Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 83, 2010, стор. 69–79

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 83, 2010, pp. 69–79

ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ ДЛЯ РІЗНИЦЕВИХ АДИТИВНИХ ФУНКЦІОНАЛІВ

УДК 519.21

Ю. М. КАРТАШОВ

Анотація. Розглядаються адитивні функціонали, задані на ланцюгах Маркова, що апроксимують марковський процес. Отримані достатні умови, за яких має місце збіжність функціоналів в термінах умов на збіжність їхніх характеристик (математичних сподівань) при загальних умовах на збіжність процесів. Наведені достатні умови рівномірної збіжності згаданих функціоналів.

1. Вступ

Розглядається гранична поведінка наступних функціоналів

$$\phi_n^{s,t} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k:s\le t_{n,k}<t} F_{n,k}\left(X_n\left(t_{n,k}\right)\right), \quad 0\le s<t, \tag{1.1}$$

де $\lambda_n \stackrel{\text{def}}{=} \{t_{n,k}, n, k\ge 1\}$ – послідовність розбиттів $\mathbb{R}^+$, $X_n, n\ge 1$ – послідовність процесів зі значеннями в локально компактному метричному просторі $\mathfrak{X}$, $F_{n,k}, n, k\ge 1$ невід'ємні борелеві функції на $\mathfrak{X}$. Нехай X_n мають марковську властивість в точках $t_{n,k}$ та збігаються слабко до марковського процесу X.

В роботах [1], [2], [3] запропоновано підхід до дослідження граничної поведінки згаданих функціоналів в термінах їхніх характеристик (умовних математичних сподівань). Загальні результати вказаних робіт встановлювали, що при рівномірній збіжності характеристик ϕ_n має місце слабка збіжність функціоналів. Такий підхід є розвитком підходу Є.Б.Ди́нкіна [9] до встановлення збіжності W-функціоналів (невід'ємних, неперервних, однорідних функціоналів від процесів Маркова з обмеженою характеристикою). Розвиток полягав у переході до розгляду функціоналів виду (1.1), та, зокрема, послабленні умов рівномірності ([3]).

Такі результати спиралися на певну схему збіжності процесів X_n, а саме таке поняття, як марковська апроксимація (див. визначення та основні приклади в [4]). В багатьох поширених ситуаціях марковська апроксимація має місце, наприклад у випадку, коли X_n є випадковими блуканнями, що збігаються до вінерівського або стійкого процесу, або X_n є різницевими апроксимаціями дифузій. Проте в більш складних ситуаціях доведення марковської апроксимації може стати занадто складною задачею.

Дана робота дозволяє отримувати аналогічні результати щодо збіжності ϕ_n в термінах характеристик при відмові від умови марковської апроксимації. Натомість пропонується схема, що дозволяє отримувати збіжність ϕ_n зі збіжності їхніх "згладжених" модифікацій. Останній результат можна очікувати у випадку, коли ϕ_n мають вигляд часткових інтегральних сум, а підінтегральні функції, що визначають

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60J55, 60J45, 60F17.

Ключові слова і фрази. Адитивний функціонал, характеристика адитивного функціонала, принцип інваріантності.

ϕ_n, збігаютсья рівномірно до неперервної функції, тому аналог принципа інваріантності Донскера дозволяє отримувати збіжність ϕ_n до інтегрального функціоналу від X. З іншого боку, відстань між двома "згладженими" функціоналами вигляду 1.1 від одного процесу X_n можна оцінити відстанню між їхніми характеристиками за допомогою марковської властивості X_n та технік з [1].

Інша частина роботи присвячена результатам щодо рівномірниої збіжності функціоналів. Такий напрямок був вмотивований результатами Р.Басом та Д. Хошневесяном ([7]), де отримана рівномірна збіжність сімей функціоналів виду (1.1) для випадку, коли допграничний процес X_n визначається за випадковим блуканням, що апроксимує багатомірний вінерівський процес. В даній роботі пропонується результат типу (теорема 2), який також може бути застосований для отримання рівномірних результатів щодо збіжності апроксимацій адитивних функціоналів від широкого класу процесів. Зазначимо, що суттєве для ситуації роботи [7] припущення про незалежність приростів допграниних процесів на використовується.

Побудова прикладу застосування результатів першого розділу, що не міг би бути отриманий за допомогою технік з [1]-[3] потребує наведення нетривіальної ситуації, в якій марковська апроксимація відсутня, або не може бути встановлена достатньо просто. Одним з можливих прикладів може слугувати випадкове блукання на фракталі, що апроксимує дифузійний процес. Встановлення збіжності функціоналів в цьому випадку можна отримати використовуючи результат другого розділу даної статті та міркування, використані при доведенні теореми 7.1 [7]. Це само по собі потребує розширеного викладення та буде зроблено в подальших роботах.

2. Результати щодо послаблення умов на збіжність процесів

Нехай траєкторії процесів X_n належать простору $\mathbb{D}$ (неперервні справа та мають границі зліва в усіх точках), мають марковську властивість в точках розбиття $\lambda_n \stackrel{\text{def}}{=} \{t_{n,k}\}, |\lambda_n| \to 0, n \to \infty$. Припустимо, що має місце слабка збіжність за розподілом в просторі Скорохода $D(\mathbb{R}^+)$: $X_n \xrightarrow{\text{w}} X$, $n \to \infty$.

Нехай
$$G_{n,k}(\cdot) = \frac{F_{n,k}(\cdot)}{\Delta t_{n,k}}, \quad \Delta t_{n,k} \stackrel{\text{def}}{=} t_{n,k} - t_{n,k-1}.$$

При такому записі функціонали ϕ_n приймуть вигляд часткових інтегральних сум
$$\phi_n^{s,t} = \sum_{k:s \le t_{n,k} < t} G_{n,k}\left(X_n\left(t_{n,k}\right)\right)\Delta t_{n,k}. \tag{2.1}$$

За поміркованих припущень щодо функцій $G_{n,k}$ з принципу інваріантності Донскера випливає, що функціонали такого вигляду будуть збігатися до інтегрального функціоналу
$$\phi^{s,t} \stackrel{\text{def}}{=} \int_s^t G(r, X(r))dr,$$
де G є певна гладка функція, що є границею $G_{n,k}$.

У випадку, коли границя $G_{n,k}$ є істотно розривною (або навіть не існує в класі звичайних функцій), корисним може виявитися підхід, що побудований на збіжності функціоналів, побудованих за "згладженими" функціями $G^\epsilon_{n,k}$:
$$\phi_{n,\epsilon}^{s,t} = \sum_{k:s \le t_{n,k} < t} G^\epsilon_{n,k}\left(X_n\left(t_{n,k}\right)\right)\Delta t_{n,k}.$$

Характеристикою вищенаведених функціоналів будемо називати наступні функції
$$f_{n,\epsilon}^{s,t}(x) \stackrel{\text{def}}{=} M_x\left(\phi_{n,\epsilon}^{s,t}\right) = M\left(\phi_{n,\epsilon}^{s,t} \middle| \quad X(s) = x\right), \quad f_n^{s,t}(x) \stackrel{\text{def}}{=} M_x\left(\phi_n^{s,t}\right). \tag{2.2}$$

Такі об'єкти визначаються як інтеграли від вимірних функцій за розподілами перехідних ймовірностей, що існують завдяки марковській властивості процесів X_n відносно натурального потоку в точках $t_{n,k}$ (функціонали визначаються значеннями процесів в скінченій кількості точок).

Надалі для спрощення будемо позначати $G^0_{n,k} \stackrel{\text{def}}{=} G_{n,k}, \phi_{n,0} \stackrel{\text{def}}{=} \phi_n, f_{n,0} \stackrel{\text{def}}{=} f_n$.

Введемо такі об'єкти, як випадкові ламані, що є "лінеаризацією" розривних функціоналів ϕ_n.

$$\psi_n^{s,t} = \phi_n^{t_{n,j-1},t_{n,k-1}} - (ns - j + 1)\phi_n^{t_{n,j-1},t_{n,j}} + (nt - k + 1)\phi_n^{t_{n,k-1},t_{n,k}}, \tag{2.3}$$

$$s \in [t_{n,j-1}, t_{n,j}), t \in [t_{k-1}, t_{n,k}).$$

Випадкові ламані ψ_n та функціонал ϕ можна інтерпретувати, як випадкові елементи зі значеннями в $C(\mathbb{T})$, $\mathbb{T} = \{(s,t) : \quad 0 \le s < t < T\}$.

В наступному твердженні підхід до дослідження граничної поведінки функціоналів за допомогою характеристик поєднується з процедурою "згладження", що дозволяє послабити умови на збіжність процесів X_n в Теоремі 1 [1]. Позначимо $\|g\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x\in\mathfrak{X}} |g(x)|$.

Теорема 1. *Розглянемо сім'ю функцій* $\left\{G^\epsilon_{n,k}\right\} \in C(\mathfrak{X}, \mathbb{R}^+), k, \ge 0, n \ge 1, \epsilon > 0$ *та відповідну сім'ю граничних функцій* $\{G^\epsilon \in C(\mathbb{R}^+ \times \mathfrak{X}, \mathbb{R}^+)\}$, *обмежених за другою координатою та таких, що для кожного* $T > 0$ *виконуються умови*

(1) *для кожного* $\epsilon > 0$

$$\varkappa_{n,\epsilon} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{t_{n,k}<T} \sup_{x\in\mathfrak{X}} \left|G^\epsilon_{n,k}(x) - G^\epsilon(t_{n,k}, x)\right| \to 0,\ n \to \infty.$$

(2) *для кожних* $x \in \mathfrak{X}, \quad n, k : t_{n,k} < T$ *має місце* $G^\epsilon_{n,k}(x) \to G_{n,k}(x)$, $\epsilon \to 0$.

(3) $\phi_\epsilon \xrightarrow{\text{w}} \phi$ *за розподілом в* $C(\mathbb{T})$ *при* $\epsilon \to 0$, *де функціонал* ϕ_ϵ *визначений як* $\phi^{s,t}_\epsilon \stackrel{\text{def}}{=} \int_s^t G^\epsilon(u, X(u))\,du$, $(s,t) \in \mathbb{T}$. *При цьому, збіжність їхніх характеристик рівномірна на* $\mathfrak{X}$:

$$\alpha_\epsilon \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{(s,t)\in\mathbb{T}} \left\|f^{s,t}_\epsilon - f^{s,t}\right\| \to 0, \epsilon \to 0.$$

(4) $\delta_n \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{t_{n,k}<T} \sup_{x\in\mathfrak{X}} \Delta t_{n,k} G_{n,k}(x) \to 0,\ n \to \infty$.

(5) $\tau_n \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\epsilon\ge 0} \sup_{(s,t)\in\mathbb{T}} \left\|f^{s,t}_{n,\epsilon} - f^{s,t}_\epsilon\right\| \to 0,\ n \to \infty$.

Тоді має місце збіжність за розподілом в $C(\mathbb{T})$ *для випадкових ламаних, що відповідають функціоналам* ϕ_n: $\psi_n \to \phi, \quad n \to \infty$.

В цьому та наступних розділах будемо вважати, що початкові розподіли процесів X,X_n однакові фіксовані. Для доведення основного твердження достатньо показати, що скінченновимірні розподіли ψ_n збігаються до розподілів ϕ та є щільними. Зауважимо, що щільність розподілів виводиться зі збіжності за допомогою прийомів з [1] (див. завершення доведення Теореми 1 на стор. 12). Тому, для доведення твердження залишається довести, що $\phi^{s,t}_n$ слабко збігаються до $\phi^{s,t}$ при фіксованих s, t.

Доведемо, що для будь-якої ліпшицевої функції g та $\epsilon > 0$ виконано

$$Mg\left(\phi^{s,t}_{n,\epsilon}\right) \to Mg\left(\phi^{s,t}_\epsilon\right), n \to \infty. \tag{2.4}$$

Тут і далі за текстом математичне сподівання відповідає певному фіксованому початковому розподілу процесу X

Для скорочення записів будемо позначати $t_k = t_{n,k}, \Delta t_k = \Delta t_{n,k}$. Неважко переконатися в наступній оцінці

$$\left|Mg\left(\phi_{n,\epsilon}^{s,t}\right) - Mg\left(\phi_{\epsilon}^{s,t}\right)\right| \leq Lip(g) \cdot M\left(\sum_{k:s\leq t_k<t}\left|G^{\epsilon}\left(t_k, X_n\left(t_k\right)\right) - G_{n,k}^{\epsilon}\left(X_n\left(t_k\right)\right)\right|\Delta t_k\right)$$

$$+\left|Mg\left(\sum_{k:s\leq t_k<t} G^{\epsilon}\left(t_k, X_n\left(t_k\right)\right)\Delta t_k\right) - Mg\left(\int_s^t G^{\epsilon}\left(u, X(u)\right)du\right)\right| \leq$$

$$\leq Lip(g)\cdot T\cdot \sup_{x\in\mathfrak{X}}\sup_{k\geq 0}\left|G^{\epsilon}\left(t_k, x\right) - G_{n,k}^{\epsilon}(x)\right| +$$

$$+\left|Mg\left(\sum_{k:s\leq t_k<t} G^{\epsilon}\left(t_k, X\left(t_k\right)\right)\Delta t_k\right) - Mg\left(\int_s^t G^{\epsilon}\left(u, X\left(u\right)\right)du\right)\right| +$$

$$+\left|Mg\left(\sum_{k:s\leq t_k<t} G^{\epsilon}\left(t_k, X_n\left(t_k\right)\right)\Delta t_k\right) - Mg\left(\sum_{k:s\leq t_k<t} G^{\epsilon}\left(t_k, X\left(t_k\right)\right)\Delta t_k\right)\right|.$$

Перший доданок прямує до нуля при $n\to\infty$ за умовою теореми.

Те, що другий також прямує до нуля можна встановити за допомогою наступних міркувань. По-перше відмітимо, що оскільки траєкторії X належать простору $\mathbb{D}$, то такому ж простору будуть належати функції $G^{\epsilon}(X(\cdot),\cdot)$. З цього випливає інтегрованість за Ріманом останніх та збіжність відповідних інтегральних сум до інтегралу Рімана, що в цьому випадку співпадає з інтегралом Лебега. Тому, майже напевно $\sum_{k:s\leq t_k<t} G^{\epsilon}\left(t_k, X\left(t_k\right)\right)\Delta t_k l \to \int_s^t G^{\epsilon}\left(u, X\left(u\right)\right)du, |\lambda_n| \to 0$. Разом з теоремою Лебега про мажоровану збіжність та неперервністю g це доводить потрібне твердження.

Для того, щоб довести, що третій доданок прямує до нуля, можна скористатися принципом Скорохода єдиного ймовірнісного простору, а саме вважати, що X_n збігаються до X в метриці Скорохода $d(\cdot,\cdot)$ майже напевно. В такий ситуації за твердженням на стор. 157 [5] буде існувати послідовність монотонно зростаючих випадкових функцій $\theta_n : [0,T] \to [0,T]$, що є бієкціями та таких, що $a_n' = \|\theta_n(\cdot) - \cdot\|_{C[0,T]} \to 0, a_n'' = \|X\left(\theta_n\left(\cdot\right)\right) - X_n\left(\cdot\right)\|_{\infty} \to 0, n\to\infty$. Тепер, оцінимо останній доданок зверху як

$$\sum_{k:s\leq t_k<t}\left|G^{\epsilon}\left(t_k, X_n\left(t_k\right)\right) - G^{\epsilon}\left(t_k, X\left(\theta_n\left(t_k\right)\right)\right)\right|\Delta t_k +$$

$$+\sum_{k:s\leq t_k<t}\left|G^{\epsilon}\left(t_k, X\left(t_k\right)\right) - G^{\epsilon}\left(t_k, X\left(\theta_n\left(t_k\right)\right)\right)\right|\Delta t_k \leq$$

$$\omega_{G_{\epsilon}}\left(a_n'' + |\lambda_n|\right) + \sum_{k:s\leq t_k<t}\left|G^{\epsilon}\left(t_k, X\left(t_k\right)\right) - G^{\epsilon}\left(t_k, X\left(\theta_n\left(t_k\right)\right)\right)\right|\Delta t_k,$$

де використовується позначення $\omega_f(\epsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x_1,x_2\in\mathfrak{X}}\left|f(x_1) - f(x_2)\right|$. Перший доданок прямує до нуля. Для того, щоб довести, що другий доданок також прямує до нуля м.н., нам знадобиться наступна

Лема 1. *Нехай $g\in\mathbb{C}([0,1]\times\mathfrak{X},\mathbb{R})$ обмежена, $h\in\mathbb{D}\left([0,1],\mathfrak{X}\right)$, $\lambda_n = \{t_{n,k}\}$ та θ_n такі самі, як і вище. Позначимо $\Delta_{g,h,\theta_n}\left(t_{n,k}\right) \stackrel{\text{def}}{=} g\left(t_{n,k}, h\left(t_k\right)\right) - g\left(t_{n,k}, h\left(\theta_n\left(t_{n,k}\right)\right)\right)$. Тоді*

$$\sum_k\left|\Delta_{g,h,\theta_n}\left(t_{n,k}\right)\right|\Delta t_{n,k}\to 0,\quad n\to\infty. \tag{2.5}$$

Позначимо $\widetilde{\omega}_h^A(\bar{\epsilon}) = \sup\limits_{\substack{|u-v|<\bar{\epsilon} \\ u,v\in A}} \rho\left(h(u), h(v)\right)$, $\quad \widetilde{\omega}_h^A = \overline{\lim\limits_{\bar{\epsilon}\to 0}} \widetilde{\omega}_h^A(\bar{\epsilon})$, де $A \subset [s,t]$, останній вираз не перевищує величини найбільшого стрибка h на замиканні A. Нехай $\Upsilon = \{u_n\}$ – точки стрибків h, занумеровані за розміром стрибка (це можливо, оскільки h належить простору $\mathbb{D}$). Зафіксуємо $\delta > 0$ та позначимо $N_\delta \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{n : u_n \geq \delta\}$, $\Upsilon_\delta = \{u_n, n = 1,..,N_\delta\}$. Зафіксуємо $\epsilon > 0$ та розглянемо $\Upsilon_\delta^\epsilon = B\left(\Upsilon_\delta, \epsilon\right)$. За побудовою, $\widetilde{\omega}_h^{[0,1]\setminus\Upsilon_\delta^\epsilon} \leq \delta$. Останнім зафіксуємо $\gamma > 0$ та нехай тепер n достатньо велике, щоб $a_n' = \|\theta_n(\cdot) - \cdot\| < \gamma$. Таким чином, вираз в лівій частині (2.5) оцінюється як

$$\sum_{k:t_{n,k}\in\Upsilon_\delta^{2\epsilon}} \left|\Delta_{g,h,\theta_n}\left(t_{n,k}\right)\right| \Delta t_{n,k} + \sum_{k:t_{n,k}\overline{\in}\Upsilon_\delta^{2\epsilon}} \left|\Delta_{g,h,\theta_n}\left(t_{n,k}\right)\right| \Delta t_{n,k} \leq$$

$$\leq 4N_\delta\epsilon \times 2\|g\|_\infty + \omega_g\left(\lambda_n + \widetilde{\omega}_h^{[0,1]\setminus\Upsilon_\delta^{2\epsilon}}(\gamma)\right).$$

Одже, оскільки γ довільне, верхня границя при $n\to\infty$ лівої частини в (2.5) не перевищить

$$8N_\delta\epsilon\|g\|_\infty + \omega_g\left(\widetilde{\omega}_h^{[0,1]\setminus\Upsilon_\delta^{2\epsilon}}\right) \leq 8N_\delta\epsilon\|g\|_\infty + \omega_g\left(\delta\right).$$

Тепер, обираючи довільним спочатку δ, а потім ϵ, отримуємо доведення леми. Цим самим доведено, що 2.4 виконано.

Наступним кроком в доведенні твердження теореми є доведення того, що для довільної $g \in Lip(\mathbb{R})$ має місце

$$\overline{\lim_{\epsilon\to 0}} \limsup_{n\to\infty} \left|Mg\left(\phi_{n,\epsilon}^{s,t}\right) - Mg\left(\phi_n^{s,t}\right)\right| = 0. \tag{2.6}$$

Для цього нам знадобиться оцінка граничної поведінки $M\left|\phi_{n,\epsilon_1}^{s,t} - \phi_{n,\epsilon_2}^{s,t}\right|$ при $n\to\infty$.

Лема 2. *Виконується нерівність*

$$M\left|\phi_{n,\epsilon_1}^{s,t} - \phi_{n,\epsilon_2}^{s,t}\right| \leq \left[2\left(\left\|f^{0,T}\right\| + \tau_n + \alpha_{\epsilon_1} + \alpha_{\epsilon_2}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times\left[\varkappa_{n',\epsilon} + \delta_n + \sup_{0\leq s<t\leq T}\left\|f_{n,\epsilon_1}^{s,t} - f_{n,\epsilon_2}^{s,t}\right\|\right]^{\frac{1}{2}}.$$

За нерівністю Коші

$$M\left|\phi_{n,\epsilon_1}^{s,t} - \phi_{n,\epsilon_2}^{s,t}\right| \leq \left(M\left(\phi_{n,\epsilon_1}^{s,t} - \phi_{n,\epsilon_2}^{s,t}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.7}$$

Позначимо $\xi_n \stackrel{\text{def}}{=} \phi_{n,\epsilon_1}, \zeta_n \stackrel{\text{def}}{=} \phi_{n,\epsilon_2}$, $\epsilon \stackrel{\text{def}}{=} \max(\epsilon_1,\epsilon_2)$. Визначимо потік $\mathcal{F}_t^n$ як натуральну фільтрацію, породжену процесом X_n. Позначимо $N_T = \#\left\{\lambda_n \bigcap [0,T]\right\}$, де $\#$ позначає кількість елементів множини. Достатньо розглянути випадок $s=0$, $t=T$, $t_{n,N_T+1}=T$. Величина, що стоїть під степенем $1/2$ в останній рівності може бути переписана в наступному вигляді

$$M\left(\sum_{i=0}^{N_T}\sum_{k=0}^{N_T}\left(\xi_n^{t_{n,i},t_{n,i+1}} - \zeta_n^{t_{n,i},t_{n,i+1}}\right)\left(\xi_n^{t_{n,k},t_{n,k+1}} - \zeta_n^{t_{n,k},t_{n,k+1}}\right)\right) =$$

$$= 2M\left[\sum_{i=0}^{N_T}\sum_{k=i+1}^{N_T}\left(\xi_n^{t_{n,i},t_{n,i+1}} - \zeta_n^{t_{n,i},t_{n,i+1}}\right)\left(\xi_n^{t_{n,k},t_{n,k+1}} - \zeta_n^{t_{n,k},t_{n,k+1}}\right)\right] +$$

$$+\sum_{i=0}^{N_T}\left(\xi_n^{t_{n,i},t_{n,i+1}} - \zeta_n^{t_{n,i},t_{n,i+1}}\right)^2 \leq$$

$$\leq 2M\left[M\left(\sum_{i=0}^{N_T}\sum_{k=i+1}^{N_T}\xi_n^{t_{n,i},t_{n,i+1}} \times \left(\xi_n^{t_{n,k},t_{n,k+1}} - \zeta_n^{t_{n,k},t_{n,k+1}}\right) \middle|\ \mathcal{F}_{t_{n,i+1}}^n\right)\right] +$$

$$2M\left[M\left(\sum_{i=0}^{N_T}\sum_{k=i+1}^{N_T}\zeta_n^{t_{n,i},t_{n,i+1}}\times\left(\xi_n^{t_{n,k},t_{n,k+1}}-\zeta_n^{t_{n,k},t_{n,k+1}}\right)\Big|\quad\mathcal{F}^n_{t_{n,i+1}}\right)\right]+\beta_{n,\epsilon}\le$$
$$\le 2\left(\left\|f^{0,T}_{n,\epsilon_1}\right\|+\left\|f^{0,T}_{n,\epsilon_2}\right\|\right)\times\sup_{0\le s<t\le T}\left\|f^{s,t}_{n,\epsilon_1}-f^{s,t}_{n,\epsilon_2}\right\|+\beta_{n,\epsilon},\tag{2.8}$$

де

$$\beta_{n,\epsilon}\overset{\text{def}}{=}\left(\left\|f^{0,T}_{n,\epsilon_1}\right\|+\left\|f^{0,T}_{n,\epsilon_2}\right\|\right)\times(\varkappa_{n,\epsilon}+\delta_n)\le 2\left(\left\|f^{0,T}\right\|+\tau_n+\alpha_{\epsilon_1}+\alpha_{\epsilon_2}\right)\times(\varkappa_{n,\epsilon}+\delta_n).$$

Тепер застосуємо лему Фату при $\epsilon_2\to 0$ для твердження леми, скориставшись умовою 1 теореми:

$$M\left|\phi^{s,t}_{n,\epsilon_1}-\phi^{s,t}_n\right|=M\varliminf_{\epsilon_2\to 0}\left|\phi^{s,t}_{n,\epsilon_1}-\phi^{s,t}_{n,\epsilon_2}\right|\le\varliminf_{\epsilon_2\to 0}M\left|\phi^{s,t}_{n,\epsilon_1}-\phi^{s,t}_{n,\epsilon_2}\right|\le$$
$$\le\left(2\left\|f^{0,T}\right\|+\tau_n+\alpha_{\epsilon_1}\right)^{\frac12}\times\left[\varkappa_{n,\epsilon}+\delta_n+\alpha_{\epsilon_1}+\tau_n\right]^{\frac12}.$$

Остаточно,

$$\limsup_{n\to\infty}M\left|\phi^{s,t}_{n,\epsilon}-\phi^{s,t}_n\right|\le\left(2\alpha_\epsilon\left\|f^{0,T}\right\|+(\alpha_\epsilon)^2\right)^{\frac12},$$

при цьому права частина прямує до нуля при $\epsilon\to 0$.

Як наслідок, для завершення доведення теореми достатньо зауважити, що для будь-якої ліпшицевої функції g виконано

$$\left|Mg(\phi^{s,t})-Mg(\phi^{s,t}_n)\right|\le$$
$$\le\left|Mg(\phi^{s,t})-Mg(\phi^{s,t}_\epsilon)\right|+\left|Mg(\phi^{s,t}_\epsilon)-Mg(\phi^{s,t}_{n,\epsilon})\right|+\left|Mg(\phi^{s,t}_n)-Mg(\phi^{s,t}_{n,\epsilon})\right|.$$

Переходячи до границі при $n\to\infty$ та використовуючи довільність вибору ϵ, з отриманих вище оцінок отримаємо твердження теореми.

3. Рівномірний принцип інваріантності

В цьому розділі розглядається сім'я функціоналів $\{\phi_{n,\mu}, n\ge 1, \mu\in\mathfrak{M}\}$ вигляду (1.1), де, на відміну від попереднього розділу, множина параметрів $\mathfrak{M}$ може мати загальний вигляд та не співпадати з $\mathbb{R}^+$.

Зауважимо, що функціонали $\phi_{n,\mu}$, хоча і мають такий самий запис та вигляд (1.1) з $\phi_{n,\epsilon}$, проте в постановці першого розділу індекс ϵ був додатнім та мав тлумачення як близькість до деякого фіксовано функціоналу.

Відповідні функції позначаються $F_{n,\mu}$, випадкові ламані – $\psi_{n,\mu}$. Нехай множина $\mathfrak{M}$ оснащена послідовністю преметрик $\delta_n(\cdot,\cdot)$ Нагадаємо, що функція називається преметрикою, якщо вона є скінченою, симетричною та дорівнює нулю за рівності аргументів (див. [8] стор. 129).

Характеристики таких функціоналів визначаються так само, як і у попередній секції:

$$f^{s,t}_{n,\mu}(x)\overset{\text{def}}{=}M_x\left(\phi^{s,t}_{n,\mu}\right).\tag{3.1}$$

В цьому розділі розв'язується питання щодо збіжності узагальнених процесів $\{\phi_{n,\mu}\}$ з простором параметрів $\mathfrak{M}$ та фазовим простором $C(\mathbb{T})$. Такий результат має цінність як сам по собі, так і в отриманні результатів про рівномірну на $\mathfrak{M}$ збіжність розподілів функціоналів відносно певної метрики, що метризує слабку збіжність.

Доведення збіжності узагальнених процесів основане на оцінці зверху експоненційного моменту різниці двох функціоналів, заданих різними параметрами. Така оцінка отримується завдяки технікам, аналогічним [7] та оцінці L_2 відстані між функціоналами відстанню між їхніми характеристиками, що спирається на техніку з робіт [1]-[3]. При цьому, на відміну від [7], умови на незалежність приростів дограничних функціоналів не накладаються.

Зауважимо, що при застосуванні результатів даного розділу збіжність функціоналів для кожного окремого параметру може бути встановлена як за допомогою технік з робот [1]-[3], так і за допомогою методів з попереднього розділу.

Позначимо
$$\rho_n(\mu,\nu) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{(s,t)\in\mathbb{T}} \left[\left\|f_{n,\mu}^{s,t} - f_{n,\nu}^{s,t}\right\| + \delta_n(\mu,\nu)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Нехай $N(n,\epsilon)$ це мінімальна кількість ϵ-кульок, необхідних для того, щоб покрити множину $\mathfrak{M}$ в преметриці ρ_n, $H_n(\epsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \ln N(n,\epsilon)$ Для скорочення запису позначаємо $t_k = t_{n,k}$. Як і в попередньому пункті розглядаються випадкові ламані $\psi_{n,\mu}$. Будемо позначати через C будь-які константи, явний вигляд яких не має значення при цьому їх не нумеруємо.

Теорема 2. *Нехай для деякого $T > 0$ виконані наступні умови*

(1) $\sup_{n\geq 1,\mu\in\mathfrak{M}} \left\|f_{n,\mu}^{0,T}\right\| < +\infty$,
(2) $\sup_{\mu\in\mathfrak{M}} \sup_{(s,t)\in\mathbb{T}} \left\|f_{n,\mu}^{s,t} - f_{\mu}^{s,t}\right\| \to 0, n\to\infty$,
(3) $\sup_{x\in\mathfrak{X}} \sup_{(s,t)\in\mathbb{T}} M_x \left(\sum\limits_{k:s\leq t_k<t} \left(F_{n,k}^{\mu}(X_n(t_k)) - F_{n,k}^{\nu}(X_n(t_k))\right)^2\right) \leq C\delta_n(\mu,\nu)$,
(4) $\sup_{n\geq 1} \int_0^\infty H_n(\epsilon)d\epsilon < +\infty$.
(5) $\sup_{\mu,\nu\in\mathfrak{M}:\rho_n(\mu,\nu)<\Delta} \sup_{(s,t)\in\mathbb{T}} \left\|f_{\mu}^{s,t} - f_{\nu}^{s,t}\right\| \to 0, \Delta\to 0$,
(6) *має місце збіжність випадкових ламаних $\psi_{n,\mu} \xrightarrow{\text{w}} \phi_\mu, n\to\infty$ в $C(\mathbb{T})$ для кожного фіксованого μ, при цьому для кожної скінченої кількості параметрів μ має місце слабка збіжність спільних розподілів.*

Тоді узагальнений процес $\psi_{n,\cdot}$ з множиною параметрів $\mathfrak{M}$ та значеннями в $C(\mathbb{T})$ збігається слабко до узагальненого процесу $\phi_\cdot$ в просторі $C(\mathfrak{M}, C(\mathbb{T}))$.

Зауваження 1. Припускається, що для кожного n узагальнені процеси $\phi_{n,\mu}$ та ϕ_μ неперервні за параметром μ.

Доведення Нагадаємо, що сім'я ймовірнісних мір $\mathfrak{P}$ називається відносно компактною, якщо для будь-якої послідовності $\{P_n, n\geq 1\}\subset\mathfrak{P}$ можна виділити слабко збіжну підпослідовність. Сім'я мір $\mathfrak{P}$ називається щільною, якщо для будь-якого $\epsilon > 0$ існує такий компакт K, що $\inf_{P\in\mathfrak{P}} P(K) > 1-\epsilon$. За відомим результатом ([5],стор.55) для доведення слабкої збіжності мір на нескінченновимірних просторах достатньо показати збіжність скінченновимірних розподілів та відносну компактність такої послідовності мір. Теорема Прохорова [5] встановлює, що сім'я мір на повному сепарабельному метричному просторі є відносно компактною, якщо вона є щільною.

Через це доведення основного твердження данного розділу зводиться до доведення щільності мір, породжених узагальненим процесом $\{\phi_{n,\mu}, \mu\in\mathfrak{M}\}$. Зафіксуємо n та розглянемо два довільних параметра μ,ν, позначимо відповідні функціонали $\xi_n \stackrel{\text{def}}{=} \phi_{n,\mu}, \zeta_n \stackrel{\text{def}}{=} \phi_{n,\nu}$. Нехай σ,τ є двома марковськими моментами зупинки відносно фільтрації $\{\mathcal{F}_t | t\geq 0\}$, такі, що $0<\sigma\leq\tau<T, \sigma,\tau\in n\mathbb{Z}$ майже напевно. Проведемо оцінку наступної величини $M_x\left(|\xi_n^{\sigma,\tau} - \zeta_n^{\sigma,\tau}| \mid \mathcal{F}_\sigma\right)$. Спочатку застосуємо нерівність Коші та проведемо L_2 оцінки, так само як і в попередньому розділі.
$$M_x\left(|\xi_n^{\sigma,\tau} - \zeta_n^{\sigma,\tau}| \mid \mathcal{F}_\sigma\right) \leq M_x\left((\xi_n^{\sigma,\tau} - \zeta_n^{\sigma,\tau})^2 \mid \mathcal{F}_\sigma\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.2}$$

Така оцінка дається наступною лемою.

Лема 3. *Виконана нерівність*
$$\sup_{x\in\mathfrak{X}} M_x\left(|\xi_n^{\sigma,\tau} - \zeta_n^{\sigma,\tau}| \mid \mathcal{F}_\sigma\right) \leq \left(8C\sup_{(s,t)\in\mathbb{T}} \|\left\|f_n^{s,t} - g_n^{s,t}\right\| + 2C\delta_n(\mu,\nu)\right)^{\frac{1}{2}} \leq C\rho_n(\mu,\nu).$$

Як і в попередньому розділі позначаємо $N_T = |\lambda_n \bigcap \{0, T\}|$. Вважаємо $t_{N_T+1} = T$. Квадрат величини в правій частині може бути переписаний у вигляді

$$M\left(\sum_{i=0}^{N_T}\sum_{k=0}^{N_T} \mathbf{I}_{\sigma\le t_i<\tau}\mathbf{I}_{\sigma\le t_k<\tau}\left(\xi_n^{t_i,t_{i+1}}-\zeta_n^{t_i,t_{i+1}}\right)\left(\xi_n^{t_k,t_{k+1}}-\zeta_n^{t_k,t_{k+1}}\right)\quad|\mathcal{F}_\sigma\right)=$$

$$=2M\left(\sum_{i=0}^{N_T}\mathbf{I}_{\sigma\le t_i<\tau}\left(\xi_n^{t_i,t_{i+1}}-\zeta_n^{t_i,t_{i+1}}\right)\left(\xi_n^{t_{i+1},\tau}-\zeta_n^{t_{i+1},\tau}\right)\quad|\mathcal{F}_\sigma\right)+$$

$$+M\left(\sum_{i=0}^{N_T}\mathbf{I}_{\sigma\le t_i<\tau}\left(\xi_n^{t_i,t_{i+1}}-\zeta_n^{t_i,t_{i+1}}\right)^2\quad|\mathcal{F}_\sigma\right)\le$$

$$\le 2M\left(\sum_{i=0}^{N_T}\mathbf{I}_{\sigma\le t_i<\tau}\xi_n^{t_i,t_{i+1}}\left(\xi_n^{t_{i+1},\tau}-\zeta_n^{t_{i+1},\tau}\right)\quad|\mathcal{F}_\sigma\right)+$$

$$+2M\left(\sum_{i:t_i\le\tau}\mathbf{I}_{\sigma\le t_i<\tau}\zeta_n^{t_i,t_{i+1}}\left(\zeta_n^{t_{i+1},\tau}-\xi_n^{t_{i+1},\tau}\right)\quad|\mathcal{F}_\sigma\right)+C\delta_n\left(\mu,\nu\right).$$

Тут використано, що

$$M\left(\mathbf{I}_{\sigma=t_i}\sum_{k=i}^{N_T-1}\left(\xi_n^{t_{n,k},t_{n,k+1}}-\zeta_n^{t_{n,k},t_{n,k+1}}\right)^2|\quad\mathcal{F}_\sigma\right)=$$

$$=M\left(\mathbf{I}_{\sigma=t_i}M\left(\sum_{k=i}^{N_T-1}\left(\xi_n^{t_{n,k},t_{n,k+1}}-\zeta_n^{t_{n,k},t_{n,k+1}}\right)^2|\mathcal{F}_{t_i}\right)|\mathcal{F}_\sigma\right)\le C\delta_n(\mu,\nu).$$

Доведемо, що

$$M\left(\mathbf{I}_{\sigma\le t_i<\tau}\zeta_n^{t_i,t_{i+1}}\left(\zeta_n^{t_{i+1},\tau}-\xi_n^{t_{i+1},\tau}\right)\quad|\mathcal{F}_\sigma\right)= \tag{3.3}$$
$$=M\left(M\left(\mathbf{I}_{\sigma\le t_i<\tau}\zeta_n^{t_i,t_{i+1}}\left(\zeta_n^{t_{i+1},\tau}-\xi_n^{t_{i+1},\tau}\right)\quad|\mathcal{F}_{t_{i+1}}\right)|\mathcal{F}_\sigma\right).$$

Дійсно, для кожного $m>0$ та $B\in\mathcal{F}_\sigma$ маємо

$$M\left(\mathbf{I}_{\sigma\le t_m}\mathbf{I}_B\times M\left(\mathbf{I}_{\sigma\le t_i<\tau}\zeta_n^{t_i,t_{i+1}}\left(\zeta_n^{t_{i+1},\tau}-\xi_n^{t_{i+1},\tau}\right)\quad|\mathcal{F}_{t_{i+1}}\right)\right)=$$
$$=M\left(\mathbf{I}_{\sigma\le t_m}\mathbf{I}_B\times M\left(\mathbf{I}_{\sigma\le t_i}\mathbf{I}_{t_i<\tau}\zeta_n^{t_i,t_{i+1}}\left(\zeta_n^{t_{i+1},\tau}-\xi_n^{t_{i+1},\tau}\right)\quad|\mathcal{F}_{t_{i+1}}\right)\right)=$$
$$=M\left(\mathbf{I}_{\sigma\le t_m}\mathbf{I}_{\sigma\le t_i}\mathbf{I}_B\times M\left(\mathbf{I}_{t_i<\tau}\zeta_n^{t_i,t_{i+1}}\left(\zeta_n^{t_{i+1},\tau}-\xi_n^{t_{i+1},\tau}\right)\quad|\mathcal{F}_{t_{i+1}}\right)\right)=$$
$$=M\left(\mathbf{I}_{\sigma\le t_i\wedge t_m}\mathbf{I}_B\times M\left(\mathbf{I}_{t_i<\tau}\zeta_n^{t_i,t_{i+1}}\left(\zeta_n^{t_{i+1},\tau}-\xi_n^{t_{i+1},\tau}\right)\quad|\mathcal{F}_{t_{i+1}}\right)\right)=$$
$$=M\left(M\left(\mathbf{I}_{\sigma\le t_i\wedge t_m}\mathbf{I}_B\times \mathbf{I}_{t_i<\tau}\zeta_n^{t_i,t_{i+1}}\left(\zeta_n^{t_{i+1},\tau}-\xi_n^{t_{i+1},\tau}\right)\quad|\mathcal{F}_{t_{i+1}}\right)\right)=$$
$$=M\left(\mathbf{I}_{\sigma\le t_i\wedge t_m}\mathbf{I}_B\times \mathbf{I}_{t_i<\tau}\zeta_n^{t_i,t_{i+1}}\left(\zeta_n^{t_{i+1},\tau}-\xi_n^{t_{i+1},\tau}\right)\right)=$$
$$=M\left(\mathbf{I}_{\sigma\le t_m}\mathbf{I}_B\times \mathbf{I}_{\sigma\le t_i<\tau}\zeta_n^{t_i,t_{i+1}}\left(\zeta_n^{t_{i+1},\tau}-\xi_n^{t_{i+1},\tau}\right)\right).$$

Тут використано позначення $a\wedge b=\min(a,b)$.

У наведених вище рівностях використано те, що

$$\{\sigma\le t_i\}\in\mathcal{F}_{t_{i+1}},\{\sigma\le t_i\wedge t_m\}\bigcap B\in\mathcal{F}_{t_i\wedge t_m}\subset\mathcal{F}_{t_{i+1}}.$$

Тепер, підсумовуючи отримані рівності за m отримуємо доведення 3.3 (виконано рівняння балансу в означенні умовного математичного сподівання, умова інтегрованості вказаних величин випливає з обмеженості функціоналів ξ_n,ζ_n для кожного n).

Повернемося до початкових оцінок

$$M\left(\sum_{i=0}^{N_T}\mathbf{I}_{\sigma\le t_i<\tau}\xi_n^{t_i,t_{i+1}}\left(\xi_n^{t_{i+1},\tau}-\zeta_n^{t_{i+1},\tau}\right)\quad|\mathcal{F}_\sigma\right)=$$

$$= M\left(\sum_{i=0}^{N_T} M\left(\mathbf{I}_{\sigma\le t_i<\tau}\xi_n^{t_i,t_{i+1}}\left(\xi_n^{t_{i+1},\tau}-\zeta_n^{t_{i+1},\tau}\right) \quad |\mathcal{F}_{t_{i+1}}\right) \quad |\mathcal{F}_\sigma\right)=$$

$$= M\left(\sum_{i=0}^{N_T} \mathbf{I}_{\sigma\le t_i<\tau}\xi_n^{t_i,t_{i+1}} M\left(\xi_n^{t_{i+1},\tau}-\zeta_n^{t_{i+1},\tau} \quad |\mathcal{F}_{t_{i+1}}\right) \quad |\mathcal{F}_\sigma\right). \tag{3.4}$$

Розглянемо детальніше величину $M\left(\xi_n^{t_{i+1},\tau}-\zeta_n^{t_{i+1},\tau} \quad |\mathcal{F}_{t_{i+1}}\right)$:

$$\left|M\left(\xi_n^{t_{i+1},\tau}-\zeta_n^{t_{i+1},\tau} \quad |\mathcal{F}_{t_{i+1}}\right)\right| \le$$

$$\left|M\left(\xi_n^{t_{i+1},T}-\zeta_n^{t_{i+1},T} \quad |\mathcal{F}_{t_{i+1}}\right)\right| + \mathbf{I}_{\tau>t_{i+1}}\left|M\left(\xi_n^{\tau,T}-\zeta_n^{\tau,T} \quad |\mathcal{F}_{t_{i+1}}\right)\right| \le$$

$$\le \sup_{(s,t)\in\mathbb{T}}\left\|f_n^{s,t}-g_n^{s,t}\right\| + \left|M\left(\sum_{k=i+1}^{N_T}\mathbf{I}_{\tau=t_k}\left(\xi_n^{\tau,T}-\zeta_n^{\tau,T}\right) \quad |\mathcal{F}_{t_{i+1}}\right)\right| \le$$

$$\le \sup_{(s,t)\in\mathbb{T}}\left\|f_n^{s,t}-g_n^{s,t}\right\| + \left|M\left(\sum_{k=i+1}^{N_T}\mathbf{I}_{\tau=t_k}\left(\xi_n^{t_k,T}-\zeta_n^{t_k,T}\right) \quad |\mathcal{F}_{t_{i+1}}\right)\right| \le$$

$$\le \sup_{(s,t)\in\mathbb{T}}\left\|f_n^{s,t}-g_n^{s,t}\right\| + \left|M\left(\sum_{k=i+1}^{N_T}\mathbf{I}_{\tau=t_k} M\left(\xi_n^{t_k,T}-\zeta_n^{t_k,T} \quad |\mathcal{F}_{t_k}\right) \quad |\mathcal{F}_{t_{i+1}}\right)\right| \le$$

$$\le \sup_{(s,t)\in\mathbb{T}}\left\|f_n^{s,t}-g_n^{s,t}\right\| + \left|M\left(\sum_{k=i+1}^{N_T}\mathbf{I}_{\tau=t_k} \sup_{(s,t)\in\mathbb{T}}\left\|f_n^{s,t}-g_n^{s,t}\right\| \quad |\mathcal{F}_{t_{i+1}}\right)\right| \le$$

$$\le 2\sup_{(s,t)\in\mathbb{T}}\left\|f_n^{s,t}-g_n^{s,t}\right\|.$$

Це дає оцінку зверху для (3.3):

$$2M\left(\sum_{i=0}^{N_T}\mathbf{I}_{\sigma\le t_i<\tau}\xi_n^{t_i,t_{i+1}}\sup_{0<s<t<T}\left\|f_n^{s,t}-g_n^{s,t}\right\| \quad |\mathcal{F}_\sigma\right) \le$$

$$\le 2\left\|f_n^{s,t}-g_n^{s,t}\right\| M\left(\xi_n^{\sigma,\tau} \quad |\mathcal{F}_\sigma\right).$$

Таким чином, (3.2) оцінюється зверху як

$$C\delta_n(\mu,\nu) + \left(4\sup_{(s,t)\in\mathbb{T}}\left\|f_n^{s,t}-g_n^{s,t}\right\|\right) M\left(\xi_n^{\sigma,\tau}+\zeta_n^{\sigma,\tau} \quad |\mathcal{F}_\sigma\right) \le$$

$$\le C\delta_n(\mu,\nu) + \left(4\sup_{(s,t)\in\mathbb{T}}\left\|f_n^{s,t}-g_n^{s,t}\right\|\right) M\left(\xi_n^{\sigma,\sigma+T}+\zeta_n^{\sigma,\sigma+T} \quad |\mathcal{F}_\sigma\right) =$$

$$\le C\delta_n(\mu,\nu) + \left(4\sup_{(s,t)\in\mathbb{T}}\left\|f_n^{s,t}-g_n^{s,t}\right\|\right) \left(f_n^{\sigma,\sigma+T}\left(X_n(\sigma)\right)+g_n^{\sigma,\sigma+T}\left(X_n(\sigma)\right)\right) \le$$

$$\le C\delta_n(\mu,\nu) + \left(4\sup_{(s,t)\in\mathbb{T}}\left\|f_n^{s,t}-g_n^{s,t}\right\|\right) \left(\sup_{0<s<t<2T}\left\|f_n^{s,t}\right\|+\sup_{0<s<t<2T}\left\|g_n^{s,t}\right\|\right) \le$$

$$\le C\delta_n(\mu,\nu) + 4C\sup_{(s,t)\in\mathbb{T}}\left\|f_n^{s,t}-g_n^{s,t}\right\| \le C\rho_n^2(\mu,\nu).$$

Маємо оцінку:

$$M\left(\left|\xi_n^{\sigma,\tau}-\zeta_n^{\sigma,\tau}\right| \quad |\mathcal{F}_\sigma\right) \le C\rho_n(\mu,\nu).$$

Скористаємося Теоремою 109 на стор. 176 [6]. Отримуємо, що

$$M\exp\left(\lambda\sup_{\substack{sn,tn\in\mathbb{Z}\\0<s<t<T}}\left|\xi_n^{s,t}-\zeta_n^{s,t}\right|\right) \le \frac{1}{1-4\lambda C\rho_n(\mu,\nu)},$$

де $\lambda \in (0, \frac{1}{4\rho_n(\mu.\nu)})$.

Обравши $\lambda_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{8\rho_n(\mu,\nu)}$, отримуємо оцінку

$$M \exp\left(\lambda_n \sup_{\substack{sn,tn\in\mathbb{Z}\\(s,t)\in\mathbb{T}}} \left|\xi_n^{s,t} - \zeta_n^{s,t}\right|\right) \leq \frac{1}{1 - 4\lambda_n\rho_n(\mu,\nu)} = 2,$$

За допомогою нерівності Чебишева це дозволяє отримати оцінки на розподіли "хвостів" різниці двох локальних часів:

$$P\left\{\sup_{\substack{sn,tn\in\mathbb{Z}\\(s,t)\in\mathbb{T}}} \left|\xi_n^{s,t} - \zeta_n^{s,t}\right| > H\right\} = P\left\{\lambda_n \sup_{\substack{sn,tn\in\mathbb{Z}\\(s,t)\in\mathbb{T}}} \left|\xi_n^{s,t} - \zeta_n^{s,t}\right| > \lambda_n H\right\} \leq$$

$$\leq M \exp\left(\lambda_n \sup_{\substack{sn,tn\in\mathbb{Z}\\(s,t)\in\mathbb{T}}} \left|\xi_n^{s,t} - \zeta_n^{s,t}\right|\right) \cdot \exp\left(-\lambda_n H\right) \leq$$

$$\leq 2\exp\left(-\lambda_n H\right) = 2\exp\left(-H\frac{1}{8\rho_n(\mu,\nu)}\right).$$

Повернемося до початкових позначень, тобто $\phi_{n,\mu} = \xi_m, \phi_{n,\nu} = \zeta_n$. Зауважимо, що $\psi_{n,\mu}$ кусково-лінійні, тому

$$\|\psi_{n,\mu} - \psi_{n,\nu}\|_{C(\mathbb{T})} = \sup_{(s,t)\in\mathbb{T}} \left|\psi_{n,\mu}^{s,t} - \psi_{n,\nu}^{s,t}\right| = \sup_{\substack{sn,tn\in\mathbb{Z}\\(s,t)\in\mathbb{T}}} \left|\phi_{n,\mu}^{s,t} - \phi_{n,\nu}^{s,t}\right|.$$

Через це оцінка для розподілу відстані між випадковими ламаними наступна

$$P\left\{\|\psi_{n,\mu} - \psi_{n,\nu}\|_{C(\mathbb{T})} > H\right\} \leq 2\exp\left(-\frac{H}{8\rho_n(\mu,\nu)}\right)$$

Застосуємо Лему 2.1 стор.134 [8]. Відмітимо, що її формулювання дословно переноситься на випадок, коли $X_\lambda(t)$ приймають значення в $C(\mathbb{T})$, а метрика в цьому просторі рівномірна.

В нашому випадку, в якості параметрів s, t леми виступають μ, ν, які визначають функціонали ξ_n, ζ_n. В якості Λ розглядається множина натуральних чисел $\mathbb{N}$. В якості преметрики $\rho - \rho_n$.

Перевіримо виконання умов леми:

(1) $\forall A > 0, n \in \mathbb{N}$

$$P\left\{\|\psi_{n,\mu} - \psi_{n,\nu}\|_{C(\mathbb{T})} > A\right\} \leq C\exp\left(-\frac{A}{8\rho_n(\mu,\nu)}\right)$$

(2) Виконано, оскільки

$$\sup_{n\geq 1} \rho_n(\mu,\nu) \leq \sqrt{\delta(\mu,\nu) + 2\sup_{n,\varkappa} \left\|f_{n,\varkappa}^{0,T}\right\|} < +\infty.$$

(3) $\int_{(0,+\infty)} H_{\rho_n}(\epsilon)d\epsilon < +\infty$, – безпосередньо випливає з умови 4 основного твердження.

Як наслідок, для будь-якого $\epsilon > 0$ виконано:

$$\overline{\lim_{\Delta\to 0}} \sup_{n\in\mathbb{N}} P\left\{\sup_{\substack{\mu,\nu\in\mathfrak{S}\\ \rho_n(\mu,\nu)<\Delta}} \|\psi_{n,\mu} - \psi_{n,\nu}\| > \epsilon\right\} = 0,$$

де $\mathfrak{S}$ - довільна злічена підмножина $\mathfrak{M}$.

Таким чином для завершення доведення твердження достатньо застосувати стандартні методи доведення слабкої збіжності на метричних просторах. Для цього достатньо відмітити, що з доведеної одностайної неперервності сім'ї функціоналів за параметром μ випливає відносна компактність сім'ї розподілів процесів $\phi_{n,\cdot}$. З урахуванням збіжності скінченовимірних розподілів функціоналів це завершує доведення теореми.

Література

1. Yu.N.Kartashov, A.M.Kulik, *Weak convergence of additive functionals of a sequence of Markov chains*, Theory of stochastic processes, 2009, 15(31), №1, 15 – 32.
2. Карташов Ю.М. *Достатні умови збіжності функціоналів типу локального часу від марковських апроксимацій*, Теорія ймовірностей та математична статистика, № 77 (2008), 39-55.
3. Карташов Ю.М., Кулик А.М. *Сходимость разностных аддитивных функционалов при локальных условиях на их характеристики*, Український математичний журнал, № 9 (2009) том 61, 1208-1224
4. Kulik A.M. *Markov Approximation of stable processes by random walks*, Theory of stochastic proccesses, **12(28)** (2006), №1-2.
5. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер.–М.: Наука, 1977. – 352 с.
6. Dellacherie C., P.-A. Meyer, *Probabilities and Potential B.* North-Holland Publishing Company, 1982
7. R. Bass, D.Khoshnevesyan, *Local Times on Curves and Uniform Invariance Principles*, Prob. Theory Rel. Fields, 465 **492**, 1992
8. V.V.Buldygin, Yu.V. Kozachenko, *Metric Characterization of Random Variables and Random Processes* Translations of Mathematical Monographs, V.188, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2000
9. Дынкин Е.Б. *Марковские процессы*, Москва, "Физматгиз", 1963
10. Ширяев А.Н. *Вероятность*, Москва, "Наука", 1980

Кафедра теорії ймовірностей та математичної статистики, механіко-математичний факультет, Національний університет ім. Тараса Шевченка, проспект Глушкова, 6, Київ 03127, Україна

Адреса електронної пошти: kartashov-y@yandex.ru

Надійшла 03/03/2010