Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 84, 2011, стор. 102–110

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 84, 2011, pp. 102–110

СТРУКТУРА ОБЛАСТІ ЗУПИНКИ В МОДЕЛІ ЛЕВІ

УДК 519.21

А. Г. МОРОЗ І Г. М. ШЕВЧЕНКО

Анотація. Досліджено властивості області оптимальної зупинки в моделі Леві. Для достатньо широкого класу моделей і функцій виплат показано, що область зупинки є непорожньою. В загальному випадку встановлено достатні умови на функцію виплат, за яких область зупинки є непорожньою. Для нульової ставки дисконтування також наведено умови, за яких область зупинки має порогову структуру.

Abstract. The optimal stopping problem in Lévy model is investigated. For a rich class of models and payoff functions, it is shown that the stopping region is non-empty. In a general case, we establish sufficient conditions on the payoff function that provide non-emptiness of the stopping region. For a zero discounting rate we also give conditions for the stopping region to have a threshold structure.

Аннотация. Исследованы свойства области оптимальной остановки в модели Леви. Для достаточно широкого класса моделей и функций выплат показано, что область остановки является непустой. В общем случае установлены достаточные условия на функцию выплат, при которых область остановки является непустой. Для нулевой ставки дисконтирования также приведены условия, при которых область остановки имеет пороговую структуру.

1. Вступ

Розглядається процес з незалежними приростами $\{X_t, t \in [0,T]\}$ з початковим значенням $X_0 \in \mathbf{R} = (-\infty, \infty)$. Цей процес визначено на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ з натуральною фільтрацією $\mathcal{F}_t = \sigma\{X_s, s \le t\}$. Ставка дисконтування стала і дорівнює $q \ge 0$.

Задача оптимальної зупинки для функції виплат g формулюється наступним чином: максимізувати очікувану дисконтовану виплату $\mathbf{E}(g(X_\tau)e^{-q\tau})$ у класі M_T всіх марковських моментів τ відносно (F_t) зі значеннями в $[0,T]$. Тобто задача полягає у відшуканні функції вартості

$$V(T,x) = \sup_{\tau \in M_T} \mathbf{E}_{\mathrm{x}}(g(X_\tau)e^{-q\tau}),$$

де $\mathbf{E}_x$ – математичне сподівання за умови $X_0 = x$.

Оптимальним моментом зупинки називатимемо такий момент зупинки τ^*, для якого

$$V(T,x) = \mathbf{E}_x(g(X_{\tau^*})e^{-q\tau^*}).$$

Згідно із загальною теорією оцінювання Американських опціонів (див., наприклад, [1]), мінімальний оптимальний момент зупинки має вигляд $\tau^* = \inf\{t\colon (t, X_t) \in G\}$, де множина

$$G = \{(t,x) \in [0,T] \times \mathbf{R} \mid V(T-t,x) \leqslant g(x)\} \tag{1}$$

називається *областю оптимальної зупинки* опціону. Доповнення до множини G

$$C = \{(t,x) \in [0,T] \times \mathbf{R} \mid V(T-t,x) > g(x)\}$$

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60G40, 60G51.

Ключові слова і фрази. Процеси Леві, Американський опціон, функція виплат, область зупинки, порогова структура.

називається *областю продовження*. Визначимо також t-переріз множини G:

$$G_t = \{x \in \mathbf{R} \mid V(T-t, x) \leqslant g(x)\}.$$

Очевидно, маємо

$$G = \bigcup_{t<T} \{t\} \times G_t.$$

Для чисельної побудови областей зупинки важливо апріорі знати її структуру, наприклад, що вона є непорожньою та має порогову структуру, тобто має вигляд $G_t = [c(t), +\infty)$ або $G_t = (-\infty, c(t)]$. Дослідженням структури області зупинки було присвячено кілька робіт.

Так, наприклад, у статті [1] досліджується непорожність та вигляд області зупинки для американського опціону, записаного для декількох активів, у дифузійній моделі. У роботі [2] для експоненційної моделі Леві розглядається поведінка ціни та досліджується границя області зупинки для Американського пут-опціону на актив, за яким сплачуються дивіденди. У статті [3] було встановлено порогову структуру для множини зупинки у задачі перепродажу Європейського кол-опціону в дискретному часі. В роботах [5], [6] встановлюються умови, за яких у моделі з дискретним часом для цінового процесу, що моделюється однорідним марковським процесом, область зупинки Американського опціону має порогову структуру.

У даній статті ми розглядаємо задачу оптимальної зупинки у моделі Леві та досліджуємо непорожність і вигляд області зупинки. Встановлюються умови на функцію виплат g, за яких область зупинки є непорожньою, та умови, коли вона має порогову структуру.

Стаття має наступну структуру: в розділі 2 наведено деякі означення та допоміжні факти стосовно процесів Леві; у розділі 3 сформульовано та доведено теорему про непорожність області зупинки для процесів Леві та допоміжні твердження; у розділі 4 одержано результат, що визначає, для яких функцій виплат g область зупинки має порогову структуру.

2. Позначення і допоміжні твердження

2.1. **Постановка задачи і припущення.** Нехай $\{X_t, t \in [0,T]\}$ — однорідний процес з незалежними приростами, визначений на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ з натуральною фільтрацією $\mathcal{F}_t = \sigma\{X_s, s \leqslant t\}$. Запишемо розклад Леві-Іто для процесу X_t:

$$X_t = X_0 + at + \sigma W_t + \int_0^t \int_{\{|x|\leqslant 1\}} x(\mu - \lambda \otimes \nu)(ds, dx) + \int_0^t \int_{\{|x|>1\}} x\mu(ds, dx), \quad (2)$$

де λ — міра Лебега, μ — пуассонівська міра на $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$,

$$\mu = \sum_{t\geqslant 0} \delta_{(t,\Delta X_t)} \mathbf{I}\{\Delta X_t \neq 0\},$$

δ_z — міра Дірака, ν — міра Леві процесу X_t, W_t — стандартний броунівський рух. Нехай міра Леві процесу X_t задовольняє умову

(I) $\int_{\{|x|\geqslant 1\}} e^{p|x|}\nu(dx) < \infty$ для всіх $p \geq 0$.

2.2. **Задача оптимальної зупинки для нульової відсоткової ставки.** Припустимо, що ставка дисконтування $q = 0$.

Для обмеженої функції $f \in C^2(R)$ введемо наступний оператор (генератор процесу X):

$$Af(x) = af'(x) + \frac{\sigma^2}{2}f''(x) + \int_{|y|\leqslant 1}(f(x+y) - f(x) - yf'(x))\nu(dy) + \\ + \int_{|y|>1}(f(x+y) - f(x))\nu(dy). \tag{3}$$

Для функцій з $C(\mathbf{R})$ дію оператора A розуміємо в сенсі узагальнених функцій.

Нехай множина $O \subset \mathbf{R}$. Позначимо

$$\tau_O = \inf\{t \geqslant 0 \mid X_t \notin O\}.$$

Справедливі наступні твердження.

Твердження 2.1. *Нехай функція $f \in C^2(\mathbf{R})$ обмежена, множина $O \subset \mathbf{R}$ відкрита. Тоді наступні дві умови еквівалентні:*

1) *якщо $X_0 \in O$, то процесс $\{f(X_{t\wedge\tau_O}),\ t \geqslant 0\}$ є супермартингалом;*
2) *для всіх $x \in O$ $\;Af(x) \leqslant 0$.*

Твердження 2.2. *Нехай функція $f \in C(\mathbf{R})$, множина $O \subset \mathbf{R}$ відкрита. Тоді наступні дві умови еквівалентні:*

1) *якщо $X_0 \in O$, то процес $\{f(X_{t\wedge\tau_O}), t \geqslant 0\}$ є супермартингалом;*
2) *розподіл Af є невід'ємною мірою на O.*

У подальшому припускатимемо, що функція виплат g зростає не швидше за степеневу функцію

(II) $g \in C(\mathbf{R})$ та $|g(x)| \leqslant c(1 + |x|^\alpha)$ для деяких $c, \alpha > 0$.

Позначимо через M_t множину моментів зупинки із значеннями в $[0, t]$.

Твердження 2.3. *Функція*

$$V(t,x) = \sup_{\tau\in M_t} \mathbf{E}_x(g(X_\tau)), (t,x) \in [0,\infty) \times \mathbf{R}$$

є неперервною на $[0,\infty) \times \mathbf{R}$, і процес $\{V(T-t, X_t), 0 \leqslant t \leqslant T\}$ є огинаючою Снелла з горизонтом T для процесу $\{g(X_t), 0 \leqslant t \leqslant T\}$, тобто

$$V(T-t, X_t) = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in M_t} \mathbf{E}(g(X_\tau) \mid \mathcal{F}_t), t \in [0,T].$$

Твердження 2.4. *Функція $U(t,x) = V(T-t,x)$ є единою неперервною і обмеженою функцією на $[0,T) \times \mathbf{R}$, що задовольняє наступні умови:*

1) $U(T,\cdot) = g(\cdot)$;
2) $U \geqslant g$;
3) $\partial_t U + AU \leqslant 0$ *на* $(0,T) \times \mathbf{R}$;
4) $\partial_t U + AU = 0$ *на відкритій множині* $\{(t,x) \in (0,T) \times \mathbf{R}\,|U(t,x) > g(x)\}$.

Ці твердження доведено в [2], проте там додатково накладалася умова обмеженості на функцію g. Ця умова використовувалася лише для того, щоб забезпечити збіжність до нуля математичного сподівання $\mathbf{E}[g(X_\tau) - g_n(X_\tau)]$, де $g_n(x) = g(x)\phi_n(x)$, $\phi_n(x) = \phi(x/n)$, фінітна нескінченно диференційована функція ϕ приймає значення в $[0,1]$, причому дорівнює 1 на $[-1,1]$, τ — обмежений момент зупинки (без обмеження загальності можна вважати, що $\tau \leqslant T$).

Беручи до уваги те, що $|g(x)| \leqslant c(1 + |x|^\alpha)$, запишемо наступні нерівності:

$$|\mathbf{E}[g(X_t) - g_n(X_t)]| = |\mathbf{E}[g(X_t)(1 - \phi_n(X_t)]| \leqslant \\ \leqslant \mathbf{E}[|g(X_t)|\mathbf{I}\{|X_t| \geqslant n\}] \leqslant \\ \leqslant c\mathbf{E}((1 + \sup_{t\leqslant T}|X_t|^\alpha)\mathbf{I}\{\sup_{t\leqslant T}|X_t| \geqslant n\}).$$

Тому достатньо, щоб виконувалося $\mathbf{E}\sup_{t\leqslant T}|X_t|^\alpha < \infty$. Всі моменти процесу X_t скінченні в силу умови (I), див. [7]. Тому, використовуючи оцінку з [4, Лема 1], маємо

$$\mathbf{E}\sup_{t\leqslant T}|X_t|^\alpha \leq C_\alpha(|X_0|^\alpha + \mathbf{E}\sup_{t\leqslant T}|X_t - X_0|^\alpha) \leq K_\alpha(|X_0|^\alpha + T \vee T^\alpha),$$

що й потрібно. Більше того, з останньої нерівності випливає оцінка

$$|V(t,x)| \leq C(1+|x|^\alpha), \tag{4}$$

рівномірна за $t \in [0,T]$.

2.3. **Задача оптимальної зупинки для сталої ненульової ставки дисконування.** Доведемо аналогічні твердження для випадку, коли ставка $q > 0$. Для $g \in C(\mathbf{R})$ введемо оператор:

$$A_q f(x) = af'(x) + \frac{\sigma^2}{2}f''(x) + \int_{|y|\leqslant 1}(f(x+y) - f(x) - yf'(x))\nu(dy) +$$
$$+ \int_{|y|>1}(f(x+y) - f(x))\nu(dy) - qf(x),$$

Твердження 2.5. *Нехай функція $f \in C^2(\mathbf{R})$ обмежена, множина $O \subset \mathbf{R}$ відкрита. Тоді наступні дві умови еквівалентні:*

1) *якщо $X_0 \in O$, то процесс $\{e^{-qt\wedge\tau_O}f(X_{t\wedge\tau_O}), t \geqslant 0\}$ є супермартингалом;*
2) *для всіх $x \in O$ $A_q f(x) \leqslant 0$.*

Доведення. 1) $\Rightarrow$ 2) Зафіксуємо $x \in O$. Оскільки процес $\{e^{-qt\wedge\tau_O}f(X_{t\wedge\tau_O}), t \geqslant 0\}$ є супермартингалом, то

$$\frac{1}{t}\mathbf{E}_x[e^{-qt\wedge\tau_O}f(X_{t\wedge\tau_O}) - f(x)] \leqslant 0.$$

Використовуючи формулу Іто, звідси маємо

$$\frac{1}{t}\mathbf{E}_x\left[\int_0^{t\wedge\tau_O} A_q f(X_s)ds\right] \leqslant 0. \tag{5}$$

З неперервності справа процесу X_t випливає, що $\tau_O > 0$ м.н. Тому, спрямовуючи t до нуля в 5, одержимо $A_q f(x) \leqslant 0$.

2) $\Rightarrow$ 1) Запишемо за формулою Іто при $s < t$

$$\mathbf{E}[e^{-qt\wedge\tau_O}f(X_{t\wedge\tau_O})|\mathcal{F}_s] = \mathbf{E}\left[e^{-qs\wedge\tau_O}f(X_{s\wedge\tau_0}) + \int_{s\wedge\tau_O}^{t\wedge\tau_O} e^{-qu}A_q f(X_u)du \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right] =$$
$$= e^{-qs\wedge\tau_O}f(X_{s\wedge\tau_0}) + \int_{s\wedge\tau_O}^{t\wedge\tau_O}\mathbf{E}[e^{-qu}A_q f(X_u)|\mathcal{F}_s]du \leqslant e^{-qs\wedge\tau_O}f(X_{s\wedge\tau_O}),$$

оскільки $A_q f(X_u) \leqslant 0$ майже напевно для $u \in (s\wedge\tau_O, t\wedge\tau_O)$. □

Доведення наступних тверджень повторює доведення аналогічних тверджень для випадку нульової ставки дисконтування.

Твердження 2.6. *Нехай $f \in C(\mathbf{R})$, множина $O \subset \mathbf{R}$ відкрита. Тоді наступні дві умови еквівалентні:*

1) *якщо $X_0 \in O$, то процес $\{e^{-qt\wedge\tau_O}f(X_{t\wedge\tau_U}),\ t \geqslant 0\}$ є супермартингалом;*
2) *розподіл $A_q(f)$ є невід'ємною мірою на O.*

Твердження 2.7. *Функція*

$$V_q(t,x) = \sup_{\tau\in M_t}\mathbf{E}e^{-q\tau}(g(X_\tau)), (t,x) \in [0,\infty) \times \mathbf{R}$$

є неперервною на $[0,\infty)\times\mathbf{R}$*, і процес*

$$\{V_q(T-t,X_t),\ 0\leqslant t\leqslant T\}$$

є огинаючою Снелла з горизонтом T *для процесу* $e^{-qt}(g(X_t))_{0\leqslant t\leqslant T}$*, тобто*

$$V_q(T-t,X_t)=\operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in M_t}\mathbf{E}(e^{-q\tau}g(X_\tau)\,|\mathcal{F}_t),0\leqslant t\leqslant T.$$

Твердження 2.8. *Функція* $U_q(t,x)=V_q(T-t,x)$ *є единою неперервною і обмеженою функцією на* $[0,T)\times\mathbf{R}$*, що задовольняє наступні умови:*
1) $U_q(T,\cdot)=e^{-qT}g$*;*
2) $U_q(t,x)\geqslant e^{-qt}g(x)$*;*
3) $\partial_t U_q+A_qU_q\leqslant 0$ *на* $(0,T)\times\mathbf{R}$*;*
4) $\partial_t U_q+A_qU_q=0$ *на відкритій множині* $\{(t,x)\in(0,T)\times\mathbf{R}\,|U_q(t,x)>e^{-qt}g(x)\}$.

3. Непорожність області зупинки для процесів Леві

У даному розділі ми вивчатимемо властивості області зупинки, визначеної в (1), а саме, досліджуватимемо, за яких умов вона є непорожньою.

Процес X та функція виплат g задовольняють умови (I), (II).

Для довільної множини A будемо позначати через $\overset{o}{A}$ і $\overline{A}$ її внутрішність і замикання відповідно. Справедливе наступне твердження (дію оператора A розуміємо у сенсі узагальнених функції).

Теорема 3.1. *1.* $Ag\leqslant 0$ *на множині* $\bigcup_{t<T}\overset{o}{G}_t$.
2. $Ag\geqslant 0$ *на множині* $\mathbf{R}\setminus\big(\bigcup_{t<T}\overline{G_t}\big)$.

Доведення. 1. Нехай $t\in[0,T)$ таке, що $\overset{o}{G}_t$ непорожня (якщо таких не існує, то твердження очевидне). Множини G_t, очевидно, зростають за t. Тому $(t,T)\times\overset{o}{G}_t\subset G$, звідки $U=g$ на $(t,T)\times\overset{o}{G}_t$ і $Ag=\frac{\partial U}{\partial t}+AU$, отже, завдяки твердженню 2.4, $Ag\leqslant 0$ на $\overset{o}{G}_t$.

2. Нехай $H_t=\bigcup_{t<T}\overline{G}$, і $\Lambda=\mathbf{R}\setminus H_T$. На відкритій множині $(0,T)\times\Lambda$ виконується $U>g$ і $U(\cdot,x)$ не зростає, отже, $\frac{\partial U}{\partial t}\leq 0$, звідки $AU(t,\cdot)\geqslant 0$ на $(0,T)\times\Lambda$. Це означає, що для будь-якої додатної фінітної $\theta\in C^\infty(\mathbf{R})$, що дорівнює нулю поза Λ, $\langle U(t,\cdot),A^*\theta\rangle=\langle AU(t,\cdot),\theta\rangle\geqslant 0$. З неперервності функції U випливає $U(t,x)\to g(x)$, $t\to T-$. Використовуючи (I) та фінітність θ, легко одержати, що $|A^*\theta(x)|\leq K_pe^{-p|x|}$ для всіх $p>0$. З іншого боку, завдяки (4), $|U(t,x)|\leq C(1+|x|^\alpha)$. Тому за теоремою про мажоровану збіжність $\langle U(t,\cdot),A^*\theta\rangle\to\langle g,A^*\theta\rangle=\langle Ag,\theta\rangle$, $t\to T-$. Тому $\langle Ag,\theta\rangle\geqslant 0$ для будь-якої додатної фінітної $\theta\in C^\infty(\mathbf{R})$, яка дорівнює нулю поза Λ, а це і означає, що $Ag\geqslant 0$ на Λ. □

Для подальших результатів нам знадобиться наступна лема.

Лема 3.1. *Якщо* $Ag\geqslant 0$ *(відповідно* $=0$*) на* $\mathbf{R}$*, то процес* $g(X_t)$ *— субмартингал (відповідно, мартингал).*

Доведення. Доведення безпосередньо випливає з розкладу Іто для процесу $g(X_t)$. □

Сформулюємо і доведемо теорему про непорожність області зупинки у випадку, коли $q=0$.

Теорема 3.2. *Нехай* $q=0$*. Область зупинки порожня тоді і тільки тоді, коли* Ag *є ненульовою невід'ємною мірою на* $\mathbf{R}$.

Доведення. а) Необхідність. Якщо область зупинки порожня, ми маємо $Ag \geqslant 0$ згідно з теоремою 1. Припустимо, що $Ag = 0$ на $\mathbf{R}$. Тоді для всіх $x \in \mathbf{R}$ процес $g(X_t)$ є мартингалом згідно з Лемою 3.1. Далі, використовуючи означення огинаючої Снелла і теорему про оптимальну зупинку, маємо $U(t,x) = g(x)$ для всіх $(t,x) \in [0,\infty) \times \mathbf{R}$, що суперечить припущенню про порожність G.

б) Достатність. Нехай Ag є ненульовою невід'ємною мірою на $\mathbf{R}$, $\exists t$: $G_t \neq \varnothing$. Нехай $x \in G_t$. Маємо: $U(t,x) = g(x) \geqslant Eg(X_\tau)$ для всіх $\tau \in M_{T-t}$. З іншого боку, з Леми 1 і теореми про оптимальну зупинку: $g(x) \leqslant Eg(X_\tau)$ для всіх $\tau \in M_{T-t}$, оскільки процес $g(X_\tau)$ — мартингал. Використовуючи характеризацію огинаючої Снелла як найменшого супермартингала, маємо: $U(u, X_u) = g(X_u)$ м.н. Так, використовуючи неперервність $U(u,\cdot)$ та g, ми отримали $U(u,y) = g(y)$ на $(0, T-t) \times \mathbf{R}$. Завдяки теоремі 3.1, $Ag \leqslant 0$ на $\mathbf{R}$, отже $Ag = 0$ на $\mathbf{R}$, що є суперечністю. Теорему доведено. □

У випадку, коли відсоткова ставка ненульова, наступні твердження можна довести цілком аналогічно:

Теорема 3.3. *1.* $A_q g \leqslant 0$ *на* $\bigcup_{t<T} \overset{o}{G}_t$.

2. $A_q g \geqslant 0$ *на множині* $\mathbf{R} \setminus \left(\bigcup_{t<T} \overline{G_t}\right)$.

Теорема 3.4. *Область зупинки порожня тоді і тільки тоді, коли* $A_q g$ *є ненульовою додатною мірою на* $\mathbf{R}$.

Можна довести, що область зупинки є непорожньою для достатньо широкого класу процесів та функцій виплат. А саме: припустимо, що разом з умовою (II) функція виплат g задовольняє наступні:

(i) $g \in C^1(\mathbf{R})$;

(ii) існує таке $\beta \in \mathbf{R}$ (можливо, від'ємне), що $g(x) > x^\beta$ для достатньо великих x;

(iii) $\lim_{x\to\infty} \sup_{|a|\le \ln x} \frac{g(x+a)}{g(x)} = 1$.

Ці дві умови не надто обмежують клас функцій g: наприклад, їм задовольняють усі функції вигляду $g(x) = |x|^\alpha L(x)$, де функція $L(x)$ є повільно змінною на $+\infty$ та додатною для достатньо великих x.

Щодо процесу X припускатимемо, що у розкладі (2) $b = 0$, $\nu(\mathbf{R}) < \infty$.

Теорема 3.5. *Область зупинки для процесів Леві зі скінченною симетричною мірою Леві та без броунівського компоненту, і функцій виплат, що задовільняють умови (II), (i)-(iii), є непорожньою.*

Доведення. Нехай у розкладі (2) $b = 0$, а міра Леві ν скінченна та симетрична. Тоді

$$Ag(x) = ag'(x) + \int_{-\infty}^{\infty} (g(x+y) - g(x))\nu(dy) - qg(x) =$$
$$= ag'(x) - \frac{q}{2}g(x) + \mathbf{E}\Big[g(x+\xi) - (1 + \frac{q}{2\nu(\mathbf{R})})g(x)\Big],$$

де ξ — випадкова величина, розподілена, як стрибок процесу X_t.

Позначимо $d = \frac{q}{2\nu(\mathbf{R})} > 0$.

Запишемо

$$\mathbf{E}g(x+\xi) = \mathbf{E}g(x+\xi)\mathbf{I}\{|\xi| \leqslant \ln x\} + \mathbf{E}g(x+\xi)\mathbf{I}\{|\xi| > \ln x\}.$$

З умов (ii), (iii) випливає, що для достатньо великих x справедлива оцінка

$$\mathbf{E}g(x+\xi)\mathbf{I}\{|\xi| \leqslant \ln x\} \le (1 + d/3)g(x). \tag{6}$$

У свою чергу, з умови (I) маємо для будь-якого $p > 2(\alpha+\beta)$ оцінку $P(|\xi| > A) \le c_p e^{-pA}$, тому

$$\mathbf{E}|g(x+\xi)|\mathbf{I}\{|\xi| > \ln x\} \leqslant (\mathbf{E}(|g(x+\xi)|)^2)^{1/2}\mathbf{P}(|\xi| > \ln x)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant c_{p,\alpha}\big(\mathbf{E}(1+|x|^{2\alpha}+|\xi|^{2\alpha})\big)^{1/2} e^{-(p\ln x)/2} \le c_{p,\alpha}\big(1+|x|^{\alpha}+\mathbf{E}(|\xi|^{2\alpha})\big)^{1/2} x^{-p/2} \to 0.$$

Оскільки $p > 2(\alpha+\beta)$, то з урахуванням умови (ii) отримаємо для достатньо великих x

$$\mathbf{E}|g(x+\xi)|\mathbf{I}\{|\xi| > \ln x\} \leqslant dg(x)/3.$$

Додавши це до (6), одержимо $\mathbf{E}\Big[g(x+\xi) - (1+d)g(x)\Big] < 0$.

Тому у припущенні, що область зупинки порожня, виконано

$$ag'(x) - \frac{q}{2}g(x) > 0$$

при $x \ge x'$ із деяким $x' > 0$. Без обмеження загальності можна вважати, що $g(x') > 0$. Очевидно, що $a \ne 0$.

Нехай $a > 0$. Тоді $g'(x) \ge kg(x)$ для $x \ge x'$, де $k = \frac{a}{2q}$, тому за теоремою порівняння для звичайних диференціальних рівнянь маємо $g(x) \ge g(x')e^{k(x-x')}$, $x \ge x'$, що суперечить умові (II).

Якщо $a < 0$, то $g'(x) \le kg(x)$ для $x > x'$, тому $g(x) \le g(x')e^{k(x-x')}$, що суперечить умові (i), оскільки зараз $k < 0$. □

4. Порогова структура області зупинки для процесів Леві при нульовій ставці

Нехай процес X_t та функція виплат $g(x)$ задовільняють умовам (I)-(II), як і в попередньому розділі, а відсоткова ставка $q = 0$. Додатково припускатимемо, що $g \in C^2(\mathbf{R})$, $|g'(x)| \le c(1+|x|^{\alpha})$.

Задача полягає в тому, щоб визначити, для яких g область G_t має порогову структуру, тобто вигляд $G_t = [c(t), +\infty)$ або $G_t = (-\infty, c(t)]$. Перше рівносильно тому, що для всіх $x \in G_t$, $y > x$ виконано $y \in G_t$, або

$$\forall \tau \geqslant t\colon \mathbf{E}[g(X_\tau)\,|X_0 = x] \leqslant g(x) \Rightarrow \mathbf{E}[g(X_\tau)\,|X_0 = y] \leqslant g(y). \tag{7}$$

Справедлива наступна теорема.

Теорема 4.1. *Припустимо, що виконується одна з наступних умов:*

(i) стрибки процесу X_t обмежені знизу;
(ii) міра ν — симетрична,

1. Якщо функція виплат g така, що для всіх $x \in \mathbf{R}$, $g''(x) \leqslant 0$, $g''(x)$ не зростає по x, то область G_t має вигляд

$$G_t = [c(t), \infty).$$

2. Якщо функція виплат g така, що для всіх $x \in \mathbf{R}$, $g''(x) \geqslant 0$, $g''(x)$ не спадає по x, то область G_t має вигляд

$$G_t = (-\infty, c(t)].$$

Доведення. 1. Без обмеження загальності можна вважати, що $t = 0$. Розглянемо функцію

$$\gamma(x) = \mathbf{E}[g(X_\tau) - g(X_0)\,|X_0 = x].$$

Тоді із незростання функції $\gamma(x)$ випливатиме виконання (7). За формулою Іто,

$$\gamma(x) = \mathbf{E}[g(X_\tau) - g(X_0)\,|X_0 = x] = \mathbf{E}[\int_0^\tau Ag(X_y)dy+$$
$$+\sigma\int_0^\tau g'(X_y)dW_y + \int_s^t\int_R (g(X_{y_-}+z) - g(X_{y_-}))\tilde{\nu}(dy,dz)\,|X_0 = x] = \tag{8}$$
$$= \mathbf{E}[\int_0^\tau Ag(X_y)dy\,|X_0 = x].$$

Оскільки

$$Ag(x) = ag'(x) + \frac{\sigma^2}{2}g''(x) + \int_{|y|\leqslant 1}(g(x+y) - g(x) - yg'(x))\nu(dy)+$$
$$+\int_{|y|>1}(g(x+y) - g(x))\nu(dy),$$

то очевидно, достатньо довести, що другий і третій доданки у виразі (8) не зростають в умовах даної теореми.

(i) Нехай стрибки процесу X_t обмежені знизу. Без обмеження загальності можемо вважати, що в цьому випадку стрибки $\Delta X \geqslant -1$ (інакше, можемо виконати заміну $x = x/c$, $g(\cdot) = g(c\cdot)$). З формули Тейлора із залишковим членом в інтегральній формі маємо:

$$g(x+y) - g(x) - yg'(x) = \int_x^{x+y} g''(t)(x+y-t)dt =$$
$$= \int_0^y g''(t+x)(y-t)dt,$$
$$g(x+y) - g(x) = \int_x^{x+y} g'(t)dt = \int_0^y g'(t+x)dt.$$

Отже, другий і третій доданки у виразі (8) не зростають по x, оскільки за умовою теореми, $g''(x) \leqslant 0$, $g''(x)$ незростаюча.

(ii) Нехай тепер міра ν — симетрична. Для третього доданку у випадку, коли $\Delta X < -1$ запишемо:

$$\int_{|y|>1}(g(x+y) - g(x))\nu(dy) = \int_{-\infty}^{-1}\int_0^y g'(t+x)dt\nu(dy) =$$
$$= -\int_\infty^1\int_0^{-z} g'(t+x)dt\nu(dz) =$$
$$= -\int_1^\infty\int_{-z}^0 g'(t+x)dt\nu(dz) = -\int_1^\infty\int_0^z g'(t+x)dt\nu(dz).$$

Тепер, для другого і третього доданків запишемо:

$$\int_{|y|\leqslant 1}(g(x+y) - g(x) - yg'(x))\nu(dy) + \int_{|y|>1}(g(x+y) - g(x))\nu(dy) =$$
$$= \int_1^\infty\int_0^z (g'(t+x) - g'(t+x-z))dt\nu(dz) = \int_{-z}^0 (g''(t+x) - g'(s+t+x))ds.$$

Отже, другий і третій доданки у виразі (8) не зростають по x, оскільки за умовою теореми, $g''(x) \leqslant 0$, $g''(x)$ незростаюча.

2. Доведення аналогічне пункту 1, з тією відмінністю, що зараз потрібно перевірити умову (7) для всіх $y < x$, $x \in G_t$. Цю умову буде виконано, оскільки у (8) доданки не спадають. $\square$

Приклад 4.1. Нехай виконані умови (II), ціновий процес

$$X_t = X_0 + at + \int_0^t \int_{\{|x|\leqslant 1\}} x(\mu - \lambda \otimes \nu)(ds, dx) + \int_0^t \int_{\{|x|>1\}} x\mu(ds, dx),$$

— процес Леві без броунівського компоненту, міра Леві ν — скінченна та симетрична, і функція виплат

$$g(x) = \begin{cases} k + (x+1)^2, & x \geqslant 0, \\ k - 3 + 8(2-x)^{-1}, & x < 0, \end{cases}$$

де $k \in \mathbf{R}$. Тоді область зупинки має порогову структуру.

Справді, для функції $g(x)$ виконані умови (I) і за теоремою 3.4 область зупинки непорожня. До того ж, $g''(x) \geqslant 0$, $g''(x)$ не спадає для всіх $x \in \mathbf{R}$, отже, за теоремою 4.1 область зупинки має вигляд $G_t = (-\infty, c(t)]$.

5. Висновки

У даній статті розглянуто задачу оптимальної зупинки довічного платіжного зобов'язання Американського типу з функцією виплат g у моделі Леві та досліджено, за яких умов на функцію виплат область зупинки є непорожньою для випадку нульової відсоткової ставки та сталої відсоткової ставки, та коли вона має порогову структуру для випадку нульової відсоткової ставки.

Література

1. S. Villeneuve, *Exercise regions of American options on several assets*, Finance Stoch. **3** (1999), №3, 295–322
2. D. Lamberton and M. Mikou, *The critical price for the American put in an exponential Levy model*, Finance Stoch. **12** (2008), №4, 561–581.
3. A. Kukush, Yu. Mishura, and G. Shevchenko, *On reselling of European option*, Theory Stoch. Proc. **12(28)** (2006), №1–2, 75–87.
4. А. Мороз, Г. Шевченко, *Асимптотична поведінка функції вартості Американського опціону у моделі Леві при необмеженому розширенні часового інтервалу*, Вісн. Київського ун-ту. Математика. Механіка **24** (2010), 39–43.
5. H. Jönsson, A. G. Kukush, and D. S. Silvestrov, *Threshold structure of optimal stopping strategies for American type option. I*, Theor. Probability and Math. Statist. **71** (2005), 93–103.
6. H. Jönsson, A. G. Kukush, and D. S. Silvestrov, *Threshold structure of optimal stopping strategies for American type option. II*, Theor. Probability and Math. Statist. **72** (2006), 47–58.
7. A. Papapantoleon, *An Introduction to Lévy Processes with Finance in View*, Lecture notes, 2008.
8. P. E. Protter, *Stochastic Integration and Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 2004.

Кафедра теорії ймовірностей та математичної статистики, механіко-математичний факультет, Національний університет ім. Тараса Шевченка, проспект Глушкова, 6, Київ 03127, Україна

Адреса електронної пошти: mag-87@inbox.ru

Кафедра теорії ймовірностей та математичної статистики, механіко-математичний факультет, Національний університет ім. Тараса Шевченка, проспект Глушкова, 6, Київ 03127, Україна

Адреса електронної пошти: zhora@univ.kiev.ua

Надійшла 11/04/2011