Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 84, 2011, стор. 94–101

Teor. Imovir. ta Matem. Statyst.
No. 84, 2011, pp. 94–101

ГРАНИЧНА ПОВЕДІНКА ЦІНИ БАР'ЄРНОГО ОПЦІОНУ В МОДЕЛІ БЛЕКА–ШОУЛСА З ВИПАДКОВИМИ ЗНОСОМ ТА ВОЛАТИЛЬНІСТЮ

УДК 519.21

Ю. С. МІШУРА І Ю. В. ЮХНОВСЬКИЙ

Анотація. У роботі досліджується узагальнена модель Блека–Шоулса з випадковими зносом та волатильністю, залежними від параметра. Зокрема, одержано достатні умови збіжності послідовності цін Європейського бар'єрного опціону купівлі до граничного значення.

Abstract. The general Black–Scholes model with random coefficients depending on the parameter is studied. Sufficient conditions that provide convergence of option prices for European barrier option are obtained.

Аннотация. В работе изучается обобщенная модель Блэка–Шоулса со случайными коэффициентами. зависящими от параметра. Получены достаточные условия сходимости цены Европейского барьерного опциона покупки к предельному значению.

1. Вступ

Умови збіжності ціни бар'єрного опціону в класичній моделі Блека–Шоулса було вивчено в роботі [1]. В даній статті ці результати узагальнюються на модель Блека–Шоулса з випадковим зносом та волатильністю. Досліджено збіжність послідовності цін Європейського бар'єрного опціону купівлі до граничного значення. Серед умов, що забезпечують таку збіжність — слабка збіжність скінченновимірних розподілів параметрів моделі (зносу та волатильності). Таким чином, доведення основних результатів спирається на теореми про слабку збіжність стохастичних інтегралів по семімартингалах з робіт [2] та [3].

2. Модель Блека–Шоулса

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — повний ймовірнісний простір з фільтрацією $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$. Розглянемо сім'ю фінансових ринків з неперервним часом на відрізку $[0, T]$, причому процеси цін на безризиковий та ризиковий активи, відповідно, визначаються наступним чином:

$$
\begin{aligned}
B_n(t) &= \exp\left\{\int_0^t r_n(s)\,ds\right\},\\
S_n(t) &= S_n^0 \exp\left\{\int_0^t \mu_n(s)\,ds + \int_0^t \sigma_n(s)\,dW(s)\right\}, \qquad n \in \mathbf{Z}_+,\ t \in [0, T],
\end{aligned}
\tag{1}
$$

де $W = \{W_t, \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ — вінерівський процес, S_n^0 — додатна стала, а $\mu = \mu_n(t)$, $\sigma = \sigma_n(t)$, $r_n = r_n(t)$ — узгоджені випадкові процеси, що задовольняють умови:

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60G44, 60F05, 60B12.

Ключові слова і фрази. Стохастичні інтеграли, функціональні граничні теореми, слабка збіжність, семімартингали, бар'єрні опціони.

процес σ_n є передбачуваним; $r_n(t) \geq 0$, $\sigma_n(t) > 0$ P-м.н. для всіх $t \in [0,T]$, і всі інтеграли з рівності (1) існують, тобто P-м.н. для всіх $t > 0$

$$\int_0^t r_n(s)\,ds < \infty, \qquad \int_0^t |\mu_n(s)|\,ds < \infty, \qquad \int_0^t \sigma_n^2(s)\,ds < \infty. \tag{2}$$

Зауважимо, що дисконтований процес цін на ризикові активи має вигляд

$$\begin{gathered} X_n(t) = S_n^0 \exp\left\{\int_0^t \hat{\mu}_n(s)\,ds + \int_0^t \sigma_n(s)\,dW(s)\right\}, \quad n \in \mathbf{Z}_+, \\ \hat{\mu}_n(s) = \mu_n(s) - r_n(s), \qquad n \in \mathbf{Z}_+. \end{gathered} \tag{3}$$

Цікавим з точки зору практичного застосування є гранична поведінка справедливих цін певних типів платіжних зобов'язань в цій моделі. Для постановки задачі нагадаємо спочатку означення бар'єрного опціону. Це тип опціону, виплата за яким залежить від факту виходу за деякий відомий бар'єр траєкторії базового активу. Бар'єрні опціони поділяються на опціони входу ("knock-out") та виходу ("knock-in"), Американські та Європейські. Виплата за опціоном входу відбувається, якщо ціна акції не вийде за бар'єр, виплата за опціоном виходу — якщо ціна акції вийде за бар'єр. Розглянемо Європейський бар'єрний опціон купівлі ("up-and-out"). Для кожного ринку з вищезгаданої сім'ї виплата за таким зобов'язанням в момент часу T дорівнює

$$(S_n(T) - K_n)^+ I\left\{\max_{0\leq t\leq T} S_n(t) < H_n\right\},$$

де K_n — страйкова ціна, $H_n > S_n^0$ — бар'єр.

Розглянемо міру P_n^*, для якої похідна Радона–Никодима має вигляд

$$\left.\frac{dP_n^*}{d\mathsf{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \exp\left\{\int_0^t \zeta_n(s)\,dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \zeta_n^2(s)\,ds\right\},$$

де

$$\zeta_n(s) = -\frac{\mu_n(s) - r_n(s)}{\sigma_n(s)} - \frac{1}{2}\sigma_n(s).$$

У разі виконання умови

$$\mathsf{E}\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^t \zeta_n^2(s)\,ds\right\} < \infty \tag{4}$$

ймовірнісна міра P_n^* буде нейтральною до ризику, тобто мартингальною мірою для дисконтованого процесу цін на ризиковий актив. В такому випадку ми можемо обчислити справедливу ціну будь-якого платіжного зобов'язання як математичне сподівання відносно цієї міри.

Таким чином, справедлива ціна Європейського бар'єрного опціону купівлі ("up-and-out") має наступний вигляд:

$$C_n = \mathsf{E}_{P_n^*}\left(\exp\left\{-\int_0^T r_n(t)\,dt\right\}(S_n(T) - K_n)^+ I\left\{\max_{0\leq t\leq T} S_n(t) < H_n\right\}\right). \tag{5}$$

Позначимо символом "$\Rightarrow$" слабку збіжність скінченновимірних розподілів, а символом "$\overset{C[0,T]}{\to}$" слабку збіжність ймовірнісних мір на відрізку $[0,T]$.

Зафіксуємо деяку зліченну та скрізь щільну на відрізку $[0,T]$ множину $I \subset \mathbf{R}_+$. Позначимо $T_I := I \cap [0,T]$. Позначимо також L_{T_I} клас всіх послідовностей

$$\alpha_k = \{0 = t_{0k} < t_{1k} < \ldots < t_{k_T k} < T\}$$

скінченних розбиттів відрізка $[0,T]$, що задовольняють наступні умови:

1) $\alpha_k \subseteq \alpha_{k+1} \subseteq T_I$,
2) Для будь-якого $t \in T_I$ існує $k(t)$, таке що $t \in \alpha_k$ для $k > k(t)$.

Позначимо

$$\triangle_{jk}x := x(t_{j\,k}) - x(t_{j-1\,k}), \qquad \triangle_{jk} := t_{j\,k} - t_{j-1\,k},$$
$$\omega_{j\,k}x = \sup_{t_{j-1\,k}\le s<t\le t_{j\,k}} |x(t)-x(s)|,$$
$$k_t = \sup\{j\colon t_{jk}\le t\}.$$

Теорема 1. *Нехай процеси цін на ризикові активи задаються формулами (1) та виконуються наступні умови:*

1) $S_n^0 \to S_0^0$, $H_n \to H_0$, $K_n \to K_0$, $n\to\infty$;
2) $(r_n(t), \hat\mu_n(t), \sigma_n(t))$, $t\in T_I \Rightarrow (r_0(t), \hat\mu_0(t), \sigma_0(t))$, $t\in T_I$, $n\to\infty$;
3) $\sup_{n\ge 0} \mathsf{E}\sup_{0\le t\le T}|y_n(t)| < \infty$, $y = \hat\mu, r, \sigma^2, (\hat\mu/\sigma)^2$,
4) $\lim_{\delta\to 0}\limsup_{n\to\infty}\mathsf{E}\sup_{0\le t<s\le t+\delta\le T}|z_n(s)-z_n(t)| = 0$, $z=\hat\mu, r$,

$$\lim_{\delta\to0}\limsup_{n\to\infty}\mathsf{E}\sup_{0\le t<s\le t+\delta\le T}|z_n(s)-z_n(t)|^2 = 0,$$

$z=\sigma, \hat\mu/\sigma$;

5) $\mathsf{P}\big(\max_{0\le t\le T} X_0(t)\exp\{\int_0^T r_0(s)\,ds\} = H_0\big) = 0$;
6) *Існує таке* $\varepsilon>0$, *що*

$$\sup_{n\ge0}\mathsf{E}\left[\exp\left\{(1+\varepsilon)\int_0^T\left(\frac12\sigma_n(s)-\frac{\hat\mu_n(s)}{\sigma_n(s)}\right)^2 ds\right\}\right]<\infty.$$

Тоді $C_n\to C_0$ *при* $n\to\infty$.

Доведення. Запишемо формулу визначення справедливої ціни бар'єрного опціону в наступному вигляді:

$$\begin{aligned}
C_n &= \mathsf{E}_{P_n^*}\left(\left(X_n(T)-K_n\exp\left\{-\int_0^T r_n(t)\,dt\right\}\right)^+ I\left\{M_n(T)<H_n\right\}\right)\\
&= \mathsf{E}\left(\frac{dP_n^*}{d\,\mathsf{P}}\left(X_n(T)-K_n\exp\left\{-\int_0^T r_n(t)\,dt\right\}\right)^+ I\left\{M_n(T)<H_n\right\}\right)\\
&= \mathsf{E}\left((\alpha_n(T)-\beta_n(T))^+ I\left\{M_n(T)<H_n\right\}\right),
\end{aligned}$$

де

$$M_n(T) = \max_{0\le t\le T} X_n(t)\exp\left\{\int_0^T r_n(t)\,dt\right\},$$

$$\begin{aligned}
\alpha_n(t) &= S_n^0\exp\Biggl\{\int_0^t \hat\mu_n(s)\,ds + \int_0^t\sigma_n(s)\,dW(s) + \int_0^t\left(-\frac{\hat\mu_n(s)}{\sigma_n(s)}-\frac12\sigma_n(s)\right)dW(s)\\
&\qquad\qquad -\frac12\int_0^t\left(\frac{\hat\mu_n(s)}{\sigma_n(s)}+\frac12\sigma_n(s)\right)^2 ds\Biggr\}\\
&= S_n^0\exp\Biggl\{\int_0^t\left(\frac12\sigma_n(s)-\frac{\hat\mu_n(s)}{\sigma_n(s)}\right)dW(s)\\
&\qquad\qquad + \int_0^t\left(\frac12\hat\mu_n(s)-\frac12\left(\frac{\hat\mu_n(s)}{\sigma_n(s)}\right)^2-\frac18(\sigma_n(s))^2\right)ds\Biggr\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_n(t) &= K_n \exp\left\{\int_0^t \left(-\frac{\hat{\mu}_n(s)}{\sigma_n(s)} - \frac{1}{2}\sigma_n(s)\right) dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \left(\frac{\hat{\mu}_n(s)}{\sigma_n(s)} + \frac{1}{2}\sigma_n(s)\right)^2 ds\right\} \\ &\quad \times \exp\left\{-\int_0^t r_n(s)\,ds\right\} \\ &= K_n \exp\Biggl\{\int_0^t \left(-\frac{1}{2}\hat{\mu}_n(s) - \frac{1}{2}\left(\frac{\hat{\mu}_n(s)}{\sigma_n(s)}\right)^2 - \frac{1}{8}(\sigma_n(s))^2 - r_n(s)\right) ds \\ &\qquad\qquad + \int_0^t \left(-\frac{\hat{\mu}_n(s)}{\sigma_n(s)} - \frac{1}{2}\sigma_n(s)\right) dW(s)\Biggr\}.\end{aligned}$$

За виконання умов 2) та 5), а також в силу неперервності функціоналів

$$f_1(x) = \max_{0\le t\le T} x(t)$$

та

$$f_2(x) = (x(T) - K)^+$$

в топології Скорохода, для доведення слабкої збіжності ймовірнісних мір, що відповідають процесам

$$(\alpha_n(\cdot) - \beta_n(\cdot))^+ I\left\{\max_{0\le s\le \cdot} X_n(s)\exp\left\{\int_0^\cdot r_n(s)\,ds\right\} < H_n\right\},$$

достатньо довести слабку збіжність ймовірнісних мір, що відповідають сукупності наступних інтегралів

$$\int_0^\cdot r_n(s)\,ds, \qquad \int_0^\cdot \hat{\mu}_n(s)\,ds, \qquad \int_0^\cdot \sigma_n(s)\,dW(s), \qquad \int_0^\cdot \frac{\hat{\mu}_n(s)}{\sigma_n(s)}\,dW(s),$$
$$\int_0^\cdot \left(\frac{\hat{\mu}_n(s)}{\sigma_n(s)}\right)^2 ds, \qquad \int_0^\cdot (\sigma_n(s))^2\,ds.$$

Для цього, в свою чергу, достатньо довести слабку збіжність ймовірнісних мір, що відповідають будь-якій лінійній комбінації виду

$$\begin{aligned}&a_1\int_0^\cdot \hat{\mu}_n(s)\,ds + a_2\int_0^\cdot \sigma_n(s)\,dW(s) + a_3\int_0^\cdot \frac{\hat{\mu}_n(s)}{\sigma_n(s)}\,dW(s) + a_4\int_0^\cdot \left(\frac{\hat{\mu}_n(s)}{\sigma_n(s)}\right)^2 ds \\ &\quad + a_5\int_0^\cdot (\sigma_n(s))^2\,ds + a_6\int_0^\cdot r_n(s)\,ds, \qquad a_i\in\mathbf{R},\ 1\le i\le 6.\end{aligned} \tag{6}$$

Використаємо теорему 5 з [2], яка містить достатні умови збіжності стохастичних інтегралів в топології Скорохода. Для цього запишемо (6) у вигляді інтегралу по двовимірному семімартингалу

$$\begin{aligned}\int_0^t \xi_n(s)\,dX(s) &= \int_0^t \xi_n^1(s)\,dX_1(s) + \int_0^t \xi_n^2(s)\,dX_2(s) \\ &= \int_0^t \left(a_1\hat{\mu}_n(s) + a_4\left(\frac{\hat{\mu}_n(s)}{\sigma_n(s)}\right)^2 + a_5(\sigma_n(s))^2 + a_6 r_n(s)\right) ds \\ &\quad + \int_0^t \left(a_2\sigma_n(s) + a_3\frac{\hat{\mu}_n(s)}{\sigma_n(s)}\right) dW(s).\end{aligned} \tag{7}$$

Очевидно, що для застосування теореми 5 з [2] з урахуванням виду семімартингалу та виконання умов 1)–3) даної теореми, достатньо довести виконання наступних умов:

$$\lim_{C\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\mathsf{P}\left\{\sup_{0\le t\le T}\left|\xi_n^1(t)\right|\ge C\right\}=0, \tag{8}$$

$$\lim_{C\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\mathsf{P}\left\{\sup_{0\le t\le T}\left|\xi_n^2(t)\right|\ge C\right\}=0, \tag{9}$$

$$\lim_{k\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\mathsf{E}\sum_{i=1}^{k_T+1}\omega_{ik}\xi_n^1\triangle_{ik}=0, \tag{10}$$

$$\lim_{k\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\mathsf{E}\sum_{i=1}^{k_T+1}\omega_{ik}\xi_n^2\triangle_{ik}=0. \tag{11}$$

Доведемо співвідношення (8):

$$\begin{aligned}
&\lim_{C\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\mathsf{P}\left\{\sup_{0\le t\le T}\left|\xi_n^1(t)\right|\ge C\right\}\\
&=\lim_{C\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\mathsf{P}\left\{\sup_{0\le t\le T}\left|a_1\hat\mu_n(t)+a_4\left(\frac{\hat\mu_n(t)}{\sigma_n(t)}\right)^2+a_5(\sigma_n(t))^2+a_6r_n(t)\right|\ge C\right\}\\
&\le\lim_{C\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\mathsf{P}\left\{\sup_{0\le t\le T}|\hat\mu_n(t)|\ge C\right\}+\lim_{C\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\mathsf{P}\left\{\sup_{0\le t\le T}\left|\frac{\hat\mu_n(t)}{\sigma_n(t)}\right|\ge C\right\}\\
&\quad+\lim_{C\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\mathsf{P}\left\{\sup_{0\le t\le T}|\sigma_n(t)|\ge C\right\}+\lim_{C\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\mathsf{P}\left\{\sup_{0\le t\le T}|r_n(t)|\ge C\right\}\\
&=0.
\end{aligned} \tag{12}$$

Співвідношення (9) доводиться цілком аналогічно. Доведемо рівність (10):

$$\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\mathsf{E}\sum_{i=1}^{k_T+1}\omega_{ik}\xi_n^1\triangle_{ik}\\
&=\lim_{k\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\mathsf{E}\sum_{i=1}^{k_T+1}\sup_{t_{i-1\,k}\le s<t\le t_{i\,k}}|\xi_n^1(t)-\xi_n^1(s)|\triangle_{ik}\\
&\le|a_1|\lim_{k\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\mathsf{E}\sum_{i=1}^{k_T+1}\omega_{ik}\hat\mu_n\triangle_{ik}\\
&\quad+|a_4|\lim_{k\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\mathsf{E}\sum_{i=1}^{k_T+1}\sup_{t_{i-1\,k}\le s<t\le t_{i\,k}}\left|\left(\frac{\hat\mu_n(t)}{\sigma_n(t)}\right)^2-\left(\frac{\hat\mu_n(s)}{\sigma_n(s)}\right)^2\right|\triangle_{ik}\\
&\quad+|a_5|\lim_{k\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\mathsf{E}\sum_{i=1}^{k_T+1}\sup_{t_{i-1\,k}\le s<t\le t_{i\,k}}\left|(\sigma_n(t))^2-(\sigma_n(s))^2\right|\triangle_{ik}\\
&\quad+|a_6|\lim_{k\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\mathsf{E}\sum_{i=1}^{k_T+1}\omega_{ik}r_n\triangle_{ik}.
\end{aligned}$$

Перший та останній доданки дорівнюють нулю за умовою 4). Доведемо, що другий і третій доданки зазначеної суми теж дорівнюють нулю.

Справді, з урахуванням умов 3) і 4) маємо:

$$\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\mathsf{E}\sum_{i=1}^{k_T+1}\sup_{t_{i-1\,k}\le s<t\le t_{i\,k}}\left|\left(\frac{\hat\mu_n(t)}{\sigma_n(t)}\right)^2-\left(\frac{\hat\mu_n(s)}{\sigma_n(s)}\right)^2\right|\triangle_{ik}\\
&\quad\le\lim_{k\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k_T+1}\sqrt{\mathsf{E}\sup_{t_{i-1\,k}\le s<t\le t_{i\,k}}\left[\left(\frac{\hat\mu_n(t)}{\sigma_n(t)}-\frac{\hat\mu_n(s)}{\sigma_n(s)}\right)^2\right]}\\
&\quad\times\sqrt{\mathsf{E}\sup_{t_{i-1\,k}\le s<t\le t_{i\,k}}\left[\left(\frac{\hat\mu_n(t)}{\sigma_n(t)}+\frac{\hat\mu_n(s)}{\sigma_n(s)}\right)^2\right]}\cdot\triangle_{ik}\\
&\quad\le C\sqrt{\sup_{n\ge0}\mathsf{E}\sup_{0\le t\le T}\left(\frac{\hat\mu_n(t)}{\sigma_n(t)}\right)^2}\sqrt{\lim_{\delta\to0}\limsup_{n\to\infty}\mathsf{E}\sup_{0\le s<t\le s+\delta<T}\left(\frac{\hat\mu_n(t)}{\sigma_n(t)}-\frac{\hat\mu_n(s)}{\sigma_n(s)}\right)^2}\\
&\quad=0.
\end{aligned}\tag{13}$$

Третій доданок розглядається аналогічно. Отже, маємо рівність (10). Доведемо тепер рівність (11). З урахуванням умови 4)

$$\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\mathsf{E}\sum_{i=1}^{k_T+1}\omega_{ik}\xi_n^2\triangle_{ik}=\lim_{k\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\mathsf{E}\sum_{i=1}^{k_T+1}\sup_{t_{i-1\,k}\le s<t\le t_{i\,k}}\left|\xi_n^2(t)-\xi_n^2(s)\right|\triangle_{ik}\\
&\quad\le|a_2|\lim_{k\to\infty}\limsup_{n\to\infty}E\sum_{i=1}^{k_T+1}\omega_{ik}\sigma_n\triangle_{ik}\\
&\qquad+|a_3|\lim_{k\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\mathsf{E}\sum_{i=1}^{k_T+1}\sup_{t_{i-1\,k}\le s<t\le t_{i\,k}}\left|\frac{\hat\mu_n(t)}{\sigma_n(t)}-\frac{\hat\mu_n(s)}{\sigma_n(s)}\right|\triangle_{ik}=0.
\end{aligned}$$

З (8)–(11) за теоремою 5 [2] випливає, що

$$\int_0^{\cdot}\xi_n(s)\,dX(s)\overset{D[0,T]}{\to}\int_0^{\cdot}\xi_0(s)\,dX(s).$$

Таким чином, з огляду на вигляд $\xi_n(s)$ та $X(s)$ (див. (7)), маємо слабку збіжність ймовірнісних мір:

$$\begin{aligned}
&\left\{\int_0^{\cdot}r_n(s)\,ds,\int_0^{\cdot}\hat\mu_n(s)\,ds,\int_0^{\cdot}\sigma_n(s)\,dW(s),\int_0^{\cdot}\frac{\hat\mu_n(s)}{\sigma_n(s)}\,dW(s),\right.\\
&\qquad\qquad\left.\int_0^{\cdot}\left(\frac{\hat\mu_n(s)}{\sigma_n(s)}\right)^2ds,\int_0^{\cdot}(\sigma_n(s))^2ds\right\}\\
&\overset{D[0,T]}{\to}\left\{\int_0^{\cdot}r_0(s)\,ds,\int_0^{\cdot}\hat\mu_0(s)\,ds,\int_0^{\cdot}\sigma_0(s)\,dW(s),\int_0^{\cdot}\frac{\hat\mu_0(s)}{\sigma_0(s)}\,dW(s),\right.\\
&\qquad\qquad\left.\int_0^{\cdot}\left(\frac{\hat\mu_0(s)}{\sigma_0(s)}\right)^2ds,\int_0^{\cdot}(\sigma_0(s))^2\,ds\right\}.
\end{aligned}\tag{14}$$

З рівності (14) та умов 2) та 5) за теоремою 5.2 [4] випливає, що

$$\begin{aligned}
&(\alpha_n(\cdot)-\beta_n(\cdot))^+I\left\{\max_{0\le t\le\cdot}X_n(t)\exp\left\{\int_0^{\cdot}r_n(t)\,dt\right\}<H_n\right\}\\
&\quad\overset{C[0,T]}{\to}(\alpha_0(\cdot)-\beta_0(\cdot))^+I\left\{\max_{0\le t\le\cdot}X_0(t)\exp\left\{\int_0^{\cdot}r_0(t)\,dt\right\}<H_0\right\},
\end{aligned}\tag{15}$$

Доведемо рівномірну інтегрованість послідовності (15).

Позначимо

$$Y_n(t) = \left(\frac{1}{2}\sigma_n(t) - \frac{\hat{\mu}_n(t)}{\sigma_n(t)}\right), \qquad 0 \le t \le T, \ n \in \mathbf{Z}_+.$$

Отже, для деяких $\varepsilon > 0$ та $C > 0$

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}\left[(\alpha_n(T) - \beta_n(T))^+ I\left\{\max_{0\le t\le T} X_n(t)\exp\left\{\int_0^T r_n(t)\,dt\right\} < H_n\right\}\right]^{1+\varepsilon} \\
&\quad \le \mathsf{E}\left[S_n^0 \exp\left\{\int_0^T Y_n(s)\,dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^T Y_n^2(s)\,ds\right\}\right]^{1+\varepsilon} \\
&\quad \le C\,\mathsf{E}\left[\exp\left\{(1+\varepsilon)\int_0^T Y_n(s)\,dW(s) - \frac{1+\varepsilon}{2}\int_0^T Y_n^2(s)\,ds\right\}\right] \\
&\quad = C\,\mathsf{E}\Bigg[\exp\left\{\left((1+\varepsilon)\int_0^T Y_n(s)\,dW(s) - \frac{(1+\varepsilon)^2}{2(1-\varepsilon)}\int_0^T Y_n^2(s)\,ds\right)\right\} \\
&\qquad \times \exp\left\{\left(\frac{(1+\varepsilon)^2}{2(1-\varepsilon)} - \frac{1+\varepsilon}{2}\right)\int_0^T Y_n^2(s)\,ds\right\}\Bigg].
\end{aligned}$$

останнє математичне сподівання рівномірно обмежене, в чому легко переконатися, застосувавши нерівність Гельдера з показниками $p = 1/(1-\varepsilon)$ до першого множника і $q = 1/\varepsilon$ до другого. Застосування теореми 5.4 [4] завершує доведення теореми. $\square$

Слід окремо зазначити, що з огляду на те, що $\int_0^t r_n(s)\,ds$ фігурує в означенні ціни опціону окремо, від r_n можна вимагати певну збіжність за ймовірністю, без виконання інших додаткових умов. Таким чином, можемо записати деяку модифікацію попередньої теореми.

Теорема 2. *Нехай процеси цін на ризикові активи задаються формулами* (1), *виконуються умови 1), 5) та 6) теореми 1 та наступні умови:*

2') $(\hat{\mu}_n(t), \sigma_n(t))$, $t \in T_I \Rightarrow (\hat{\mu}_0(t), \sigma_0(t))$, $t \in T_I$, $n \to \infty$;

3') $\sup_{n\ge 0} \mathsf{E} \sup_{0\le t\le T} |y_n(t)| < \infty$, $y = \hat{\mu}, \sigma^2, (\hat{\mu}/\sigma)^2$;

4') $\lim_{\delta\to 0} \limsup_{n\to\infty} \mathsf{E} \sup_{0\le t<s\le t+\delta\le T} |z_n(s) - z_n(t)| = 0$, $z = \hat{\mu}$,

$$\lim_{\delta\to 0} \limsup_{n\to\infty} \mathsf{E} \sup_{0\le t<s\le t+\delta\le T} |z_n(s) - z_n(t)|^2 = 0,$$

$z = \sigma, \hat{\mu}/\sigma$;

7) $\int_0^T |r_n(s) - r(s)|\,ds \to 0$ *за ймовірністю.*

Тоді $C_n \to C_0$ *при* $n \to \infty$.

3. Висновки

В роботі доведено збіжність послідовності цін Європейського бар'єрного опціону купівлі для послідовності узагальнених ринків Блека–Шоулса з випадковим зносом та волатильністю. Серед умов збіжності, як основна фігурує слабка збіжність параметрів фінансового ринку. Очевидно, що певні модифікації отриманих результатів можна отримати підсилюючи відповідні умови — переходом до більш сильних видів збіжності (наприклад до збіжності за ймовірністю, аналогічно теоремі 2).

Література

1. О. М. Кулик, Ю. С. Мішура, О. В. Соловейко, *Збіжність за параметром серії та диференційовність за бар'єром цін бар'єрних опціонів*, Теорія ймовір. та матем. статист. **81** (2009), 102–113.
2. Ю. С. Мішура, Г. М. Шевченко, Ю. В. Юхновський, *Функціональні граничні теореми для стохастичних інтегралів із застосуваннями до процесів ризику та до капіталів самофінансованих стратегій на багатовимірному ринку. I*, Теорія ймовір. та матем. статист. **81** (2009), 114–127.
3. Ю. С. Мішура, Ю. В. Юхновський, *Функціональні граничні теореми для стохастичних інтегралів із застосуваннями до процесів ризику та до капіталів самофінансованих стратегій на багатовимірному ринку. II*, Теорія ймовір. та матем. статист. **82** (2009), 92–103.
4. P. Billingsley, *Convergence of Probability Measures*, John Wiley&Sons, 1968.

01601, Київ, вул. Володимирська, 64, Київський університет імені Тараса Шевченка, механіко-математичний факультет, кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики

Адреса електронної пошти: myus@univ.kiev.ua

01601, Київ, вул. Володимирська, 64, Київський університет імені Тараса Шевченка, механіко-математичний факультет, кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики

Адреса електронної пошти: Yuhnovskiy@hq.eximb.com

Надійшла 10/01/2011