Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 84, 2011, стор. 84–93

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 84, 2011, pp. 84–93

НАПІВГРУПИ ОПЕРАТОРІВ, ЯКІ ОПИСУЮТЬ ФЕЛЛЕРІВСЬКИЙ ПРОЦЕС НА ПРЯМІЙ, СКЛЕЄНИЙ З ДВОХ ДИФУЗІЙНИХ ПРОЦЕСІВ

УДК 519.21

П. П. КОНОНЧУК І Б. І. КОПИТКО

Анотація. За допомогою методу класичної теорії потенціалу побудовано напівгрупу операторів, що описує феллерівський процес на прямій, який є результатом склеювання двох дифузійних процесів з нелокальною умовою спряження типу Феллера–Вентцеля.

Abstract. Using the method of classical potential theory a semigroup of operators is constructed. It describes a Feller process on the line, which is the result of gluing together two diffusion processes with a nonlocal condition of conjugation Feller–Wentzell type.

Аннотация. С помощью метода классической теории потенциала построена полугруппа операторов, которая описывает феллеровский процесс на прямой, который является результатом склеивания двух диффузионных процессов с нелокальным условием сопряжения типа Феллера–Вентцеля.

1. Основні позначення та постановка задачі

Нехай $D_i = \{x\colon (-1)^i x > 0\}$, $i = 1, 2$ — дві області на числовій пряміій; $\partial D = \{0\}$ — спільна межа цих областей, а $\overline{D_i} = D_i \cup \partial D$ — замикання D_i. Якщо D — область в $\mathbb{R}$ (зокрема, $D = \mathbb{R}$), а $\overline{D}$ — її замикання, то $C_b(\overline{D})$ означає банахів простір обмежених неперервних функцій $\varphi(x)$ на $\overline{D}$ з нормою $\|\varphi\| = \sup_{x\in\overline{D}} |\varphi(x)|$, а $C_0(\overline{D})$ — простір обмежених рівномірно неперевних функцій на $\overline{D}$. Надалі для будь-якої функції $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$ через φ_i будемо позначати звуження φ на $\overline{D}_i$, а через $C_2(\overline{D}_i)$ — підмножину $C_b(\overline{D}_i)$, яка складається з усіх функцій, для яких $\varphi_i, \varphi_i', \varphi_i'' \in C_0(\overline{D}_i)$, $i = 1, 2$.

Припустимо, що в областях D_i задані твірні диференціальні оператори L_i, $i = 1, 2$, деяких однорідних дифузійних процесів, що діють на $C_2(\overline{D}_i)$:

$$L_i\varphi(x) = \frac{1}{2} b_i(x) \frac{d^2\varphi_i}{dx^2}(x) + a_i(x)\frac{d\varphi_i}{dx}(x), \quad i = 1, 2, \tag{1}$$

де $b_i(x)$ та $a_i(x)$ — обмежені неперервні функції на $\overline{D}_i$, до того ж $b_i(x) \geq 0$. Позначимо через $C_2(\mathbb{R})$ підмножину $C_b(\mathbb{R})$, яка складається з усіх функцій $\varphi(x)$, таких, що $\varphi_i \in C_2(\overline{D}_i)$, $i = 1, 2$, $L_1\varphi_1(0) = L_2\varphi_2(0)$ і визначимо оператор L який діє на $C_2(\mathbb{R})$ за такими правилами:

$$L\varphi(x) = \begin{cases} L_1\varphi(x), & \text{якщо } x \in \overline{D}_1, \\ L_2\varphi(x), & \text{якщо } x \in \overline{D}_2. \end{cases} \tag{2}$$

Запишемо тепер додаткову умову спряження в точці $x = 0$, яка звужує оператор L (точніше його замикання) до інфінітезимального оператора напівгрупи Феллера

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60J60.

Ключові слова і фрази. Дифузійні процеси, розриви траекторій, аналітичні методи, метод потенціалу.

на $C_0(\mathbb{R})$. Ця умова має вигляд

$$L_0\varphi(0) \equiv q_1\varphi'(0-) - q_2\varphi'(0+) + \int_{D_1\cup D_2} (\varphi(0) - \varphi(y))\,\mu(dy) = 0. \tag{3}$$

Тут q_i, $i = 1, 2$, — невід'ємні числа, а $\mu(\cdot)$ — невід'ємна міра на $D_1 \cup D_2$ така, що

$$\lambda(\delta) = \int_{(D_1\cup D_2)\setminus D_\delta} |y|\mu(dy) < \infty, \quad \mu(D_\delta) < \infty, \tag{4}$$

де $D_\delta = \{x \in \mathbb{R} : |x| > \delta > 0\}$. При цьому числа q_1, q_2 та $m = \mu(D_1 \cup D_2)$ не повинні одночасно дорівнювати 0. Зауважимо (див. [1]), що умова (3) є частковим випадком більш загальної умови спряження типу Феллера-Вентцеля ([2, 3]), за допомогою якої описують всеможливі продовження дифузійного процесу після його виходу на межу областей D_i, $i = 1, 2$. У нашому випадку до лівої частини (3) входять доданки, що відповідають лише за такі властивості процесу в точці $x = 0$, як його часткове відбиття та стрибки в одну з областей D_1 або D_2. Нагадаємо, що крім відзначених, іншими можливими типами поведінки дифундуючої частинки на межі області є також затримка і зникнення (обрив). Тому в загальній умові спряження типу Феллера-Вентцеля появляються ще два додаткові члени.

У даній роботі вивчається питання про існування напівгрупи операторів $\{\mathcal{T}_t\}_{t\geq 0}$, яка описує феллерівський процес (не обов'язково неперервний) на $\mathbb{R}$ такий, що в D_i він збігається з дифузійними процесами, керованими операторами L_i, $i = 1, 2$, а його поведінка в точці $x = 0$ визначається умовою спряження (3). При цьому розглядається випадок, коли параметри q_1 і q_2 з (3) задовольняють умову

$$q_1 + q_2 > 0. \tag{5}$$

Сформульовану нами задачу часто називають задачею про склеювання двох дифузійних процесів на прямій ([1, 4, 5, 6]).

Для знаходження шуканої напівгрупи ми використовуємо аналітичні методи. За такого підходу (див. [4, 5, 6]) розв'язання розглядуваної проблеми практично зводиться до вивчення відповідної задачі спряження для лінійного параболічного рівняння другого порядку з розривними коефіцієнтами. Остання задача полягає в знаходженні функції $u(t, x)$ ($t > 0, x \in \mathbb{R}$), яка задовольняє такі умови:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = L_i u(t, x), \quad t > 0, x \in D_i, i = 1, 2, \tag{6}$$

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

$$u(t, 0-) = u(t, 0+), \quad t \geq 0, \tag{8}$$

$$L_0 u(t, 0) = 0, \quad t > 0, \tag{9}$$

де $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$ — задана функція.

Зауважимо, що в задачі (6)–(9) умова спряження (8) є відображенням властивості феллеровості шуканої напівгрупи, а рівність (9) відповідає умові спряження (3).

Класичну розв'язність задачі (6)–(9) при деяких додаткових припущеннях відносно коефіцієнтів операторів L_i, $i = 1, 2$, вперше буде встановлено нами за допомогою методу граничних інтегральних рівнянь з використанням звичайного фундаментального розв'язку параболічного рівняння та породжених ним теплових потенціалів. Зауважимо, що раніше в [4] подібна задача вивчалася методами потенціалу в припущенні, що $m = 0$, а в [6] розглядався випадок, коли $q_1 = q_2 = 0$ і міра $\mu(\cdot)$ — скінчена. Відзначимо також роботу [7], де марковський процес, склеєний з двох процесів броунівського руху, вперше був отриманий дещо іншим способом за умови, коли в (3) відсутній інтегральний член і $q_1 = q_2$ (такий випадок ми називаємо класичним випадком склеювання дифузійних процесів).

Надалі будуть використані ще такі позначення: T — фіксоване додатне число; $\mathbb{R}^2_T \equiv (0,T]\times\mathbb{R}, \mathbb{R}^2_\infty \equiv (0,\infty)\times\mathbb{R}$; D^r_t і D^p_x — символи частинної похідної за змінною t з порядком r і частинної похідної по x з порядком p відповідно, де r і p — цілі невід'ємні числа; $C^{m,l}(\Omega)$ $(C^{m,l}(\overline{\Omega}))$, $m = 0,1$, $l = 0,1,2$ $(C^{0,0}(\Omega) \equiv C(\Omega)$, $C^{0,0}(\overline{\Omega}) \equiv C(\overline{\Omega}))$ — сукупність неперервних в Ω (в $\overline{\Omega}$) функцій, які мають неперервні в Ω $(\overline{\Omega})$ похідні D^r_t, D^p_x, $r \leq m$, $p \leq l$, де Ω — підмножина в $\mathbb{R}^2_\infty$; $H^\alpha(\mathbb{R})$, $\alpha \in (0,1)$, так само як у [8, с. 16] означає простір Гельдера. Всюди нижче через C, c позначаються взагалі кажучи різні сталі, які не залежать від (t,x), конкретні величини яких нас цікавити не будуть. Інші позначення та означення будуть пояснюватися там, де вони зустрічаються вперше.

2. Фундаментальний розв'язок параболічного рівняння другого порядку і породжені ним потенціали.

В області R^2_∞ розглянемо параболічні оператори: $D_t - L_i$, $i = 1,2$. Не порушуючи загальності, припустимо, що коефіцієнти цих операторів є визначеними на $\mathbb{R}$ і задовольняють такі умови:

а) $b_i, a_i \in H^\alpha(\mathbb{R})$, $i = 1,2$;

б) існують додатні сталі b_{i0}, $i = 1,2$, такі, що $b_i(x) \geq b_{i0}$ для всіх $x \in \mathbb{R}$.

Нехай $g_i(t,x,y))$ $(t > 0$, $x,y \in \mathbb{R})$ — фундаментальні розв'язки операторів $D_t - L_i$, $i = 1,2$ (див. [5, гл. II, §2] і [8, гл. IV, §11]):

$$g_i(t,x,y) = g_{i0}(t,x,y) + g_{i1}(t,x,y), \quad i = 1,2, \tag{10}$$

де

$$g_{i0}(t,x,y) = (2\pi b_i(y)t)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2b_i(y)t}\right),$$

g_{i1} — інтегральні члени, які мають більш слабку особливість, ніж g_{0i} при $t \to 0$; крім того $g_i(t,x,y) = 0$, якщо $t \leq 0$. Нагадаємо, що функції $g_i(t,x,y)$, $i = 1,2$, — неперервні та невід'ємні за сукупністю змінних, задовольняють при фіксованому y рівняння (6) в області $(t,x) \in \mathbb{R}^2_\infty$, і такі, що для всіх $x \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$

$$\lim_{t\downarrow 0} \int_{\mathbb{R}} g_i(t,x,y)\varphi(y)dy = \varphi(x), \quad i = 1,2.$$

Відзначимо оцінки $(i = 1,2,\ x,y \in \mathbb{R})$

$$|D^r_t D^p_x g_i(t,x,y)| \leq Ct^{-\frac{1+2r+p}{2}} \exp\left(-c\frac{(y-x)^2}{t}\right), 2r+p \leq 2, t \in (0,T], \tag{11}$$

$$|D^r_t D^p_x g_{i1}(t,x,y)| \leq Ct^{-\frac{1+2r+p-\alpha}{2}} \exp\left(-c\frac{(y-x)^2}{t}\right), 2r+p \leq 2, t \in (0,T], \tag{12}$$

а також співвідношення $(t > 0,\ x \in \mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} g_i(t,x,y)dy &= 1, \quad i = 1,2,\\
\int_{\mathbb{R}} g_i(t,x,y)(y-x)dy &= \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}} g_i(\tau,x,y)a_i(y)dy, i = 1,2,\\
\int_{\mathbb{R}} g_i(t,x,y)(y-x)^2dy &= \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}} g_i(\tau,x,y)b_i(y)dy +\\
&+ 2\int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}} g_i(\tau,x,y)a_i(y)(y-x)dy, i = 1,2.
\end{aligned} \tag{13}$$

Розглянемо такі інтеграли:

$$u_{i0}(t,x) = \int_{\mathbb{R}} g_i(t,x,y)\varphi(y)dy, i = 1,2, \tag{14}$$

$$u_{i1}(t,x) = \int_0^t g_i(t-\tau,x,0)V_i(\tau)d\tau, i = 1,2. \tag{15}$$

Тут $\varphi(x)$ і $V_i(t)$, $i = 1,2,$ — задані функції. У теорії параболічних рівнянь функції u_{i0} та u_{i1} називаються потенціалами Пуасона та простого шару відповідно. З означення та властивостей фундаментального розв'язку g_i, $i = 1,2$, випливає, що коли функція $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$, то $u_{i0}(t,x)$ неперервні на $\overline{\mathbb{R}^2_\infty}$, обмежені за змінною x, задовольняють рівняння (6) в області $(t,x) \in \mathbb{R}^2_\infty$ і початкову умову (7). До того ж в $\mathbb{R}^2_T$ виконується нерівність

$$|D_t^r D_x^p u_{i0}(t,x)| \le C\|\varphi\| t^{-\frac{2r+p}{2}}, \quad 2r+p \le 2, i = 1,2. \tag{16}$$

Далі, якщо припустити, що функції $V_i(t)$, $i = 1,2$, з (15) обмежені і неперервні на $[0,\infty)$, то функції $u_{i1}(t,x)$ неперервні на $\overline{\mathbb{R}^2_\infty}$, обмежені за змінною x, задовольняють рівняння (6) в областях $(t,x) \in (0,\infty)\times D_1$ і $(t,x) \in (0,\infty)\times D_2$ та початкову умову $u_{i1}(0,x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, $i = 1,2$. Відзначимо ще одну важливу властивість потенціалів простого шару $u_{i1}(t,x)$. Вона стосується поведінки їх похідних за змінною x в околі точки $x = 0$. Тут, як відомо (див. [5, гл. II, §5], [8, гл. IV, §15]), є правильною так звана формула стрибка, якка в нашому випадку має вигляд

$$D_x u_{i1}(t,0\pm) = \int_0^t D_x g_{i1}(t-\tau,0,0)V_i(\tau)d\tau \mp \frac{V_i(t)}{b_i(0)}, \quad t>0, i = 1,2. \tag{17}$$

Зауважимо, що існування інтеграла в (17) випливає з нерівності (12) при $r = 0$, $p = 1$, $x = y = 0$.

Відзначимо також, що наведені нами властивості потенціалів простого шару будуть виконуватися, очевидно, і при дещо більш загальних припущеннях відносно функцій V_i, $i = 1,2$, з (15).

3. Розв'язання параболічної задачі спряження

Розглянемо задачу (6)–(9). Спочатку ми доведемо існування розв'язку $u(t,x)$. Будемо шукати розв'язок у вигляді суми потенціалів

$$u(t,x) = u_{i0}(t,x) + u_{i1}(t,x), \quad (t,x) \in [0,\infty)\times \overline{D_i}, i = 1,2, \tag{18}$$

де функції u_{i0} та u_{i1} є визначеними за формулами (14) та (15) відповідно, до того ж щільності V_i, $i = 1,2$, є невідомими функціями. Для їх знаходження використаємо умови спряження (8), (9). Якщо врахувати (17) то після підстановки правих частин співвідношення (18) у рівності (8), (9) отримуємо наступну систему інтегральних рівнянь відносно V_i, $i = 1,2$:

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^2 \int_0^t (-1)^{i-1} g_i(t-\tau,0,0)V_i(\tau)d\tau = \Phi(t), \quad t>0,\\ \sum_{i=1}^2 \left(\frac{q_i}{b_i(0)}V_i(t) - \int_0^t K_i(t-\tau)V_i(\tau)d\tau\right) = \Psi(t), \quad t>0,\end{gathered} \tag{19}$$

де

$$\Phi(t) = u_{20}(t,0) - u_{10}(t,0),$$

$$\Psi(t) = \sum_{i=1}^2 \left((-1)^i q_i D_x u_{i0}(t,0) + \int_{D_i} (u_{i0}(t,y) - u_{i0}(t,0)\mu(dy)\right),$$

$$K_i(t-\tau) = (-1)^i q_i D_x g_{i1}(t-\tau,0,0) + \int_{D_i} (g_i(t-\tau,y,0) - g_i(t-\tau,0,0))\mu(dy), \quad i = 1,2.$$

У системі інтегральних рівнянь (19) перше з них є рівнянням Вольтерри I роду, а друге — рівнянням Вольтерри II роду. За допомогою прийому Гольмгрена [9] приведемо рівняння Вольтерри I роду до рівняння Вольтерри II роду. З цією метою введемо інтегро-диференціальний оператор $\mathcal{E}$, який діє за правилом

$$\mathcal{E}(t)\Phi = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{d}{dt}\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}\Phi(s)ds, \quad t>0. \tag{20}$$

Оскільки функція $\Phi(t)$ з (19) є неперервно диференційовною при $t>0$, то, як легко переконатися, праву частину в (20) (надалі будемо позначати цю фукнцію через $\Phi_0(t)$) можна розкрити за формулою

$$\Phi_0(t) \equiv \mathcal{E}(t)\Phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{2}}(\Phi(t)-\Phi(s))ds + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\Phi(t)t^{-\frac{1}{2}}, \quad t>0. \tag{21}$$

Крім цього, для функції $\Phi_0(t)$ в кожній області вигляду $t\in(0,T]$ виконується така нерівність:

$$|\Phi_0(t)| \le C\|\varphi\|t^{-\frac{1}{2}}. \tag{22}$$

Справді, виконання нерівності (22) для другого доданка в (21) випливає безпосередньо з оцінки (16) при $r=p=0$. Для того, щоб оцінити інтеграл у (21), розіб'ємо його на два

$$\int_0^t = \int_0^{t/2} + \int_{t/2}^t .$$

Тоді, застосовуючи в підінтегральних виразах, які містять функцію Φ, оцінку (16), а в другому інтегралі додатково ще формулу скінчених приростів для різниці $\Phi(t)-\Phi(s)$, отримуємо нерівність (22) для інтегрального члена в (21), а отже і для функції $\Phi_0(t)$. Відразу відзначимо тут, що, як випливає з (16), формули скінчених приростів для різниць $u_{i0}(t,y)-u_{i0}(t,0)$, $i=1,2$, та умови (4), нерівність (22) задовольняє також функція $\Psi(t)$ з (19). Проте в цьому випадку стала C в (22) вже буде залежати не тільки від T, але й від δ.

Далі, за допомогою нескладних обчислень, переконуємось в тому, що зпастосування оператора $\mathcal{E}$ до обох частин першого рівняння в (19) перетворює це рівняння в інтегральне рівняння Вольтерри II роду, що в кінцевому підсумку приводить до заміни системи рівнянь (19) еквівалентною системою двох інтегральних рівнянь відносто V_i, $i=1,2$, вигляду

$$V_i(t) = \sum_{j=1}^{2}\int_0^t K_{ij}(t-\tau)V_j(\tau)d\tau + \Psi_i(t), \quad t>0, i=1,2, \tag{23}$$

де

$$\Psi_i(t) = d_i\left(\Psi(t) + \frac{(-1)^{i+1}q_{3-i}}{\sqrt{b_{3-i}(0)}}\Phi_0(t)\right), \quad i=1,2,$$

$$K_{ij}(t-\tau) = d_i\left(K_j(t-\tau) + \frac{(-1)^{i-1}q_{3-i}}{\sqrt{b_{3-i}(0)}}R_j(t-\tau)\right), \quad i,j=1,2,$$

$$d_i = \frac{\sqrt{b_i(0)}}{\frac{q_1}{\sqrt{b_1(0)}}+\frac{q_2}{\sqrt{b_2(0)}}}, \quad i=1,2,$$

$$\begin{aligned} R_j(t-\tau) \;=\; &\frac{(-1)^j}{\sqrt{2\pi}}\Big(\int_\tau^t (t-s)^{-\frac{3}{2}}(g_{j1}(t-\tau,0,0)-g_{j1}(s-\tau,0,0))ds + \\ &+\; 2(t-\tau)^{-\frac{1}{2}}g_{j1}(t-\tau,0,0)\Big), j=1,2. \end{aligned}$$

На підставі відзначених властивостей функцій $\Psi(t)$ та $\Phi_0(t)$ маємо, що функції $\Psi_i(t)$, $i=1,2$, є неперервними при $t>0$ і допускають таку оцінку:

$$|\Psi_i(t)| \le M(\delta)\|\varphi\| t^{-\frac{1}{2}}, \quad i=1,2, \tag{24}$$

де $t\in(0,T]$ і $M(\delta)$ — деяка стала.

Дослідимо ядра інтегральних рівнянь у (23). Позначимо $D_{j,\delta}=\{y\in D_j : |y|>\delta\}$, $j=1,2$, і враховуючи (10) представимо K_{ij} у вигляді

$$\begin{aligned} K_{ij}(t-\tau) \,&=\, d_i\left(K_j^{(1)}(t-\tau)+\frac{(-1)^{i+1}q_{3-i}}{\sqrt{b_{3-i}(0)}}R_j(t-\tau)\right)+d_iK_j^{(2)}(t-\tau)= \\ &= K_{ij}^{(1)}(t-\tau)+K_{ij}^{(2)}(t-\tau), \quad i,j=1,2, \end{aligned} \tag{25}$$

де

$$\begin{aligned} K_j^{(1)}(t-\tau) \,&=\, (-1)^j q_j D_x g_{j1}(t-\tau,0,0)+\int_{D_{j,\delta}}(g_j(t-\tau,y,0)-g_j(t-\tau,0,0))\mu(dy)+ \\ &+\int_{D_j\setminus D_{j,\delta}}(g_{j1}(t-\tau,y,0)-g_{j1}(t-\tau,0,0))\mu(dy), \\ K_j^{(2)}(t-\tau) &= \int_{D_j\setminus D_{j,\delta}}(g_{j0}(t-\tau,y,0)-g_{j0}(t-\tau,0,0))\mu(dy). \end{aligned}$$

Тоді, використовуючи теорему про середнє для різниць $g_{j1}(t-\tau,y,0)-g_{j1}(t-\tau,0,0)$, оцінки (11), (12) та умову (4), отримуємо нерівність

$$|K_{ij}^{(1)}(t-\tau)| \le N(\delta)(t-\tau)^{-1+\frac{\alpha}{2}}, \quad i,j=1,2, \tag{26}$$

яка виконується при $0\le\tau<t\le T$ і деякій сталій $N(\delta)$. Оцінюючи за подібною схемою інтеграл $K_j^{(2)}(t-\tau)$, знаходимо, що $|K_{ij}^{(2)}(t-\tau)|\le C(t-\tau)^{-1}$. Це означає, що ця частина кожного з ядер K_{ij} має неінтегровну особливість. Незважаючи на таку обставину, доведемо, що до системи рівнянь (23) все ж таки можна застосувати метод послідовних наближень.

Отже, будемо шукати розв'язок системи рівнянь (23) у вигляді рядів

$$V_i(t)=\sum_{k=0}^{\infty}V_i^{(k)}(t), \quad i=1,2, \tag{27}$$

де

$$\begin{aligned} V_i^{(0)}(t) &= \Psi_i(t), \quad i=1,2 \\ V_i^{(k)}(t) &= \sum_{j=1}^{2}\int_0^t K_{ij}(t-\tau)V_j^{(k-1)}(\tau)d\tau, \quad i=1,2, k\in\mathbb{N}. \end{aligned}$$

Оцінимо $V_i^{(1)}(t)$. Для цього, враховуючи (25), запишемо співвідношення

$$V_i^{(1)}=\sum_{j=1}^{2}\int_0^t K_{ij}^{(1)}(t-\tau)\Psi_j(\tau)\,d\tau+\sum_{j=1}^{2}\int_0^t K_{ij}^{(2)}(t-\tau)\Psi_j(\tau)\,d\tau=I_{i1}+I_{i2}, \qquad i=1,2.$$

Перший інтеграл правої частини легко оцінюється за допомогою нерівностей (26) та (27). Справді,

$$\begin{aligned} |I_{i1}| \,&\le\, M(\delta)\|\varphi\|2N(\delta)\int_0^t(t-\tau)^{-1+\frac{\alpha}{2}}\tau^{-\frac{1}{2}}d\tau= \\ &= M(\delta)\|\varphi\|\frac{2N(\delta)\Gamma(\frac{\alpha}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2})}t^{-\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}}, \quad t\in(0,T], i=1,2. \end{aligned} \tag{28}$$

При оцінюванні другого члена I_{i2} візьмемо до уваги такі рівності ($j = 1, 2$):

$$g_{j0}(t-\tau, y, 0) - g_{j0}(t-\tau, 0, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b_j(0)(t-\tau)}} \int_0^1 \frac{d}{d\Theta} \exp\left(-\frac{y^2\Theta}{2b_j(0)(t-\tau)}\right) d\theta,$$

$$\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{3}{2}} \tau^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{y^2\Theta}{2b_j(0)(t-\tau)}\right) d\Theta = \frac{\sqrt{2\pi b_j(0)}}{|y|\sqrt{\theta t}} \exp\left(-\frac{y^2\Theta}{2b_j(0)t}\right).$$

Тоді, використовуючи оцінку (24) і нерівність

$$\frac{d_i}{b_j(0)} \leq d = \frac{b^+(0)}{b^-(0)(q_1+q_2)}, \quad i, j = 1, 2,$$

де $b^+(0) = \max(b_1(0), b_2(0))$, $b^-(0) = \min(b_1(0), b_2(0))$, маємо

$$\begin{aligned} |I_{i2}| &\leq M(\delta)\|\varphi\| d_i \sum_{j-1}^{2} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}(b_j(0))^{\frac{3}{2}}} \int_{D_j \setminus D_{j,\delta}} y^2 \mu(dy) \times \\ &\times \int_0^1 d\Theta \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{3}{2}} \tau^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{y^2\Theta}{2b_j(0)(t-\tau)}\right) d\tau \leq \\ &\leq M(\delta)\|\varphi\| t^{-\frac{1}{2}} d \sum_{j=1}^{2} \int_{D_j \setminus D_{j,\delta}} |y| \mu(dy) = \\ &= M(\delta)\|\varphi\| t^{-\frac{1}{2}} d\lambda(\delta), \quad t \in (0, T], i = 1, 2. \end{aligned} \tag{29}$$

Розглянемо вираз $d\lambda(\delta)$. З умови (4) випливає, що $\lambda(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$. Це дає можливість вибрати число $\delta = \delta_0$ у такий спосіб, що $d_0 = d\lambda(\delta_0) < 1$. Надалі будемо вважати, що у всіх сталих, які залежать від δ, покладено $\delta = \delta_0$. Об'єднуючи тепер оцінки (28) та (29) отримуємо ($t \in (0, T]$)

$$|V_i^{(1)}(t)| \leq M(\delta_0)\|\varphi\| t^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{2N(\delta_0)\Gamma(\frac{\alpha}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1+\alpha}{2})} t^{\frac{\alpha}{2}} + d_0\right), \qquad i = 1, 2, \tag{30}$$

У правій частині (30) введемо наступні позначення: $M = M(\delta_0)$, $N = N(\delta_0)$, $h_t = \frac{2N\Gamma(\frac{\alpha}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1+\alpha}{2})} t^{\frac{\alpha}{2}}$. Враховуючи ці позначення, за допомогою індукції по k для $V_i^{(k)}(t)$, $t \in (0, T]$, $i = 1, 2$, встановимо оцінку

$$|V_i^{(k)}(t)| \leq M\|\varphi\| t^{-\frac{1}{2}} \sum_{m=0}^{k} \binom{n}{k} h_t^{(k-n)} d_0^n, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

де

$$h_t^{(k)} = \frac{(2N\Gamma(\frac{\alpha}{2}))^k \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1+k\alpha}{2})} t^{k\frac{\alpha}{2}}.$$

Звідси маємо ($t \in (0, T]$, $i = 1, 2$)

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} |V_i^{(k)}(t)| &\leq M\|\varphi\| t^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{k} \binom{n}{k} h_t^{(k-n)} d_0^n = M\|\varphi\| t^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} h_t^{(k)} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k+n}{n} d_0^n = \\ &= M\|\varphi\| t^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_t^{(k)}}{(1-d_0)^{k+1}} = M\|\varphi\| t^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2N\Gamma(\frac{\alpha}{2}))^k \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1+k\alpha}{2})(1-d_0)^{k+1}} t^{k\frac{\alpha}{2}}. \end{aligned} \tag{31}$$

Нерівність (31) забезпечує збіжність рядів (27) при $t > 0$ і дає для $V_i(t)$ оцінку

$$|V_i(t)| \leq c\|\varphi\| t^{-\frac{1}{2}}, \quad i = 1, 2, \tag{32}$$

де $t \in (0, T]$ і C — деяка стала.

З оцінок (11) ($r = p = 0$) і (32) випливає існування інтегралів в (15) і виконання для функцій $u_{i1}(t, x)$ в облісті $\mathbb{R}^2_T$ нерівності

$$|u_{i1}(t, x)| \le C\|\varphi\|, \quad i = 1, 2. \tag{33}$$

Додатковий аналіз членів рядів (27) та інтегралів у (15) показує, що функції $u_{i1}(t, x)$ є неперервними також при $t = 0$, $x \in \mathbb{R}$, до того ж $u_{i1}(0, x) = 0$, $i = 1, 2$. Звідси робимо висновок, що визначена за допомогою співвідношень (18), (27) функція $u(t, x)$ є шуканим розв'язком задачі (6)–(9).

Доведення єдиності розв'язку задачі (6)–(9) здійснюєтсья за схемою, яку було застосовано при доведенні аналогічного твердження в [6].

Отримані в цій частині наших досліджень результати представимо у вигляді двох тверджень.

Теорема 3.1. *Нехай для коефіцієнтів операторів L_i, $i = 1, 2$, з* (1) *виконані умови а), б), а параметри q_1, q_2 і міра $\mu(\cdot)$ з* (3) *задовольняють умови* (5) *і* (4) *відповідно. Тоді для будь-якої функції $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$ задача* (6)–(9) *має єдиний розв'язок*

$$u \in C(\overline{\mathbb{R}^2_\infty}) \cap C^{1,2}((0, \infty) \times D_i), \quad i = 1, 2, \tag{34}$$

до того ж

$$|u(t, x)| \le C\|\varphi\|, \quad (t, x) \in \overline{\mathbb{R}^2_T}. \tag{35}$$

Теорема 3.2. *Розв'язок задачі* (6)–(9) *з класу* (34) *має вигляд суми поетнціалів* (14) *та* (15), *де V_i, $i = 1, 2$ — розв'язок системи інтегральних рівнянь* (23)

4. Побудова процесу

З теорем 3.1 та 3.2 випливає, що за допомогою розв'язку задачі (6)–(9) можна визначити сім'ю операторів $(\mathcal{T}_t)_{t\ge0}$, які діють у просторі $C_b(\mathbb{R})$. Для $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$ покладемо

$$\mathcal{T}_t\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} g_i(t, x, xy)\varphi(y)dy + \int_0^t g_i(t-\tau, x, 0)V_i(\tau, \varphi)d\tau, \quad t > 0, x \in \overline{D_i}, i = 1, 2, \tag{36}$$

де $V_i(t, \varphi) \equiv V_i(t)$, $i = 1, 2$ — розв'язок системи інтегральних рівнянь (23), визначений за допомогою співвідношення (27). При цьому $\mathcal{T}_0 = I$, де I — одиничний оператор і для $\mathcal{T}_t\varphi(x)$ в області $(t, x) \in \overline{\mathbb{R}^2_T}$ справджується оцінка (35).

Наявність інтегрального зображення для сім'ї операторів $(\mathcal{T}_t)_{t\ge0}$ дає змогу достатньо легко перевірити виконання для них таких властивостей:

1) якщо $\varphi_n \in C_b(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, $\sup_n \|\varphi_n\| < \infty$, і для всіх $x \in \mathbb{R}$ $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x)$, де $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$, то для всіх $t \ge 0$, $x \in \mathbb{R}$ виконуєтсья співвідношення
$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{T}_t\varphi_n(x) = \mathcal{T}_t\varphi(x);$$
2) для всіх $t_1 \ge 0$, $t_2 \ge 0$ виконуєтсья співвідношення
$$\mathcal{T}_{t_1+t_2} = \mathcal{T}_{t_1} \cdot \mathcal{T}_{t_2};$$
3) $\mathcal{T}_t\varphi(x) \ge 0$ для всіх $t \ge 0$, $x \in \mathbb{R}$, якщо $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$ і $\varphi(x) \ge 0$;
4) $\|\mathcal{T}_t\| \le 1$ для всіх $t \ge 0$.

Опишемо коротко схему доведення цих властивостей. Зокрема, властивість 1) є наслідком виконяння для розв'язку системи рівнянь (23) очевидного співвідношення $\lim_{n\to\infty} V_i(t, \varphi_n) = V_i(t, \varphi)$, $t > 0$, $i = 1, 2$ і теореми Лебега про граничний перехід під знаком інтеграла. Друга властивість, яка зветься напівгруповою властивістю операторів $\mathcal{T}_t$, отримуується з допомогою твердження теореми 3.1 про єдиність розв'язку задачі (6)–(9). Далі, властивість 3) вказує на те, що напівгрупа $\mathcal{T}_t$ залишає конус невід'ємних функцій інваріантними. Для доведення цієї властивості, яке практично збігається з доведенням леми в [4] (див. також [5, с. 82]), використовується принцип максимуму для параболічних рівнянь. Нарешті, властивість 4) означає, що для кожного $t \geq 0$ оператор $\mathcal{T}_t$ є оператором стискання. Якщо взяти до уваги 3), то для встановлення цієї властивості достатньо зауважити, що $\mathcal{T}_t\varphi_0(x) \equiv 1$ для всіх $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, якщо $\varphi_0(x) \equiv 1$.

З властивостей 1)–4) випливає, що побудована за формулами (36), (27) напівгрупа операторів T_t, $t \geq 0$, визначає деякий однорідний феллерівський процес. Позначимо його ймовірність переходу через $P(t, x, dy)$, так, що

$$\mathcal{T}_t\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} P(t, x, dy)\varphi(y). \tag{37}$$

Отже ми довели таке твердження.

Теорема 4.1. *Напівгрупа операторів, визначена за формулами* (36), (27), *породжує однорідний феллерівський процес в* $\mathbb{R}$ *такий, що у внутрішніх точках областей* D_1 *та* D_2 *він збігається із заданими дифузійними процесами, керованими операторами* L_1 *та* L_2 *відповідно, а його поведінка в точці* $x = 0$ *визначається заданою умовою спряження* (3).

Зауваження 4.1. З умов (4), (5) випливає, що побудований нами процес включає випадок, коли $m = \mu(D_1 \cup D_2) = 0$. Ми вже відзначали в п. 1 що цей випадок вивчався раніше в роботі [4]. Там було показано, зокрема, що траєкторії побудованого процесу є неперервними і, крім того, його можна трактувати як узагальнений дифузійний процес в розумінні М. І. Портенка [5]. Це означає, що для такого процесу дифузійні коефіцієнти є узагальненими функціями (точніше узвгвльненою функцією є лише коефіцінт переносу) типу δ-функції Дірака, зосередженої в точці $x = 0$.

Повернемося знову до побудованого нами процесу. Ще раз відзначимо, що наявність в умові спряження (3) інтегрального члена вказує на те, що траєкторії цього процесу, взагалі кажучи, є розривними. З іншого боку виконання умови (5) гарантує нам існування додатної імовірності того, що продовження кожного з двох розглядуваних дифузійних процесів після їх попадання в точку $x = 0$ можуть відбуватись і без розриву траєкторій, тобто неперервно. А тому виникає, на наш погляд, природне питання про вплив міри стрибків процесу $\mu(\cdot)$ на локальну поведінку в точці $x = 0$ дифундуючої частинки, яка здійснює рух вздовж неперервних траєкторій. Відповідь на це питання частково можна отримати шляхом визначення для побудованого процесу узагальнених дифузійних коефіцієнтів. Існування цих характеристик встановлюється нами в припущенні, що міра $\mu(\cdot)$ з (3) задовольняє такі додаткові умови:

$$\int_{D_1 \cup D_2} |y|\mu(dy) < \infty, \quad \int_{D_1 \cup D_2} y^2\mu(dy) < \infty. \tag{38}$$

Тоді, якщо виконані умови (38), то використовуючи рівності (13) доводимо, що для будь-якої фінітної неперервної функції $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, з дійсними значеннями виконуються співвідношення

$$\begin{aligned} \lim_{t\downarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \left(\frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}} (y-x) P(t,x,dy) \right) dx &= \int_{\mathbb{R}} a(x)\varphi(x)dx + a_0\varphi(0), \\ \lim_{t\downarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \left(\frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}} (y-x)^2 P(t,x,dy) \right) dx &= \int_{\mathbb{R}} b(x)\varphi(x)dx + b_0\varphi(0), \end{aligned} \tag{39}$$

де

$$a(x) = \begin{cases} a_i(x), & x \in D_i, i = 1, 2, \\ \sum_{i=1}^2 l_i a_i(0), & x = 0, \end{cases}$$

$$b(x) = \begin{cases} b_i(x), & x \in D_i, i = 1, 2, \\ \sum_{i=1}^2 l_i b_i(0), & x = 0, \end{cases}$$

$$l_i = \frac{q_i\sqrt{b_{3-i}(0)}}{q_1\sqrt{b_2(0)} + q_2\sqrt{b_1(0)}}, \quad i = 1, 2, \quad l_1 + l_2 = 1$$
$$a_0 = \frac{1}{2}(d_1 + d_2)(q_2 - q_1 + m_1), \quad b_0 = \frac{1}{2}(d_1 + d_2)m_2,$$
$$m_1 = \int_{D_1 \cup D_2} y\mu(dy), \quad m_2 = \int_{D_1 \cup D_2} y^2\mu(dy).$$

Рівності (39) означають, що для побудованго нами процесу з ймовірністю переходу $P(t, x, dy)$ існують в узагальненому розумінні дифузійні коефіцієнти: коефіцієнт дифузії, який дорівнює $b(x) + b_0\delta(x)$ і коефіцієнт переносу, який дорівнює $a(x) + a_0\delta(x)$, де $\delta(x)$ — δ-функція Дірака.

Отже, доповненням до теореми 4.1 є таке твердження

Теорема 4.2. *Нехай для коефіцієнтів диференціальних операторів L_i, $i = 1, 2$, з* (1) *виконані умови а), б), а параметри q_i, $i = 1, 2$, та міра $\mu(\cdot)$ з* (3) *задовольняють умови* (5) *та* (38) *відповідно. Тоді побудована за формулами* (36), (27) *напівгрупа операторів $\mathcal{T}_t$, $t \geq 0$, описує узагальнений дифузійний процес в $\mathbb{R}$, ймовірність переходу якого задовольняє співвідношення* (39).

Література

1. H. Langer and W. Schenk, *Knotting of one-dimensional Feller process*, Math. Nachr. **118** (1983), 151–161.
2. W. Feller, *The parabolic differential equations and the associated semigroups of transformations*, Ann. Math. **55** (1952), 468–519.
3. А. Д. Вентцель, *Полугруппы операторов, соответствующие обобщенному дифференциальному оператору второго порядка*, Доклады Академии наук СССР **111** (1956), №2, 269–272.
4. Б. И. Копытко, *О склеивании двух диффузионніх процессов на прямой*, Вероятносные методы бесконечномерного анализа, Сб. науч. тр., Киев, 1980, стр. 84–101.
5. M. I. Portenko, *Diffusion Processes in Media with Membranes*, Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kyiv, 1995. (Ukrainian)
6. P. Kononchuk, *Pasting of two diffusion processes on a line with nonlocal boundary conditions*, Theory of Stochastic Processes **14(30)** (2008), №2, 52–59.
7. Г. Л. Кулинич, *О предельном поведении распределения решения стохастического диффузионного уравнения*, Теория вероятн. и её примен. **12** (1967), №3, 548–551.
8. О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, “Наука”, Москва, 1967.
9. Л. И. Камынин, *О существовании решения краевых задач для параболического уравнения с разрывными коэффициентами*, Известия Академии наук СССР, серия математическая **28** (1964), №4, 721–744.

Кафедра вищої математики, механіко-математичний факультет, Львівський національний університет ім. Івана Франка, вул. Університетська, 1, Львів 79000, Україна

Адреса електронної пошти: p.kononchuk@gmail.com

Кафедра вищої математики, механіко-математичний факультет, Львівський національний університет ім. Івана Франка, вул. Університетська, 1, Львів 79000, Україна

Адреса електронної пошти: bohdan.kopytko@gmail.com

Надійшла 27/09/2010