Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 84, 2011, стор. 77–83

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 84, 2011, pp. 77–83

СЕРЕДНІЙ ЧАС СКЛЕЮВАННЯ НЕЗАЛЕЖНИХ ДИСКРЕТНИХ ПРОЦЕСІВ ВІДНОВЛЕННЯ

УДК 519.21

М. В. КАРТАШОВ І В. В. ГОЛОМОЗИЙ

Анотація. Розглядаються два незалежні процеси відновлення з дискретними та можливо різними розподілами інтервалів відновлення. Знайдено оцінку для середнього часу склеювання через перші два моменти вказаних розподілів.

Abstract. We consider two independent renewal processes with discrete and in general distinct renewal distributions. The mean coupling time is estimated by the first two moments of those distributions.

Аннотация. Рассматриваются два независимых дискретных процесса восстановления с возможно разными распределениями интервалов восстановления. Найдено явное неравенство для среднего времени склеивания с помощью первых двух моментов указанных распределений.

1. Вступ

Теорія склеювання, зокрема, для процесів відновлення, викладена у [1].

У даній роботі знайдено явні оцінки для середнього часу склеювання двох дискретних процесів відновлення через перші два моменти інтервалів відновлення у припущенні аперіодичності. Ці оцінки спираються на явні нерівності для мінімуму послідовності відновлення [2], та можуть бути застосовані для оцінки ергодичності та стійкості марковських процесів.

2. Процеси відновлення та оцінка часу склеювання

Розглянемо дві незалежні послідовності $(\theta_{lj}, j \geq 1)$, $l = 1, 2$, незалежних у сукупності однаково розподілених у кожній послідовності випадкових величин із цілими додатними значеннями, та незалежні від них величини τ_{l0}, $l = 1, 2$, з цілими невід'ємними значеннями. Позначимо при $l = 1, 2$ відповідні розподіли, моменти та послідовності відновленння

$$g_{lj} = \mathsf{P}(\theta_{l1} = j), \quad j \geq 1, \qquad \mu_l = \mathsf{E}\,\theta_{l1}, \qquad \mu_{l2} = \mathsf{E}(\theta_{l1})^2, \tag{1}$$

$$u_{lj} = \sum_{n \geq 0} (g_l)_j^{*n}, \qquad j \geq 0,\ l = 1, 2. \tag{2}$$

Тут та надалі a^{*n} для послідовності $a = (a_i, i \geq 0)$ означає n-кратну згортку a з собою, а згортка послідовностей a, b визначається як послідовність

$$(a * b)_i = \sum_{s=0}^{i} a_{i-s} b_s, \qquad i \geq 0. \tag{3}$$

Визначимо процеси відновлення

$$\tau_{lk} = \tau_{l0} + \sum_{j=1}^{k} \theta_{lj}, \qquad k \geq 0,\ l = 1, 2, \tag{4}$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60J45; Secondary 60A05, 60K05.

Ключові слова і фрази. Теорія відновлення, підпослідовність відновлення, метод склеювання, час склеювання.

та марковські процеси “перескоку” при $t \geq 0$, $l = 1, 2$:

$$\gamma_{lt} = \inf(\tau_{lk} - t, \tau_{lk} \geq t, k \geq 0). \tag{5}$$

Зауважимо, що $\gamma_{l0} = \tau_{l0}$. Відповідно до вказаного початкового значення позначатимемо умовне сподівання

$$\mathsf{E}_{ij}\,\xi = \mathsf{E}(\xi \mid \gamma_{10} = i, \gamma_{20} = j) = \mathsf{E}(\xi \mid \tau_{10} = i, \tau_{20} = j).$$

Основним об'єктом вивчення у роботі є момент склеювання

$$\zeta \equiv \inf(t \geq 1\colon \gamma_{1t} = \gamma_{2t} = 0) = \inf(\tau_{1n}\colon \exists n, k \geq 0\colon \tau_{1n} = \tau_{2k} > 0). \tag{6}$$

Доведення наступного результату спирається на одне зображення для склеєного процесу відновлення, що наведене у [1].

Нагадаємо, що дискретний розподіл називається аперіодичним, якщо його носій не міститься у строгій підрешітці в $\mathbb{Z}_+$. За цієї умови відповідні процеси відновлення відвідують з додатною імовірністю кожен стан з $\mathbb{N}$, починаючи з деякого номера, тобто можна розраховувати принаймні на майже напевну скінченість момента ζ.

Теорема 1. *Нехай розподіли (g_{1j}) та (g_{2j}) аперіодичні та $\mu_l < \infty$, $l = 1, 2$. Тоді має місце тотожність*

$$\mathsf{E}_{00}\,\zeta = \mu_1\mu_2. \tag{7}$$

Наслідок 1. *Для всіх $k \geq 1$ виконуються нерівності*

$$\mathsf{E}_{k0}\,\zeta \leq (\mu_1\mu_2 - \mathsf{E}\min(\theta_{11}, \theta_{21}))/\,\mathsf{P}(\theta_{11} - \theta_{21} = k),$$
$$\mathsf{E}_{0k}\,\zeta \leq (\mu_1\mu_2 - \mathsf{E}\min(\theta_{11}, \theta_{21}))/\,\mathsf{P}(\theta_{21} - \theta_{11} = k), \tag{8}$$

за умови додатності відповідних знаменників у (8).

Більш загальне твердження використовує додаткову умову типу аперіодичності.

Теорема 2. *Припустимо, що $g_{11} + g_{21} > 0$ та $\mu_{l2} < \infty$, $l = 1, 2$. Тоді для всіх $i, j \geq 0$ з $(i, j) \neq (0, 0)$*

$$\mathsf{E}_{ij}\,\zeta \leq \max(i, j) + C_{12}1_{i\neq j},$$
$$C_{12} = (\mu_{12}/\mu_1 + \mu_{22}/\mu_2 - 2)(1 - (1 - \overline{u}_1)(1 - \overline{u}_2))^{-1},$$
$$\overline{u}_l \geq \exp(\mu_l(1 - g_{l1})^{-1}\ln g_{l1}), \qquad l = 1, 2. \tag{9}$$

Зауваження 1. Значення $\overline{u}_l$ дорівнюють

$$\overline{u}_l = \inf(u_{lj}, j \geq 1), \tag{10}$$

причому додатність $\overline{u}_l$ еквівалентна умові $g_{l1} > 0$.

Простішою для застосувань є наступна нерівність.

Наслідок 2. *В умовах Теореми 2*

$$\mathsf{E}_{ij}\,\zeta \leq i + j + C_{12}. \tag{11}$$

3. Доведення

Надалі будемо вживати позначення

$$m_{ij} = \mathsf{E}_{ij}\,\zeta, \qquad i, j \geq 0. \tag{12}$$

Доведення теореми 1. Визначимо, як у [1], Chapter II, точкові процеси відновлення

$$N_{lk} = \sum_{j\geq 0} 1_{\{\tau_{lj}=k\}}, \qquad k \geq 0,\ l = 1, 2,$$

та випадкову послідовність

$$N_k^* = N_{1k} \cdot N_{2k}, \qquad k \geq 0.$$

Оскільки $\tau_{10} = 0 = \tau_{20}$внаслідок умови $\gamma_{10} = 0 = \gamma_{20}$, то $N_{10} = N_{20} = 1$, а тому $N_0^* = 1$. Далі, з виконання події $N_k^* = 1$ випливає, що $N_{1k} = 1 = N_{2k}$, тому розподіл

N^*_{j+k} при $j \ge 0$ визначено однозначно та не залежить від k. Отже, послідовність N^*_k є точковим процесом відновлення з періодом регенерації

$$\tau^* = \inf(k \ge 1 \colon N^*_k = 1) = \inf(k \ge 1 \colon N_{1k} = 1 = N_{2k}) = \zeta. \tag{13}$$

Далі, за означенням

$$\mathsf{E}\, N^*_k = \mathsf{E}\, N_{1k} \cdot \mathsf{E}\, N_{2k} = u_{1k} \cdot u_{2k}. \tag{14}$$

Внаслідок аперіодичності $u_{1k} \cdot u_{2k} > 0$, починаючи з деякого номера k. Тому з (14) випливає відповідна аперіодичність τ^*. Звідси за дискретною теоремою відновлення [3]

$$\lim_{k\to\infty} \mathsf{E}\, N^*_k = 1/\,\mathsf{E}\,\tau^* = 1/\,\mathsf{E}_{00}\,\zeta. \tag{15}$$

З іншого боку, внаслідок (14) та дискретної теореми відновлення

$$\lim_{k\to\infty} \mathsf{E}\, N^*_k = \lim_{k\to\infty} u_{1k} \cdot u_{2k} = (1/\mu_1)(1/\mu_2).$$

З останньої рівності та (15) виводимо твердження теореми. $\square$

Лема 1. *Мають місце тотожності при* $i, j \ge 1$

$$m_{ij} = 1 + m_{i-1,j-1} 1_{(i,j)\ne(1,1)},$$
$$m_{ij} = \min(i,j) + m_{i-j,0} 1_{i>j} + m_{0,j-i} 1_{j>i}. \tag{16}$$

Доведення є очевидним наслідком означення (5), оскільки при $l = 1, 2$ процес (γ_{lt}) збігається на множині $\{\gamma_{lt} > 0\}$ з рівномірним рухом до точки 0, зокрема $\zeta = i$ при $\gamma_{10} = i = \gamma_{20} \ge 1$.

Доведення наслідка 1. Запишемо за означеннями (5), (4) рівняння методу першого стрибка та врахуємо обидві рівності у (16):

$$\begin{aligned} m_{00} &= 1 + \sum_{i\ge1, j\ge1} g_{1i} g_{2j} m_{i-1,j-1} 1_{(i,j)\ne(1,1)} = 1 + \sum_{i\ge1, j\ge1} g_{1i} g_{2j} (m_{ij} - 1) \\ &= \sum_{i\ge1, j\ge1} g_{1i} g_{2j} \min(i,j) + \sum_{i>j\ge1} g_{1i} g_{2j} m_{i-j,0} + \sum_{j>i\ge1} g_{1i} g_{2j} m_{0,j-i} \\ &= \mathsf{E} \min(\theta_{11}, \theta_{21}) + \sum_{k\ge1} m_{k0}\, \mathsf{P}(\theta_{11} - \theta_{21} = k) + \sum_{k\ge1} m_{0k}\, \mathsf{P}(\theta_{21} - \theta_{11} = k). \end{aligned}$$

Підстановка у останню рівність (7) та урахування невід'ємності її доданків доводить (8). $\square$

Лема 2. *Мають місце рівняння при* $i, j \ge 1$

$$m_{i0} = \sum_{j=1}^{i-1} g_{2j}(j + m_{i-j,0}) + i g_{2i} + \sum_{j>i} g_{2j}(i + m_{0,j-i}),$$
$$m_{0j} = \sum_{i=1}^{j-1} g_{1i}(i + m_{0,j-i}) + j g_{1j} + \sum_{i>j} g_{1i}(j + m_{i-j,0}). \tag{17}$$

Доведення. За марковською властивістю з урахуванням (16) при $i \ge 1$

$$\begin{aligned} m_{i0} &= \mathsf{E}_{i0}\,\zeta = \mathsf{E}_{i0}\, \mathsf{E}(\zeta \mid \gamma_{21})) = \mathsf{E}_{i0}(\mathsf{E}(\zeta \mid \theta_{21} - 1)) = \mathsf{E}_{i0}(1 + m_{i-1,\theta_{21}-1} 1_{(i,\theta_{21})\ne(1,1)}) \\ &= \mathsf{E}_{i0}(m_{i,\theta_{21}}) \\ &= \mathsf{E}_{i0}(\theta_{21} + m_{i-\theta_{21},0}) 1_{\{\theta_{21}<i\}}) + i\, \mathsf{P}(\theta_{21} = i) + \mathsf{E}_{i0}(i + m_{0,\theta_{21}-i}) 1_{\{\theta_{21}>i\}}). \end{aligned}$$

Доведення другої рівності аналогічне. $\square$

Лема 3. *Для дискретного розподілу* $(g_j, j \ge 1)$ *з послідовністю відновлення* $u_r = \sum_{k\ge0} (g)^{*k}_r$ *та функцією* $G_n = \sum_{j>n} g_j$ *має місце тотожність*

$$(u * G)_k \equiv \sum_{j=0}^{k} u_{k-j} G_j = 1, k \ge 0. \tag{18}$$

Доведення наведено у [3].

Доведення теореми 2. Визначимо функції відхилення
$$v_{1i} = m_{i0} - i, \qquad v_{2j} = m_{0j} - j, \qquad i, j \ge 1. \tag{19}$$
Зауважимо, що $v_{lj} \ge 0$, $j \ge 1$, $l = 1, 2$.

Визначимо послідовності $(w_{li}, i \ge 1)$, $l = 1, 2$, з рівнянь
$$\begin{aligned} v_{1i} &= w_{1i} + \sum_{1 \le j < i} g_{2j} v_{1,i-j}, \qquad i \ge 1, \\ v_{2j} &= w_{2j} + \sum_{1 \le i < j} g_{1i} v_{2,j-i}, \qquad j \ge 1. \end{aligned} \tag{20}$$

Підстановкою (19) у перше означення (20) з урахуванням першої тотожності у (17) отримуємо рівності
$$\begin{aligned} w_{1i} \equiv v_{1i} - \sum_{1 \le j < i} g_{2j} v_{1,i-j} &= m_{i0} - i - \sum_{1 \le j < i} g_{2j} (m_{i-j,0} - i + j) \\ &= m_{i0} - \sum_{1 \le j < i} g_{2j} (j + m_{i-j,0}) - i + \sum_{1 \le j < i} g_{2j} i \\ &= i g_{2i} + \sum_{j > i} g_{2j} (i + m_{0,j-i}) - i + \sum_{1 \le j < i} g_{2j} i \\ &= i g_{2i} + \sum_{j > i} g_{2j} (i + v_{2,j-i} - i + j) - i + \sum_{1 \le j < i} g_{2j} i \\ &= \sum_{j > i} (j - i) g_{2j} + \sum_{j > i} g_{2j} v_{2,j-i}, \qquad i \ge 1, \\ w_{2j} &= \sum_{i > j} (i - j) g_{1i} + \sum_{i > j} g_{1i} v_{1,i-j}, \qquad j \ge 1. \end{aligned} \tag{21}$$

Якщо довизначити $v_{10} = 0$ та $w_{10} = 0$, то перше рівняння у (20) є дискретним рівнянням відновлення для невідомої локально обмеженої послідовності (v_{1i}) з локально обмеженою послідовностю (w_{1i}) у правій частині. Тому єдиний розв'язок вказаного рівняння можна зобразити [3] у вигляді згортки з послідовністю відновлення $u_{2j}(2)$:
$$v_{1i} = \sum_{s=1}^{i} u_{2,i-s} w_{1s}, \qquad i \ge 0. \tag{22}$$
Тут підсумовування ведеться, на відміну від [3] та (3), для $s \ge 1$, оскільки $w_{10} = 0$.

Визначимо послідовності
$$G_{ls} = \sum_{j \ge 1} g_{l,j+s} = \sum_{j > s} g_{lj}, \qquad s \ge 0, \ l = 1, 2, \tag{23}$$
$$U_{lj} = (1 * u_l)_j = \sum_{i=0}^{j} u_{li}, \qquad j \ge 0, \ l = 1, 2. \tag{24}$$
Зауважимо, що $G_{l0} = 1$.

Підстановкою першої рівності (21) у рівність (22) з урахуванням (23), (24) та леми 3 отримуємо рівняння
$$v_{1i} = z_{1i} + \sum_{j \ge 1} a_{ij}^{(1)} v_{2j}, \qquad i \ge 1, \tag{25}$$
де
$$a_{ij}^{(1)} = \sum_{s=1}^{i} u_{2,i-s} g_{2,j+s}, \qquad i, j \ge 1, \tag{26}$$

$$
\begin{aligned}
z_{1i} &= \sum_{s=1}^{i} u_{2,i-s} \sum_{j>s} (j-s) g_{2j} = \sum_{s=1}^{i} u_{2,i-s} \sum_{j>s} g_{2j} \sum_{r=1}^{j-s} 1 = \sum_{s=1}^{i} u_{2,i-s} \sum_{r\ge 1} G_{2,r+s-1} \\
&= \sum_{s=1}^{i} u_{2,i-s} \left(\mu_2 - \sum_{0\le r<s} G_{2r} \right) = \mu_2 U_{2,i-1} - \sum_{s=1}^{i} u_{2,i-s} (1 * G_2)_{s-1} \\
&= \mu_2 U_{2,i-1} - (u_2 * 1 * G_2)_{i-1} = \mu_2 U_{2,i-1} - (1*1)_{i-1} = (\mu_2 U_{2,i-1} - (i-1)) - 1.
\end{aligned} \tag{27}
$$

З (27) та з нерівності Дейлі [4] отримуємо

$$
\sup(z_{1i}, i\ge 1) \le \mu_2 \sup(U_{2i} - i/\mu_2, i\ge 0) - 1 \le \mu_2 \left(\mu_{22}/\mu_2^2\right) - 1 = \mu_{22}/\mu_2 - 1. \tag{28}
$$

Далі, при $i \ge 1$ внаслідок (23) та рівності $G_{20} = 1$

$$
\begin{aligned}
\sum_{j\ge 1} a_{ij}^{(1)} &= \sum_{j\ge 1} \sum_{s=1}^{i} u_{2,i-s} g_{2,j+s} = \sum_{s=1}^{i} u_{2,i-s} G_{2s} = (u_2 * G_2)_i - u_{2i} G_{20} = 1 - u_{2i} \\
&\le 1 - \overline{u}_2,
\end{aligned} \tag{29}
$$

де враховано тотожність (18) леми 3 та означення (10).

Аналогічно, з других рівнянь у (17), (19), (20) та (21) виводимо рівняння

$$
v_{2j} = z_{2j} + \sum_{i\ge 1} a_{ji}^{(2)} v_{1i}, \qquad j \ge 1, \tag{30}
$$

де

$$
z_{2j} = \mu_1 U_{1j} - j - \mu_1 u_{1j} = (\mu_1 U_{1,j-1} - (j-1)) - 1, \tag{31}
$$

$$
a_{ji}^{(2)} = \sum_{s=1}^{j} u_{1,j-s} g_{1,i+s}, \qquad i, j \ge 1, \tag{32}
$$

причому

$$
\sup(z_{2j}, j \ge 1) \le \mu_1 \sup(U_{1j} - j/\mu_1, j\ge 0) - 1 \le \mu_{12}/\mu_1 - 1, \tag{33}
$$

$$
\sum_{i\ge 1} a_{ji}^{(2)} = 1 - u_{1j} \le 1 - \overline{u}_1. \tag{34}
$$

Зауважимо, що з умови $g_{11} + g_{21} > 0$ випливає аперіодичність принаймні одного з процесів відновлення та нерівність $\overline{u}_1 + \overline{u}_2 > 0$. Далі, підстановкою (30) у (25) отримуємо для (v_{1i}) лінійне рівняння з обмеженою функцією у правій частині (внаслідок (28) та (33)), та матрицею — добутком матриць $\big(a_{ij}^{(1)}\big)$, $\big(a_{ji}^{(2)}\big)$. Рівномірна норма останньої внаслідок (29) та (34) не перевищує $(1-\overline{u}_1)(1-\overline{u}_2) < 1$. Тому за теоремою про стискаюче відображення існує єдиний скінчений невід'ємний розв'язок вказаного рівняння, що є до того ж обмеженим. Отже, цей розв'язок збігається з (v_{1i}), а тому остання послідовність обмежена.

Для обчислення відповідної верхньої межі оцінимо у (30) та (25) з урахуванням наведених вище нерівностей

$$
\sup_{i\ge 1} v_{1i} \le \sup_{i\ge 1} z_{1i} + \left(\sum_{j\ge 1} a_{ij}^{(1)} \right) \sup_{j\ge 1} v_{2j} \le \mu_{22}/\mu_2 - 1 + (1-\overline{u}_2) \sup_{j\ge 1} v_{2j}, \tag{35}
$$

$$
\sup_{j\ge 1} v_{2j} \le \mu_{12}/\mu_1 - 1 + (1-\overline{u}_1) \sup_{i\ge 1} v_{1i}. \tag{36}
$$

Підстановкою (36) у (35) та у оберненому порядку з урахуванням означень (19) отримуємо першу нерівність у (9) при $i = 0$ або $j = 0$:

$$
\sup_{i\ge 1} v_{1i} \le \mu_{22}/\mu_2 - 1 + (1-\overline{u}_2) \left(\mu_{12}/\mu_1 - 1 + (1-\overline{u}_1) \sup_{i\ge 1} v_{1i} \right),
$$

звідки

$$
\sup_{i\ge 1} v_{1i} \le (\mu_{22}/\mu_2 - 1 + (1-\overline{u}_2)(\mu_{12}/\mu_1 - 1))(1 - (1-\overline{u}_1)(1-\overline{u}_2))^{-1} \le C_{12}.
$$

У випадку, коли $i = j > 0$, нерівність (9) є рівністю за означенням (6).

У загальному випадку $i \neq j$ ця нерівність виводиться з (16) та (19):

$$\begin{aligned} m_{ij} &= \min(i,j) + (i-j+v_{1,i-j})1_{i>j} + (j-i+v_{2,j-i})1_{j>i} \\ &\le \min(i,j) + \left(i-j+\sup_{i\ge 1} v_{1i}\right)1_{i>j} + \left(j-i+\sup_{j\ge 1} v_{2j}\right)1_{j>i} \\ &\le \max(i,j) + C_{12}1_{i\neq j}. \end{aligned}$$

Для доведення теореми 2 залишилось довести останню нерівність у (9). Вона випливає з означень (2), (10) та наступних тверджень.

Лема 4. *Нехай $(g_j, j \ge 1)$ — дискретний розподіл з послідовністю відновлення $u_n = \sum_{k\ge 0}(g)^{*k}_n$ та послідовностями*

$$G_n = \sum_{i>n} g_i, \qquad n \ge 0,\ G_0 = 1, \tag{37}$$

$$F_n = \prod_{s=1}^{n}(1-G_s), \qquad 0 \le n \le \infty,\ F_0 = 1, \tag{38}$$

причому $0 < g_1 < 1$ (тобто $F_n > 0$). Тоді мають місце нерівності

$$u_n \ge F_n \ge F_\infty, \qquad n \ge 1. \tag{39}$$

Доведення використовує ідеї [2, Chapter 3.3].

Розглянемо послідовності

$$f_n = F_{n-1}G_n, \qquad n \ge 1,\ f_0 = 0, \tag{40}$$

$$h_n = (f*G)_n - G_n, \qquad n \ge 1,\ h_0 = 0. \tag{41}$$

Зауважимо, що

$$\sum_{s=1}^{n} f_s = 1 - F_n, \qquad n \ge 1. \tag{42}$$

Дійсно, при $n = 1$ маємо $f_1 = G_1 = 1 - F_1$. Далі, за припущенням індукції виконується рівність $\sum_{s=1}^{n+1} f_s = 1 - F_n + F_nG_{n+1} = 1 - F_{n+1}$.

Далі, внаслідок монотонності G_n та (42) за означенням

$$\begin{aligned} h_n &= \sum_{s=1}^{n} f_sG_{n-s} - G_n = f_n + \sum_{s=1}^{n-1} f_sG_{n-s} - G_n \ge f_n + \sum_{s=1}^{n-1} f_sG_n - G_n \\ &= f_n + (1-F_{n-1})G_n - G_n = 0, \qquad n \ge 1, \end{aligned} \tag{43}$$

тобто послідовність (h_n) — невід'ємна.

Нарешті, обчислимо з урахуванням означення згортки (3) та (18), (42), (41)

$$\begin{aligned} (h*u)_n &= \sum_{s=1}^{n} h_su_{n-s} = \sum_{s=1}^{n}((f*G)_s - G_s)u_{n-s} \\ &= (f*G*u)_n - (f*G)_0u_n - (G*u)_n + G_0u_n = (f*1)_n - 0 - 1 + u_n \\ &= 1 - F_n - 1 + u_n = u_n - F_n. \end{aligned} \tag{44}$$

Отже, твердження леми випливає з невід'ємності (43).

Лема 5. *Для дискретного розподілу $(g_j, j \ge 1)$ з послідовністю відновлення $u_r = \sum_{k\ge 0}(g)^{*k}_r$ та середнім $\mu = \sum_{k\ge 1} kg_k$ (або середнім квадратом $\mu_2 = \sum_{k\ge 1} k^2g_k$) за умови $0 < g_1 < 1$ мають місце нерівності*

$$\overline{u} \equiv \inf(u_r, r \ge 1) \ge \exp\left(\mu(1-g_1)^{-1}\ln g_1\right), \tag{45}$$

$$\overline{u} \ge \exp\left(\sqrt{\mu_2}(1-g_1)^{-1/2}\ln g_1\right). \tag{46}$$

Зауваження 2. Праву частину (9) можна замінити на відповідну модифікацію нерівності (46).

Доведення. Згідно (39) досить довести, що F_∞ не менше за праві частини відповідно (45), (46).

Тут функціонал $F_\infty = F_\infty(G)$ визначається формулою (38) через послідовність $G = (G_n, n \geq 1)$.

За умови $\mu < \infty$ остання належить замкненому підпростору

$$\mathcal{L}_1(g_1, \mu) = \left\{ G\colon 0 \leq G_{n+1} \leq G_n \leq 1 - g_1, \sum_{n \geq 1} G_n \leq \mu - 1 \right\}. \tag{47}$$

Оскільки функціонал $F_\infty(G)$ є опуклим на $\mathcal{L}_1(g_1, \mu)$, то нижня межа

$$F_\infty(g_1, \mu) \equiv \inf_{G \in \mathcal{L}_1(g_1,\mu)} F_\infty(G)$$

досягається на границі множини $\mathcal{L}_1(g_1, \mu)$. Остання містить всі послідовності G, для яких $G_n \in \{0, 1 - g_1\}$ для всіх $n \geq 1$, за винятком не більше ніж одного номера. Тому нижня межа досягається для послідовності G^* з $G_k^* = 1 - g_1, 1 \leq k < m$, $G_m^* = \mu - 1 - (m-1)G_1^* \leq G_1^*$, та $G_k^* = 0$, $k > m$, де номер m дорівнює цілій частині $m = [(\mu - g_1)/(1 - g_1)]$, а відповідне мінімальне значення дорівнює

$$\begin{aligned} F_\infty(g_1, \mu) &= \exp((m-1)\ln(1 - G_1^*))\,(1 - G_m^*) \\ &\geq \exp(m \ln g_1) \geq \exp\left(\mu(1 - g_1)^{-1} \ln g_1\right), \end{aligned} \tag{48}$$

де враховано очевидну нерівність $m \leq \mu(1 - g_1)^{-1}$.

Доведення (46) проводиться аналогічно. □

Література

1. T. Lindvall, *Lectures on the Coupling Method*, John Wiley and Sons, 1991.
2. N. V. Kartashov, *Strong Stable Markov Chains*, VSP, Utrecht, The Netherlands, 1996.
3. W. Feller, *An Intoduction to Probability Theory and its Applications*, vol. 1, John Wiley & Sons, New York, 1966.
4. D. J. Daley, *Tight bounds for the renewal function of a random walk*, Ann. Probab. **8** (1980), no. 3, 615–621.

Кафедра теорії ймовірностей, математичної статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Національний університет ім. Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, 01033, Київ, Україна

Адреса електронної пошти: nkartashov@skif.com.ua

Кафедра теорії ймовірностей, математичної статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Національний університет ім. Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, 01033, Київ, Україна

Надійшла 17/12/2010