Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 84, 2011, стор. 123–130

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 84, 2011, pp. 123–130

КАБЕЛЬНЕ РІВНЯННЯ ІЗ ЗАГАЛЬНОЮ СТОХАСТИЧНОЮ МІРОЮ

УДК 519.21

В. М. РАДЧЕНКО

Анотація. Розглянуто стохастичне кабельне рівняння, в якому випадковий вплив задається інтегралом за загальною стохастичною мірою. Доведено, що траєкторії м'якого розв'язку цього рівняння задовольняють умову Гельдера.

Abstract. The stochastic cable equation is considered. Stochastic influence is given by the integral with respect to general stochastic measure. It is proved that paths of the mild solution of the equation are Hölder continuous.

Аннотация. Рассмотрено стохастическое кабельное уравнение, в котором случайное влияние задается интегралом по общей стохастической мере. Доказано, что траектории мягкого решения этого уравнения удовлетворяют условию Гельдера.

1. Вступ

Метою даної статті є дослідження стохастичного кабельного рівняння наступного вигляду:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} - u(t,x) + \sigma(t,x)\,\dot{\mu}(x)\,, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,L) = 0\,, \quad u(0,x) = u_0(x)\,. \end{cases} \tag{1.1}$$

Тут $0 \le t \le T$, $0 \le x \le L$, $u\colon [0,T]\times[0,L]\times\Omega \to \mathbb{R}$ — невідома випадкова функція, μ — стохастична міра, визначена на борельовій σ-алгебрі в $[0,L] \subset \mathbb{R}$. Ми будемо розглядати м'який розв'язок цього рівняння, точне означення якого дано нижче в (2.1).

Кабельне рівняння описує зміну потенціалу $u(t,x)$ в нейроні нервової системи людини (див. [1, розділ 3], [2], [3]). При наявності випадкових імпульсів, що надходять на нейрон іззовні, природним є розгляд рівняння з певним стохастичним доданком. Відмітимо, що при заміні $u(t,x) = e^{-t}u_1(t,x)$ ми отримуємо рівняння теплопровідності для u_1.

Стохастичне кабельне рівняння та властивості його розв'язку досліджувалися в [1] (теорема 3.2), [4] (теорема 3.1), [5] (пункт 4.4), [6]. Стохастичне рівняння теплопровідності з аналогічними крайовими умовами було розглянуто в [7].

В усіх цих роботах випадковий вплив задавався інтегралом за мартингальною мірою, тобто за інтегратором з певними спеціальними властивостями. В даній роботі ми накладаємо на інтегратор лише умову σ-адитивності за ймовірністю. Щоправда, при цьому в стохастичному доданку немає залежності від u.

Рівняння в частинних похідних із загальними стохастичними мірами, регулярність їх розв'язків досліджувались в [8], [9], [10].

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60G57, 60H15, 60H05.

Ключові слова і фрази. Стохастична міра, стохастичне рівняння в частинних похідних, стохастичне кабельне рівняння, м'який розв'язок.

Статтю побудовано наступним чином. В пункті 2 наведено деякі відомості про стохастичні міри, дано розв'язок рівняння у м'якій формі. В пунктах 3 і 4 для потрібного нам стохастичного інтеграла доведено гельдеровість за x і за t відповідно. В пункті 5 отримано умову Гельдера для м'якого розв'язку стохастичного кабельного рівняння.

2. Попередні відомості

Нехай X — довільна множина, $\mathcal{B}$ — σ-алгебра підмножин X, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — повний ймовірнісний простір. Через $L_0 = L_0(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ позначимо множину всіх випадкових величин (точніше кажучи, їхніх класів P-еквівалентності). Збіжність в L_0 означає збіжність за ймовірністю.

Означення 2.1. Стохастичною мірою на $\mathcal{B}$ називається σ-адитивне відображення $\mu\colon \mathcal{B} \to L_0$.

Ми не накладаємо на μ ніяких вимог невід'ємності, існування моментів або узгодженості, в цьому сенсі наше означення є загальним.

Наведемо деякі приклади. Якщо $X(x)$, $0 \le x \le L$, є квадратично інтегровним мартингалом, то $\mu(A) = \int_0^L \mathbf{1}_A(x)\,dX(x)$ є стохастичною мірою на борельових підмножинах $[0, L]$. Аналогічним чином визначає стохастичну міру інтеграл за фрактальним броунівським рухом $B^H(x)$ при значенні показника Хюрста $H > 1/2$ (це випливає з нерівності (1.5) [11]). Інші приклади, а також умови того, що різниці значень випадкового процесу з незалежними приростами породжують стохастичну міру, є в розділах 7 і 8 [12].

У [13] побудовано і вивчено інтеграл вигляду $\int_A h(x)\,d\mu(x)$, де $h\colon \mathsf{X} \to \mathbb{R}$ — вимірна невипадкова функція , $A \in \mathcal{B}$. Його конструкція проводиться стандартно з використанням наближення простими функціями. (Аналогічна побудова наведена в розділі 7 [12]). Зокрема, будь-яка обмежена вимірна h буде інтегрованою за будь-якою μ. Для цього інтеграла має місце аналог теореми Лебега про мажоровану збіжність (див. наслідок 1.2 [13] або твердження 7.1.1 [12]).

Для рівняння (1.1) ми будемо розглядати розв'язок в м'якому сенсі, а саме: брати випадкову функцію u, задану рівністю

$$u(t,x) = \int_0^L G(t,x,y)u_0(y)\,dy + \int_{[0,L]} d\mu(y) \int_0^t G(t-s,x,y)\sigma(s,y)\,ds,$$
$$0 \le t \le T, \quad 0 \le x \le L. \quad (2.1)$$

Тут G — це фундаментальний розв'язок однорідного кабельного рівняння (тобто рівняння (1.1) з $\sigma = 0$), μ — стохастична міра, визначена на борельовій σ-алгебрі в $[0, L] \subset \mathbb{R}$, інтеграл від випадкової функції за dy береться при кожному фіксованому ω. (Наше означення м'якого розв'язку аналогічне, наприклад, даному в рівнянні (3.11) [1].)

Відомо, що

$$G(t,x,y) = \frac{e^{-t}}{\sqrt{4\pi t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\exp\left\{ -\frac{(y-x-2nL)^2}{4t} \right\} + \exp\left\{ -\frac{(y+x-2nL)^2}{4t} \right\} \right). \quad (2.2)$$

(Див., наприклад [1, стор. 312]. Властивості функції $e^{-t}G(t,x,y)$ розглянуто в [7, додаток B].)

Для $n \ge 1$ покладемо

$$d_{kn} = Lk2^{-n}, \quad 0 \le k \le 2^n, \quad \Delta_{kn} = \left(d_{(k-1)n}, d_{kn}\right], \quad 1 \le k \le 2^n .$$

В подальших оцінках ми використаємо простори Бєсова $B_{22}^{\alpha}([0,L])$. Нагадаємо, що норма в цих класичних банахових просторах для $0<\alpha<1$ може бути визначена наступним чином:

$$\|g\|_{B_{22}^{\alpha}([0,L])} = \|g\|_{L_2([0,L])} + \left(\int_0^L \left(\omega_2(g,r)\right)^2 r^{-2\alpha-1}\,dr\right)^{1/2}, \tag{2.3}$$

де

$$\omega_2(g,r) = \sup_{0\le h\le r}\left(\int_0^{L-h} |g(y+h)-g(y)|^2\,dy\right)^{1/2}$$

(див., наприклад, [14]). Для доведення гельдеровості траєкторій інтеграла за μ ми будемо використовувати наступне твердження.

Лема 2.1 ([9, лема 3.2])**.** *Нехай Z — довільна множина, а $q(y,z):[0,L]\times Z\to\mathbb{R}$ — функція така, що для деякого $1/2<\alpha<1$ для кожного $z\in Z$ буде $q(\cdot,z)\in B_{22}^{\alpha}([0,L])$. Тоді випадкова функція*

$$\zeta(z) = \int_{[0,L]} q(y,z)\,d\mu(y), \quad z\in Z,$$

має модифікацію $\tilde\zeta(z)$ таку, що для деякої константи C (незалежної від z, ω) та кожного $\omega\in\Omega$

$$\left|\tilde\zeta(z)\right| \le |q(0,z)\mu([0,L])| + C\,\|q(\cdot,z)\|_{B_{22}^{\alpha}([0,L])}\left\{\sum_{n\ge1}2^{n(1-2\alpha)}\sum_{1\le k\le 2^n}|\mu(\Delta_{kn})|^2\right\}^{1/2}. \tag{2.4}$$

Лему 2.1 було доведено в [9] для $q(y,z)\colon[0,1]\times Z\to\mathbb{R}$, але заміною змінних легко отримуємо потрібне нам твердження. При цьому лема 3.1 [9] дає, що при будь-якому $\alpha>1/2$

$$\sum_{n\ge1}2^{n(1-2\alpha)}\sum_{1\le k\le 2^n}|\mu(\Delta_{kn})|^2<+\infty \text{ м. н.} \tag{2.5}$$

Далі ми будемо накладати наступні умови.

Умова 1. $\sigma(t,x)\colon[0,T]\times[0,L]\to\mathbb{R}$ має неперервну за парою змінних обмежену похідну $\frac{\partial^2\sigma}{\partial t\,\partial x}$.

Умова 2. $u_0(y)=u_0(y,\omega)\colon[0,L]\times\Omega\to\mathbb{R}$ вимірна, і при кожному фіксованому $\omega\in\Omega$ має неперервну за y обмежену похідну $\frac{\partial u_0}{\partial y}$.

Через C ми будемо позначати не істотні для підрахунків константи, значення C можуть бути різними в різних формулах.

3. Виконання умови Гельдера за x

Теорема 3.1. *Нехай виконуються умови 1–2. Тоді для довільних фіксованих $t\in[0,T]$ і $0<\gamma_1<\frac16$ випадковий процес*

$$\vartheta(x) = \int_{[0,L]} d\mu(y)\int_0^t G(t-s,x,y)\sigma(s,y)\,ds, \quad 0\le x\le L,$$

має модифікацію з траєкторіями, що задовольняють умову Гельдера з показником γ_1.

Доведення. Позначимо

$$f_n(s,x,y)=\frac{e^{-(t-s)}}{\sqrt{4\pi(t-s)}}\exp\left\{-\frac{(y-x-2nL)^2}{4(t-s)}\right\}\sigma(s,y)\,,\quad -\infty<n<+\infty,$$

$$G^{(1)}(s,x,y)=\sum_{n\neq 0,1}\left(f_n(s,x,y)+f_n(s,-x,y)\right)+f_1(s,x,y)\,,$$

тоді

$$G(t-s,x,y)\sigma(s,y)=G^{(1)}(s,x,y)+f_0(s,x,y)+f_0(s,-x,y)+f_1(s,-x,y)\,.$$

За лемою 5.1 [9], при будь-якому $\gamma_1<\frac{1}{6}$ процес

$$\vartheta^{(1)}(x)=\int_{[0,L]}d\mu(y)\int_0^t f_0(s,x,y)\,ds=$$
$$e^{-t}\int_{[0,L]}d\mu(y)\int_0^t\frac{\exp\left\{-\frac{(y-x)^2}{4(t-s)}\right\}}{\sqrt{4\pi(t-s)}}\,e^s\sigma(s,y)\,ds$$

має модифікацію з гельдеровими траєкторіями з показником γ_1. У вказаній лемі 5.1 [9] розглядається стохастична міра на підмножинах $\mathbb{R}$, але ми можемо довизначити $\mu=0$ зовні $[0,L]$. При відповідному довизначені стохастичної міри і σ на $[-L,0]$, $[L,2L]$ з леми 5.1 [9] ми маємо аналогічну гельдеровість для процесів

$$\vartheta^{(2)}(x)=\int_{[0,L]}d\mu(y)\int_0^t f_0(s,-x,y)\,ds=\int_{[0,L]}d\mu(-y)\int_0^t f_0(s,x,-y)\,ds\,,$$
$$\vartheta^{(3)}(x)=\int_{[0,L]}d\mu(y)\int_0^t f_1(s,-x,y)\,ds=\int_{[0,L]}d\mu(2L-y)\int_0^t f_0(s,x,2L-y)\,ds\,.$$

Тепер для фіксованих t, x_1, x_2 розглянемо

$$g(y)=\int_0^t G^{(1)}(t-s,x_2,y)\sigma(s,y)\,ds-\int_0^t G^{(1)}(t-s,x_1,y)\sigma(s,y)\,ds$$

і оцінимо $\|g\|_{B^{\alpha}_{22}([0,L])}$, використовуючи (2.3).

З допомогою формули Лагранжа і умови 1, для деяких x^*, $y^*\in(0,L)$ при $n\neq 0$ отримуємо

$$\begin{aligned}&|f_n\left(s,x_2,y+h\right)-f_n\left(s,x_1,y+h\right)-f_n\left(s,x_2,y\right)+f_n\left(s,x_1,y\right)|=\\&\qquad\left|\left(x_2-x_1\right)h\frac{\partial^2 f_n\left(s,x^*,y^*\right)}{\partial x\partial y}\right|\le\frac{C\left|x_2-x_1\right|\left|h\right|n^2}{(t-s)^{5/2}}\exp\left\{-\frac{(2|n|-1)^2L^2}{4(t-s)}\right\}\end{aligned}\tag{3.1}$$

(ми провели безпосередній підрахунок похідних і використали, що $0<x^*$, $y^*<L$).

Аналогічно при $n\neq 0,1$

$$\begin{aligned}&|f_n\left(s,-x_2,y+h\right)-f_n\left(s,-x_1,y+h\right)-f_n\left(s,-x_2,y\right)+f_n\left(s,-x_1,y\right)|\le\\&\qquad\frac{C\left|x_2-x_1\right|\left|h\right|n^2}{(t-s)^{5/2}}\exp\left\{-\frac{\min\left\{(2n)^2,(2n-2)^2\right\}L^2}{4(t-s)}\right\}\,.\end{aligned}\tag{3.2}$$

Оскільки

$$\sum_{n\ge 1}n^2e^{-n^2a}\le\sum_{n\ge 1}n^2e^{-na}=\left(e^{-a}+e^{-2a}\right)\left(1-e^{-a}\right)^{-3}\le 2e^{-a}\left(1-e^{-a}\right)^{-3}\,,\tag{3.3}$$

сума значень в (3.1) і (3.2) не перевищує

$$\frac{C}{(t-s)^{5/2}} \exp\left\{-\frac{L^2}{4(t-s)}\right\}\left(1-\exp\left\{-\frac{L^2}{4(t-s)}\right\}\right)^{-3} \le \frac{C}{(t-s)^{5/2}} \exp\left\{-\frac{L^2}{4(t-s)}\right\}. \quad (3.4)$$

Квадрат останнього виразу має скінченний інтеграл на $[0,t]$, і тому

$$\omega_2(g,r) \le C\,|x_2-x_1|\,|r|\,. \quad (3.5)$$

Також за допомогою формули Лагранжа отримуємо, що при $n \neq 0$

$$|f_n(s,x_2,y) - f_n(s,x_1,y)| = \left|(x_2-x_1)\frac{\partial f_n}{\partial x}(x^*,y)\right| \le \frac{C\,|x_2-x_1|\,|n|}{(t-s)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{(2|n|-1)^2L^2}{4(t-s)}\right\}. \quad (3.6)$$

Оцінка, аналогічна (3.3) і (3.4), нам дає, що $|g(y)| \le C\,|x_2-x_1|$, і зокрема

$$|g(0)| \le C\,|x_2-x_1|\,, \quad \|g\|_{L_2([0,L])} \le C\,|x_2-x_1|\,. \quad (3.7)$$

Співвідношення (2.3), (2.4), (2.5), (3.5) і (3.7) при довільному $1/2 < \alpha < 1$ дають, що

$$\int_{[0,L]} d\mu(y) \int_0^t G^{(1)}(s,x,y)\,ds$$

має гельдерову модифікацію з показником γ_1. Враховуючи відмічені властивості траєкторій $\vartheta^{(1)}$, $\vartheta^{(2)}$, $\vartheta^{(3)}$, отримуємо твердження теореми. □

4. Виконання умови Гельдера за t

Теорема 4.1. *Нехай виконуються умови 1–2. Тоді для довільних фіксованих* $x \in [0,L]$ *і* $0 < \gamma_2 < \frac{1}{18}$ *випадковий процес*

$$\bar\vartheta(t) = \int_{[0,L]} d\mu(y) \int_0^t G(t-s,x,y)\sigma(s,y)\,ds, \quad 0 \le t \le T,$$

має модифікацію з траєкторіями, що задовольняють умову Гельдера з показником γ_2.

Доведення. Позначимо

$$\bar f_n(t,s,y) = \frac{e^{-(t-s)}}{\sqrt{4\pi(t-s)}}\left(\exp\left\{-\frac{(y-x-2nL)^2}{4(t-s)}\right\} + \exp\left\{-\frac{(y+x-2nL)^2}{4(t-s)}\right\}\right)\sigma(s,y), \quad -\infty < n < \infty, \quad \bar G^{(1)}(t,s,y) = \sum_{n\neq 0,1} \bar f_n(t,s,y)\,.$$

За лемою 6.1 [9], при будь-якому $\gamma_2 < \frac{1}{18}$ процес

$$\bar\vartheta^{(1)}(t) = e^{-t}\int_{[0,L]} d\mu(y) \int_0^t \frac{\exp\left\{-\frac{(y-x)^2}{4(t-s)}\right\}}{\sqrt{4\pi(t-s)}}\, e^s\sigma(s,y)\,ds$$

має модифікацію з гельдеровими траєкторіями з показником γ_2. Розглянувши інтегрування за стохастичними мірами $d\mu(-y)$, $d\mu(2L-y)$, $d\mu(y-2L)$, аналогічно процесам $\vartheta^{(2)}$ і $\vartheta^{(3)}$ в пункті 3, ми отримаємо таку ж властивість траєкторій при $y+x$, $y+x-2L$, $y-x-2L$ в експоненті відповідно. Тому доданки з $\bar f_0$ і $\bar f_1$ в $\bar\vartheta(t)$ задовольняють твердженню теореми.

Далі для фіксованих x, $t_1 < t_2$ позначимо

$$\bar g(y) = \int_0^{t_2} \bar G^{(1)}(t_2 - s, x, y)\sigma(s, y)\, ds - \int_0^{t_1} \bar G^{(1)}(t_1 - s, x, y)\sigma(s, y)\, ds =$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \bar G^{(1)}(t_2 - s, x, y)\sigma(s, y)\, ds + \int_0^{t_1} \Big(\bar G^{(1)}(t_2 - s, x, y) - \bar G^{(1)}(t_1 - s, x, y)\Big)\, ds =$$

$$\bar g^{(1)}(y) + \bar g^{(2)}(y)\,.$$

Щоб використати (2.3) і (2.4), будемо оцінювати $\bar g(y + h) - \bar g(y)$, тут і далі в пункті розглядаючи $n \neq 0, 1$.

$$\big|\bar f_n(t, s, y + h) - \bar f_n(t, s, y)\big| = |h| \left|\frac{\partial \bar f_n\,(t, s, y^*)}{\partial y}\right| \leq$$

$$\frac{C\,|h|\,|n|}{(t - s)^{3/2}}\, \exp\left\{-\frac{\min\left\{(2n + 1)^2,\ (2n - 2)^2\right\} L^2}{4(t - s)}\right\}.$$

Аналогічно (3.3) і (3.4), отримуємо

$$\left|\bar G^{(1)}(t_2, s, y + h) - \bar G^{(1)}(t_2, s, y)\right| \leq \frac{C|h|}{(t_2 - s)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{L^2}{4(t_2 - s)}\right\}.$$

Використовуючи заміну $v = L^2\left(4(t_2 - s)\right)^{-1}$, маємо, що

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{(t_2 - s)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{L^2}{4(t_2 - s)}\right\} ds = C \int_{\frac{L^2}{4(t_2 - t_1)}}^{\infty} \frac{e^{-v}}{\sqrt v}\, dv \leq C\sqrt{t_2 - t_1}$$

(в останній нерівності ми використали, що $e^{-v}/\sqrt v \leq e^{-v}\left(2\sqrt{t_2 - t_1}\,\right)/L$ на множині інтегрування). Тому

$$\left|\bar g^{(1)}(y + h) - \bar g^{(1)}(y)\right| \leq C|h|\sqrt{t_2 - t_1}.$$

Тепер будемо розглядати $\bar g^{(2)}(y + h) - \bar g^{(2)}(y)$. Маємо

$$\big|\bar f_n(t_2, s, y + h) - \bar f_n(t_1, s, y + h) - \bar f_n(t_2, s, y) + \bar f_n(t_1, s, y)\big| =$$

$$\left|(t_2 - t_1)h \frac{\partial^2 \bar f_n\,(t^*, s, y^*)}{\partial t\, \partial y}\right| \leq$$

$$\frac{C(t_2 - t_1)\,|h|\,|n|^3}{(t^* - s)^{7/2}} \exp\left\{-\frac{\min\left\{(2n + 1)^2,\ (2n - 2)^2\right\} L^2}{4(t^* - s)}\right\}.$$

Сума за $n \neq 0, 1$ останніх значень не перевищує

$$\frac{C(t_2 - t_1)\,|h|}{(t^* - s)^{7/2}}\, \exp\left\{-\frac{L^2}{4(t^* - s)}\right\}, \tag{4.1}$$

адже

$$\sum_{n \geq 1} n^3 e^{-n^2 a} \leq \sum_{n \geq 1} n^3 e^{-na} = e^{-a}\left(1 + 4e^{-a} + e^{-2a}\right)\left(1 - e^{-a}\right)^{-4} \leq 7e^{-a}\left(1 - e^{-a}\right)^{-4}.$$

Значення (4.1) є обмеженим при $0 \leq s < t_1 < t^* < t_2$, і значить

$$\left|\bar g^{(2)}(y + h) - \bar g^{(2)}(y)\right| \leq C|h|\,(t_2 - t_1)\,, \quad \omega_2(\bar g, r) \leq C\sqrt{t_2 - t_1}\,|r|\,. \tag{4.2}$$

Для оцінювання $|\bar g(0)|$ і $\|\bar g\|_{L_2([0,L])}$ відмітимо, що

$$\big|\bar f_n(t, s, y)\big| \leq \frac{C}{\sqrt{t - s}} \exp\left\{-\frac{\min\left\{(2n + 1)^2,\ (2n - 2)^2\right\} L^2}{4(t - s)}\right\},$$

тому

$$\left|\bar{G}^{(1)}(t_2 - s, x, y)\right| \le \frac{C}{\sqrt{t_2 - s}} \exp\left\{-\frac{L^2}{4(t-s)}\right\},$$

$$\left|\bar{g}^{(1)}(y)\right| \le C \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\sqrt{t_2 - s}}\, ds \le C\sqrt{t_2 - t_1}\,.$$

Також

$$\left|\bar{f}_n(t_2, s, y) - \bar{f}_n(t_1, s, y)\right| = (t_2 - t_1)\left|\frac{\partial \bar{f}_n\,(t^*, s, y)}{\partial t}\right| \le \frac{C(t_2 - t_1)n^2}{(t^* - s)^{5/2}} \exp\left\{-\frac{\min\left\{(2n+1)^2, (2n-2)^2\right\} L^2}{4(t^* - s)}\right\}. \tag{4.3}$$

Сума за всіма $n \ne 0, 1$ таких доданків не перевищує

$$\frac{C(t_2 - t_1)}{(t^* - s)^{5/2}} \exp\left\{-\frac{L^2}{4(t^* - s)}\right\},$$

тому $\left|\bar{g}^{(2)}(y)\right| \le C(t_2 - t_1)$, звідки

$$|\bar{g}(0)| \le C\sqrt{t_2 - t_1}, \quad \|\bar{g}\|_{L_2([0,L])} \le C\sqrt{t_2 - t_1}\,. \tag{4.4}$$

Співвідношення (2.3), (2.4), (2.5), (4.2) і (4.4) при довільному $1/2 < \alpha < 1$ дають, що

$$\int_{[0,L]} d\mu(y) \int_0^t \bar{G}^{(1)}(t, s, y)\, ds$$

має гельдерову модифікацію з показником γ_2. Враховуючи відмічені властивості траєкторій $\bar{\vartheta}^{(1)}$ і аналогічних трьох процесів, отримуємо твердження теореми. □

5. Властивості розв'язку рівняння

Теорема 5.1. *Нехай виконуються умови 1–2 і випадкова функція* $u(t,x)$ *задана рівністю* (2.1). *Тоді для будь-яких фіксованих* $\delta > 0$, $\gamma_2 < \frac{1}{18}$, $\gamma_1 < \frac{1}{6}$ *випадкова функція* $u(t,x)$ *має модифікацію* $\tilde{u}(t,x)$ *таку, що для деякої* $L_{\tilde{u}}(\omega) > 0$ *буде*

$$|\tilde{u}(t_1, x_1) - \tilde{u}(t_2, x_2)| \le L_{\tilde{u}}\left(|t_1 - t_2|^{\gamma_2} + |x_1 - x_2|^{\gamma_1}\right),$$
$$t_1,\ t_2 \in [\delta, T], \quad x_1,\ x_2 \in [0, L]\,.$$

Доведення. Розглянемо доданок $\int_0^L G(t,x,y)u_0(y)\,dy$ з (2.1), використовуючи розклад (2.2). При $n = 0$ доданок

$$\int_0^L \frac{e^{-t}}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left\{-\frac{(y-x)^2}{4t}\right\} u_0(y)\, dy$$

задовольняє вказану в твердженні умову Гельдера (див. теорему [9]). Заміною змінної y таку ж властивість будемо мати для кожного доданку в (2.2). Розглядаючи в (2.2) суму по всіх $n \ne 0, 1$, ми використаємо оцінку (3.6) (взявши $s = 0$ і u_0 замість σ), і з (3.4) отримаємо виконання умови Гельдера за x. Аналогічні міркування з використанням (4.3) дадуть виконання умови Гельдера за t.

Теореми 3.1 і 4.1 тепер дають, що u має модифікацію, гельдерову за x, і модифікацію, гельдерову за t.

Візьмемо модифікацію $\tilde{u}^{(x)}$, що задовольняє умову Гельдера за x при фіксованому t, і модифікацію $\tilde{u}^{(t)}$, що є гельдеровою за t при фіксованому x. Виключимо всі $\omega \in \Omega$ такі, що $\tilde{u}^{(x)}(t,x) \ne \tilde{u}^{(t)}(t,x)$ хоча б для однієї раціональної пари $(t,x) \in [\delta, T] \times [0, L]$. Для інших ω покладемо $\tilde{u} = \tilde{u}^{(x)} = \tilde{u}^{(t)}$ при раціональних (t,x) і довизначимо $\tilde{u}$ на $[\delta, T] \times [0, L]$ за неперервністю. Так ми отримаємо модифікацію $\tilde{u}(t, x)$, що є гельдеровою з вказаними показниками за x і t одночасно. $\square$

Отримані нами показники умови Гельдера такі ж, як і для розв'язків рівняння теплопровідності із загальною стохастичною мірою (теорема [9]). Відмітимо, що для випадку, коли випадковий вплив задається інтегралом за білим шумом, отримано кращу регулярність розв'язку стохастичного кабельного рівняння. В наслідку 3.4 [1] для будь-якого $\varepsilon > 0$ фактично було доведено гельдеровість траєкторій розв'язку з показниками $1/4 - \varepsilon$ за часовою змінною та $1/2 - \varepsilon$ — за просторовою.

Література

1. J. B. Walsh, *An introduction to stochastic partial differential equations*, Lect. Not. Math. **1180** (1984), 236–434.
2. H. Tuckwell, F. Wan, and Y. Wong, *The interspike interval of a cable model neuron with white noise input*, Biol. Cybern. **49** (1984), № 3, 155–167.
3. P. C. Bressloff, *Cable theory of protein receptor trafficking in a dendritic tree*, Phys. Rev. E **79** (2009), № 4, 041904-1–041904-16.
4. N. Eisenbaum, M. Foondun, and D. Khoshnevisan, *Dynkin's isomorphism theorem and the stochastic heat equation*, Potential Anal. (2010).
5. G. Kallianpur, and J. Xiong, *Stochastic differential equations in infinite-dimensional spaces*, IMS Lecture Notes–Monograph Series, vol. 26, Institute of Mathematical Statistics, Hayward, CA, 1995.
6. Z. Huang, C. Wang, and X. Wang, *Quantum cable equations in terms of generalized operators*, Acta Appl. Math. **63** (2000), № 1–3, 151–164.
7. V. Bally, A. Millet, and M. Sanz-Solè, *Approximation and support theorem in Hölder norm for parabolic stochastic partial differential equations*, Ann. Probab. **23** (1995), № 1, 178–222.
8. В. Н. Радченко, *Уравнение теплопроводности и волновое уравнение с общими случайными мерами*, Укр. мат. ж. **60** (2008), № 12, 1675–1685.
9. V. M. Radchenko, *Mild solution of the heat equation with a general stochastic measure*, Studia Mathematica **194** (2009), № 3, 231–251.
10. В. М. Радченко, *Властивості інтегралів за загальною випадковою мірою в стохастичному рівнянні теплопровідності*, Теорія ймовір. та матем. статист. **82** (2010), 104–114.
11. J. Memin, Yu. Mishura, and E. Valkeila, *Inequalities for the moments of Wiener integrals with respect to a fractional Brownian motion*, Statistics and Probability Letters **27** (2001), № 2, 197–206.
12. S. Kwapień and W. A. Woycziński, *Random Series and Stochastic Integrals: Single and Multiple*, Birkhäuser, Boston, 1992.
13. В. Н. Радченко, *Интегралы по общим случайным мерам*, Труды Института математики НАН Украины **27** (1999).
14. A. Kamont, *A discrete characterization of Besov spaces*, Approx. Theory Appl. (N.S.) **13** (1997), № 2, 63–77.

Кафедра математичного аналізу, Національний університет ім. Тараса Шевченка, Київ 01601, Україна

Адреса електронної пошти: vradchenko@univ.kiev.ua

Надійшла 17/03/2011