H)}\right)^{1/2}$.

У випадку 5) у вступі розглянуто ширший клас функцій, а саме $a(s) = k_1 + k_2 \cdot s^\alpha, k_1,\ k_2 \in \mathbb{R}, s \in [0,T]$. Тому відстань найкращого наближення елементом класу, який розглядається в 5), не більша ніж елементом класу, який розглянуто в 1), тобто

$$\min_k \max_{0 \leq t \leq T} \mathsf{E}(B_t^H - \int_0^t kdW_s)^2 \geq \min_{k_1,k_2} \max_{0 \leq t \leq T} \mathsf{E}(B_t^H - \int_0^t (k_1 + k_2 s^\alpha)dW_s)^2.$$

Покажемо строгу нерівність:

$$\min_k \max_{0 \leq t \leq T} \mathsf{E}(B_t^H - kW_t)^2 > \min_{k_1,k_2} \max_{0 \leq t \leq T} \mathsf{E}(B_t^H - \int_0^t (k_1 + k_2 s^\alpha)dW_s)^2. \tag{4.2}$$

Позначимо $f(t,k_1,k_2) := \mathsf{E}(B_t^H - \int_0^t (k_1 + k_2 s^\alpha)dW_s)^2$.

Відомо, що $k_2^0 < 0$ та $k_2^* < 0$. Зауважимо, що $f(T,k_1,k_2)$ – многочлен від k_1 та k_2 другого степеня, строго опуклий по k_1 та k_2 вниз, досягає мінімуму в точці (k_1^*, k_2^*), $H \in (\frac{1}{2}, 1)$. При $k_2 \geq k_2^0$ функція $f(t,k_1,k_2)$ зростає по t на $[0,+\infty)$. В роботі [3] доведено, що

$$\min_k \max_{0 \leq t \leq T} f(t,k,0) = T^{2H}(1 - c_1^2(H)), \tag{4.3}$$

де $c_1(H) = \frac{\alpha}{\alpha+1} c_H B(1-\alpha,\alpha)$. Мінімум досягається при $k = c_1(H) \cdot T^\alpha$, $\max_{0 \leq t \leq T} f(t, c_1(H)T^\alpha, 0)$ досягається при $t = T$.

Оскільки $(c_1(H)T^\alpha, 0) \neq (k_1^*, k_2^*)$, бо $k_2^* < 0$, то $f(T,k_1,k_2)$ не має локального мінімуму в точці $(c_1(H)T^\alpha, 0)$. Значить існує точка $(k_1^{(2)}, k_2^{(2)})$, $k_2^{(2)} > k_2^0$ така, що $f(T, c_1(H)T^\alpha, 0) > f(T, k_1^{(2)}, k_2^{(2)})$.

Скористаємось тим, що в (4.3) мінімум досягається при $k = c_1(H) \cdot T^\alpha$, та врахуємо, що $k_2^{(2)} > k_2^0$, а функція $f(t, k_1^{(2)}, k_2^{(2)})$ зростає, звідки одержимо оцінку

$$\min_k \max_{0 \leq t \leq T} f(t,k,0) = f(T, c_1(H)T^\alpha, 0) >$$

$$> f(T, k_1^{(2)}, k_2^{(2)}) = \max_{0 \leq t \leq T} f(t, k_1^{(2)}, k_2^{(2)}) \geq \min_{k_1,k_2} \max_{0 \leq t \leq T} f(t,k_1,k_2).$$

Порівняємо знайдені мінімуми у випадках 1) та 5), описаних у вступі, тобто покажемо, що

$$T^{2\alpha+1}\left(1-\left(\frac{\alpha c_H}{\alpha+1}\cdot B(1-\alpha,\alpha)\right)^2\right)>$$
$$>T^{2\alpha+1}\left(1-c_H^2\left(B^2(1-\alpha,\alpha)-\frac{2B(1-\alpha,\alpha)}{\alpha}+\frac{(\alpha+1)^2}{\alpha^2(2\alpha+1)}\right)\right).$$

Або, що теж саме

$$B^2(1-\alpha,\alpha)-\frac{2B(1-\alpha,\alpha)}{\alpha}+\frac{(\alpha+1)^2}{\alpha^2(2\alpha+1)}>\left(\frac{\alpha c_H}{\alpha+1}\cdot B(1-\alpha,\alpha)\right)^2. \tag{4.4}$$

Дійсно, оцінимо різницю лівої і правої частин (4.4):

$$B^2(1-\alpha,\alpha)-\frac{2B(1-\alpha,\alpha)}{\alpha}+\frac{(\alpha+1)^2}{\alpha^2(2\alpha+1)}-\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\cdot B(1-\alpha,\alpha)\right)^2=$$
$$=\frac{2\alpha+1}{(\alpha+1)^2}B^2(1-\alpha,\alpha)-\frac{2B(1-\alpha,\alpha)}{\alpha}+\frac{(\alpha+1)^2}{\alpha^2(2\alpha+1)}=$$
$$=(2\alpha+1)\left(\frac{B(1-\alpha,\alpha)}{\alpha+1}-\frac{\alpha+1}{\alpha(2\alpha+1)}\right)^2\geq 0 \tag{4.5}$$

Покажемо, що (4.5) не може дорівнювати нулю, тобто $f(\alpha):=(\alpha+1)^2\cdot\sin\pi\alpha-\pi\alpha(2\alpha+1)\neq 0$. А саме, доведемо, що $f(\alpha)<0$ при $0<\alpha<\frac{1}{2}$.

Запишемо формулу Тейлора з залишковим членом у формі Лагранжа:

$$f(\alpha)=f(0)+\alpha f'(0)+\frac{\alpha^2 f''(0)}{2}+\frac{\alpha^3 f'''(\theta\alpha)}{3!},\quad 0<\theta<1.$$

Очевидно, що $f'(0)=0$, $f''(0)=0$, а $f'''(\theta\alpha)<0$. Дійсно, $f'''(\alpha)=\pi\cos\pi\alpha(6-(\alpha+1)^2\pi^2)-6(\alpha+1)\pi^2\sin\pi\alpha<0$. Оскільки $\frac{\alpha^3 f'''(\theta\alpha)}{3!}<0$, то $f(\alpha)<0$, коли $0<\alpha<\frac{1}{2}$.

Отже, (4.4) дійсно виконується.

5. Оцінка зверху для відстані ρ_T в класі функцій $a(s)=a_0s^\alpha+a_1s^{\alpha+1}$.

Нехай $M_t=\int_0^t a(s)dW_s$, $B_t^H=\int_0^s z(t,s)dW_s$, ядро $z(t,s)=c_H\alpha\, s^{-\alpha}\int_s^t u^\alpha(u-s)^{\alpha-1}du$. Скористаємось теоремою 2 зі статті [3], в якій доведено, що $\int_0^t(z(t,s)-c_Hs^\alpha)^2ds=t^{2H}\left(1-\frac{c_H^2}{2H}\right)$. В силу цієї рівності

$$\mathsf{E}(B_t^H-M_t)^2=\int_0^t(z(t,s)-a(s))^2ds=\int_0^t((z(t,s)-c_Hs^\alpha)+(c_Hs^\alpha-a(s)))^2ds=$$
$$=\int_0^t(z(t,s)-c_Hs^\alpha)^2ds+2\int_0^t(z(t,s)-c_Hs^\alpha)\cdot(c_Hs^\alpha-a(s)))ds+\int_0^t(c_Hs^\alpha-a(s))^2ds=$$
$$=t^{2H}\left(1-\frac{c_H^2}{2H}\right)-2\alpha c_H\int_0^t u^\alpha\int_0^u(u-s)^{\alpha-1}\cdot(a(s)s^{-\alpha}-a(u)u^{-\alpha})dsdu+$$
$$+\int_0^t(c_Hs^\alpha-a(s))^2ds. \tag{5.1}$$

Зробимо заміну $b(u) = a(u)u^{-\alpha}$, $c(u) = b(u) - c_H$, і одержимо

$$\mathsf{E}(B_t^H - M_t)^2 = t^{2H}\left(1 - \frac{c_H^2}{2H}\right) - 2\alpha c_H \int_0^t u^\alpha \int_0^u (u-s)^{\alpha-1}\cdot(b(s)-b(u))dsdu+$$
$$+\int_0^t s^{2\alpha}(b(s)-c_H)^2 ds =$$
$$= t^{2H}\left(1 - \frac{c_H^2}{2H}\right) - 2\alpha c_H \int_0^t u^\alpha \int_0^u (u-s)^{\alpha-1}\cdot(c(s)-c(u))dsdu + \int_0^t s^{2\alpha}c^2(s)ds. \tag{5.2}$$

В правій частині рівності (5.2) доречно покласти $c(u) = a_0 + a_1 u$, тобто у (5.1) $a(u) = (a_0 + c_H + a_1 u)u^\alpha$. Оскільки одночасна мінімізація по коефіцієнтах a_0, a_1 приводить до занадто громіздких результатів, будемо мінімізувати відстань, використовуючи леми 2.1 та 2.2. З цією метою розглянемо клас функцій $\mathcal{A} = \{a \in L_2[0,1] : F_a'(1) = 2HF_a(1)\}$.

Теорема 5.1. *Нехай* $\frac{1}{2} < H < 1$, $\alpha = H - \frac{1}{2}$. *Тоді у класі функцій* $c(u) = a_0 + a_1 u \in \mathcal{A}$ $\min_{a_0,a_1}\max_{0\le t\le T}\mathsf{E}(B_t^H - \int_0^t (a_0 s^\alpha + a_1 s^{\alpha+1})dW_s)^2$ *досягається при* $a_0 = a_0^*$, $a_1 = a_1^*$, *де*

$$a_0^* = \frac{\alpha(2\alpha+1)(2\alpha+3)}{(\alpha+1)}c_H,$$
$$a_1^* = -\frac{2\alpha+3}{T(2\alpha+2)}\cdot\left(a_0 + \frac{\alpha c_H}{\alpha+1}\right)$$

та дорівнює

$$T^{2\alpha+1}\left[1 - \frac{c_H^2}{2\alpha+1} - \frac{\alpha^2(2\alpha+3)c_H^2}{(\alpha+1)^2}\right].$$

Доведення. Підставимо $c(u) = a_0 + a_1 u$ у вираз (5.2) і одержимо:

$$F_a(t) = \mathsf{E}(B_t^H - M_t)^2 = t^{2H}\left(1 - \frac{c_H^2}{2H}\right) + 2\alpha c_H \int_0^t u^\alpha \int_0^u (u-s)^\alpha \cdot a_1 dsdu+$$
$$+\int_0^t s^{2\alpha}(a_0^2 + 2a_0a_1 s + a_1^2 s^2)ds =$$
$$= t^{2\alpha+1}\left(1 - \frac{c_H^2}{2\alpha+1} + \frac{a_0^2}{2\alpha+1}\right) + t^{2\alpha+2}\frac{a_1}{\alpha+1}\left(a_0 + \frac{\alpha c_H}{\alpha+1}\right) + t^{2\alpha+3}\cdot\frac{a_1^2}{2\alpha+3}. \tag{5.3}$$

Візьмемо в (5.3) похідну по t і одержимо:

$$F_a'(t) = t^{2\alpha}(\kappa_0 + \kappa_1 t + \kappa_2 t^2), \tag{5.4}$$

де

$$\kappa_0 = 2\alpha + 1 - c_H^2 + a_0^2, \quad \kappa_1 = 2a_1\left(a_0 + \frac{\alpha c_H}{\alpha+1}\right), \quad \kappa_2 = a_1^2. \tag{5.5}$$

Враховуючи, що ми розглядаємо клас функцій $\mathcal{A}$, одержимо в точці T

$$T^{2\alpha}(\kappa_0 + \kappa_1 T + \kappa_2 T^2) = \frac{2\alpha+1}{T}\cdot T^{2\alpha+1}\cdot\left(\frac{\kappa_0}{2\alpha+1} + T\cdot\frac{\kappa_1}{2\alpha+2} + T^2\cdot\frac{\kappa_2}{2\alpha+3}\right),$$

звідки

$$\kappa_2 = -\kappa_1\cdot\frac{2\alpha+3}{2T\cdot(2\alpha+2)}. \tag{5.6}$$

Остання рівність еквівалентна такій:

$$a_1 = -\frac{2\alpha+3}{T\cdot(2\alpha+2)}\cdot\left(a_0 + \frac{\alpha c_H}{\alpha+1}\right). \tag{5.7}$$

звідки

$$F_a(T) = T^{2\alpha+1}\Big[1 - \frac{c_H^2}{2\alpha+1} + \frac{1}{(2\alpha+2)^2}\Big(a_0^2 \cdot \frac{1}{2\alpha+1} - \\ - a_0 \cdot \frac{2(2\alpha+3)\alpha c_H}{\alpha+1} - \frac{(2\alpha+3)\alpha^2 \cdot c_H^2}{(\alpha+1)^2}\Big)\Big]. \quad (5.8)$$

Мінімум виразу (5.8) по a_0 досягається при

$$a_0 = \frac{\alpha(2\alpha+1)(2\alpha+3)}{(\alpha+1)} \cdot c_H$$

та дорівнює:

$$\min_{a_0} F_a(T) = \\ = T^{2\alpha+1}\Big[1 - \frac{c_H^2}{2\alpha+1} + \frac{1}{(2\alpha+2)^2}\Big(- \frac{\alpha^2(2\alpha+3)^2(2\alpha+1)c_H^2}{(\alpha+1)^2} - \frac{(2\alpha+3)\alpha^2 c_H^2}{(\alpha+1)^2}\Big)\Big] = \\ = T^{2\alpha+1}\Big[1 - \frac{c_H^2}{2\alpha+1} - \frac{\alpha^2(2\alpha+3)c_H^2}{(\alpha+1)^2}\Big]. \quad (5.9)$$

Залишається довести, що при $a_0 = a_0^*$ і $a_1 = a_1^*$ функція $F_a(t)$ зростає по t, тоді будемо мати $\min_{a_0 . a_1} \max_{0 \le t \le T} F_a(T) \le F_{a^*}(T)$, $a^* = (a_0^*, a_1^*)$. В свою чергу, з урахуванням (5.4), достатньо довести, що менший корінь рівняння $\kappa_0 + \kappa_1 t + \kappa_2 t^2 = 0$ перевищує T. Достатньо розглянути $T = 1$, тоді цей корінь дорівнює

$$t_1 = \frac{-\kappa_1 - \sqrt{\kappa_1^2 - 4\kappa_0\kappa_2}}{2\kappa_2} = \alpha + 1 - \frac{1}{\alpha c_H}\sqrt{c_H^2\alpha^2(\alpha+1)^2 - \kappa_0}.$$

Нерівність $t_1 > 1$ еквівалентна такій: $\alpha^2 > (\alpha+1)^2 - \frac{\kappa_0}{\alpha^2 c_H^2}$, або $2\alpha + 1 < \frac{\kappa_0}{\alpha^2 c_H^2}$. Але

$$\frac{\kappa_0}{\alpha^2 c_H^2} = \Big(2H - c_H^2 + \frac{\alpha^2 c_H^2(2\alpha+1)^2(2\alpha+3)^2}{(\alpha+1)^2}\Big) \cdot \frac{1}{\alpha^2 c_H^2} \\ = \frac{2H - c_H^2}{(\alpha+1)^2} + \frac{(2\alpha+1)^2(2\alpha+3)^2}{(\alpha+1)^2} > \frac{(2\alpha+1)^2(2\alpha+3)^2}{(\alpha+1)^2} > (2\alpha+1)^2 > 2\alpha+1,$$

то справді $t_1 > 1$. □

Наслідок 5.2. *З (5.9) маємо нерівність*

$$1 - \frac{c_H^2}{2\alpha+1} - \frac{\alpha^2(2\alpha+3)c_H^2}{(\alpha+1)^2} > 0,$$

звідки одержуємо оцінку для c_H:

$$c_H < \sqrt{\frac{(2\alpha+1)(\alpha+1)^2}{(\alpha+1)^2 + \alpha^2(2\alpha+1)(2\alpha+3)}} =: C_H^{(c)}, \quad (5.10)$$

яка очевидним чином поліпшує оцінку $c_H^2 \le 2H$, одержану в статті [2].

6. Порівняння деяких оцінок знизу та зверху для c_H

У роботах [2], [3] було одержано різні оцінки зверху для сталої c_H, а саме:

$$c_H < \sqrt{2\alpha+1} =: C_H^{(a)} \quad (6.1)$$

([2], наслідок 1; мал. 1, крива (a));

$$c_H < \frac{(\alpha+1)\sin\pi\alpha}{\pi\alpha} =: C_H^{(b)} \quad (6.2)$$

([3], зауваження 1; мал. 1, крива (b)). Тобто, ця оцінка була отримана з виразу для відстані

$$\rho_T = T^{2H}(1 - c_1^2), \tag{6.3}$$

де $c_1 = c_1(H) = \alpha\, c_H \cdot \frac{1}{\alpha+1} \cdot B(1-\alpha,\, \alpha)$.

У даній роботі маємо ще одну оцінку зверху для цієї сталої, а саме $C_H^{(c)}$ (5.10).

А в [4] (лема 3.1; мал. 1, крива (d)) ми отримали оцінку знизу для цієї сталої c_H:

$$c_H > \sqrt{8H^2(1-H)} =: C_H^{(d)}. \tag{6.4}$$

Порівняємо усі отримані оцінки графічно за допомогою програми Mathematica.

З малюнку 1 видно, що $C_H^{(b)}$ краще наближає c_H, ніж $C_H^{(a)}$, на всьому проміжку $(\frac{1}{2}, 1)$. Але $C_H^{(c)}$ краще наближає c_H зверху, ніж $C_H^{(b)}$, на проміжку $H \in (\frac{1}{2}, 0.853497)$ (аналітично знайдено за допомогою Mathematica). А на проміжку $H \in (0.853497, 1)$ навпаки, $C_H^{(b)}$ краще наближає c_H, ніж $C_H^{(c)}$. Це й підтверджують графіки різниць $C_H^{(a)} - C_H^{(b)}$ на малюнку 2, та $C_H^{(b)} - C_H^{(c)}$ на малюнку 3.

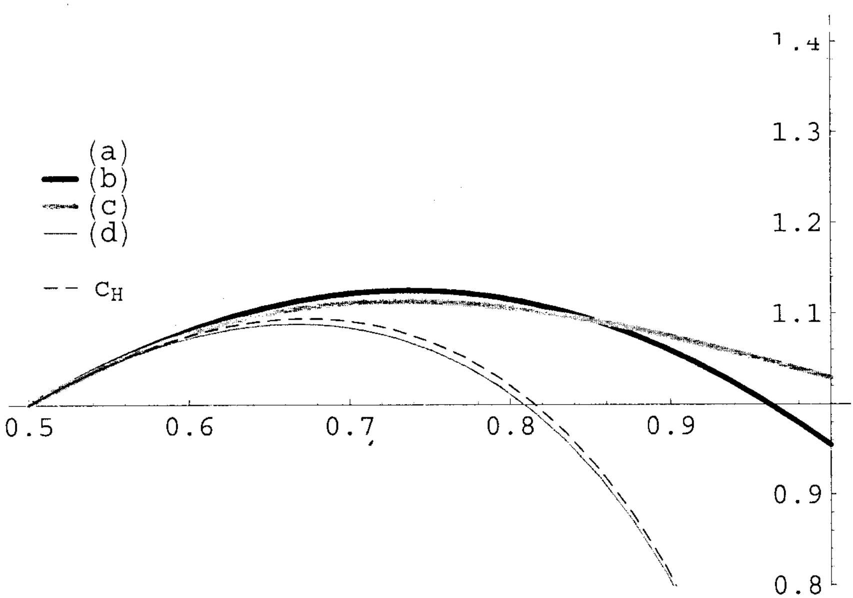

Рис. 1

7. Висновки

Одержано кілька оцінок зверху для c_H. З них $C_H^{(b)}$ та $C_H^{(c)}$ краще наближають c_H на відповідних проміжках, описаних вище. З цього випливає, що маємо оцінку зверху для ρ_T найкращу. Порівняємо графічно оцінки зверху та знизу (3.1) (мал. 4, крива (a)) для ρ_T. Тобто, підставимо вираз для c_H вигляду (1.1) у (6.3) (мал. 4, крива (c)) та (5.9) (мал. 4, крива (b)) відповідно, таким чином отримаємо найкращі оцінки для ρ_T зверху. На малюнку 5 зображено різницю між кривими (b) та (c) з малюнка 4. Тобто бачимо, що на проміжку $(\frac{1}{2}, 0.720536)$ маємо краще наближення для ρ_T, яке отримали з (5.9), а на проміжку $(0.720536, 1)$ навпаки, маємо краще наближення для ρ_T, яке отримали з (6.3).

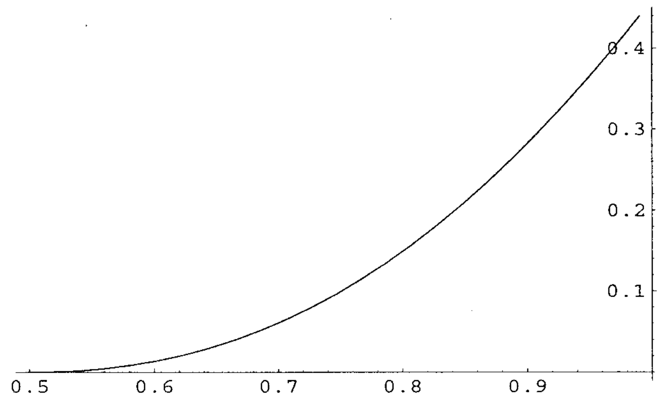

Рис. 2

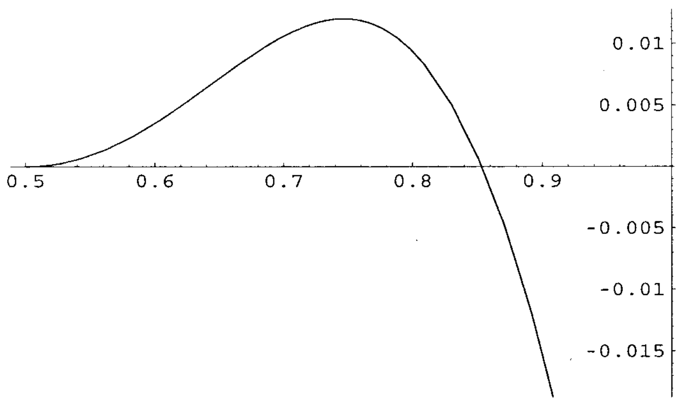

Рис. 3

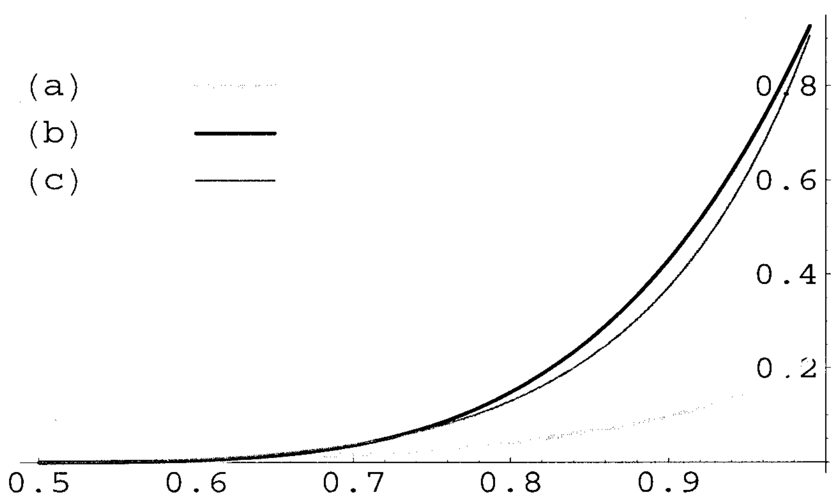

Рис. 4

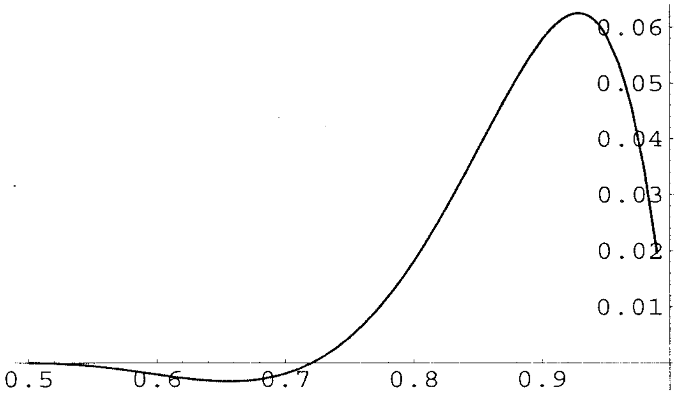

Рис. 5. Мал. 5

Література

1. Т. Андрощук, *Наближення стохастичного інтегралу по дробовому броунівському руху інтегралами по абсолютно неперервним процесам*, Теор. ймов. та мат. статистика **73** (2005), 11–20 с.
2. О.Л. Банна, *Наближення дробового броунівського руху зі значенням індекса Хюрста, близьким до одиниці, стохастичними інтегралами з лінійно-показниковими підінтегральними функціями*, Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика **1** (2007), 60–67 с.
3. О. Л. Банна, Ю. С. Мішура, *Найпростіші мартингали найкращого наближення до дробового броунівського руху*, Вісник Київського національного університету ім.Т.Шевченка. Математика і механіка **19** (2008), 38–43.
4. Ю. С. Мішура, О. Л. Банна, *Наближення дробового броунівського руху вінерівськими інтегралами*, Теор. ймов. та мат. статистика **79** (2008), 106–115.
5. T. Androshchuk, Y. S. Mishura, *Mixed Brownian–fractional Brownian model: absence of arbitrage and related topics*, Stochastics: An Int.J.Prob.Stoch.Proc. **78** (2006), 281–300.
6. O. Banna, Y. S. Mishura, *Approximation of fractional Brownian motion with associated Hurst index separated from 1 by stochastic integrals of linear power functions*, Theory of Stochastic Processes, **14(30)**, № 3-4 (2008), 1–16.
7. I. Norros, E. Valkeila, J. Virtamo, *An elementary approach to a Girsanov formula and other analytical results on fractional Brownian motions*, Bernoulli **5(4)** (1999), 571–587.
8. T. H. Thao, *A note on fractional Brownian motion* Vietnam J. Math. **31** (2003), №3, 255—260.

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Національний університет ім. Тараса Шевченка, проспект Глушкова, 6, Київ 03127, Україна

Адреса електронної пошти: bannaya@mail.univ.kiev.ua

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Національний університет ім. Тараса Шевченка, проспект Глушкова, 6, Київ 03127, Україна

Адреса електронної пошти: myus@univ.kiev.ua

Надійшла 07/04/2010