Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 84, 2011, стор. 131–141

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 84, 2011, pp. 131–141

ЗБІЖНІСТЬ РЯДІВ, СКЛАДЕНИХ З ЕЛЕМЕНТІВ БАГАТОВИМІРНИХ ГАУССІВСЬКИХ МАРКОВСЬКИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

УДК 519.21

М. К. РУНОВСЬКА

Анотація. Знайдено необхідні і достатні умови збіжності майже напевно рядів, складених з елементів багатовимірної гауссівської марковської послідовності.

Abstract. The necessary and sufficient conditions for the almost sure convergence of a series of multidimensional Gaussian Markov sequence are found.

Аннотация. Найдены необходимые и достаточные условия сходимости почти наверное рядов, составленных из элементов многомерной гауссовской марковской последовательности.

1. Вступ

Асимптотичні властивості гауссівських марковських послідовностей досліджувалися у різних роботах. Наприклад, у роботах [1, 3, 4, 6] було детально досліджено умови збіжності *майже напевно* (м.н.) до нуля, збіжності м.н. та обмеженості м.н. одновимірних та багатовимірних гауссівських марковських послідовностей. У роботах [7, 8] було знайдено необхідні і деякі достатні умови збіжності м.н. ряду, елементами якого є елементи гауссівської марковської послідовності. У роботі [10] знайдено критерій збіжності м.н. випадкового ряду, складеного з елементів гауссівської марковської послідовності випадкових величин.

Ця робота є продовженням роботи [10]. А саме, у цій статті досліджуються необхідні і достатні умови збіжності м.н. випадкового ряду, складеного з елементів багатовимірної гауссівської марковської послідовності.

Отже, розглянемо скінченовимірний евклідів простір $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, зі скалярним добутком (X, Y) та нормою $\|X\| = \sqrt{(X, X)}$, $X, Y \in \mathbb{R}^d$. Для $d \times d$-матриці $A = (a_{ij})_{i,j=1}^d$ ми будемо використовувати матричну норму

$$|||A||| = \Big(\sum_{i,j=1}^{d} a_{i,j}^2 \Big)^{1/2}.$$

У просторі $\mathbb{R}^d$ розглянемо багатовимірну центровану гауссівську марковську послідовність $(X_k) = (X_k, k \geq 1)$, тобто послідовність, задану рекурентними співвідношеннями

$$X_1 = D_1\Gamma_1, \quad X_k = C_k X_{k-1} + D_k \Gamma_k, \quad k \geq 2, \tag{1}$$

де (Γ_k) — послідовність незалежних у сукупності стандартних гауссівських випадкових векторів у $\mathbb{R}^d$, а (C_k) та (D_k) — невипадкові послідовності дійсних квадратних

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60G50, 65B10, 60G15; Secondary 40A05.

Ключові слова і фрази. Багатовимірна гауссівська марковська послідовність, гауссівська m-марковська послідовність, збіжність майже напевно випадкових рядів, теорія сум незалежних випадкових елементів з операторними нормуваннями.

матриць порядку d. Далі у цій роботі будемо припускати, що матриці C_k, $k \geq 1$, є невиродженими.

Для послідовності (X_k) розглянемо випадковий ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} X_k, \tag{2}$$

і будемо знаходити необхідні і достатні умови збіжності м.н. цього ряду.

Одержані результати можна застосувати для знаходження необхідних і достатніх умов збіжності м.н. рядів, складених з елементів гауссівської m-марковської послідовності випадкових величин. Зокрема, у цій роботі це зроблено для $m = 2$.

2. Попередні відомості

В цьому розділі містяться допоміжні твердження, які будуть використані при доведенні основних результатів.

Нехай $c(\mathbb{R}^d)$ — простір всіх збіжних послідовностей елементів простору $\mathbb{R}^d$; (Z_n) — послідовність незалежних симетричних випадкових векторів простору $\mathbb{R}^d$; $\Xi_n = \sum_{k=1}^{n} Z_k$, $n \geq 1$; $(\mathcal{A}_n)$ — послідовність лінійних неперервних операторів, що діють з $\mathbb{R}^d$ в $\mathbb{R}^d$. Через $\mathfrak{R}^\infty$ позначимо клас всіх монотонних послідовностей натуральних чисел, що прямують до нескінченності.

Наведемо критерій збіжності м.н. сум незалежних симетричних випадкових векторів з операторними нормуваннями у просторі $\mathbb{R}^d$ [3, 4, 5, 6].

Твердження 2.1. *Для того, щоб*

$$(\mathcal{A}_n \Xi_n) \in c(\mathbb{R}^d) \quad \text{м.н.},$$

необхідно і достатньо, щоб виконувалися наступні три умови:

А) *для кожного* $k \geq 1$ $(\mathcal{A}_n Z_k) \in c(\mathbb{R}^d)$ *м.н.;*

Б) *ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} \lim\limits_{n\to\infty} (\mathcal{A}_n Z_k)$ *збігається в* $\mathbb{R}^d$ *м.н.*;

В) *для всіх послідовностей* (m_j) *з класу* $\mathfrak{R}^\infty$ *має місце співвідношення*

$$\|\mathcal{A}_{m_{j+1}}(\Xi_{m_{j+1}} - \Xi_{m_j})\| \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \text{м.н.}$$

Для перевірки умови В) твердження 2.1 для гауссівських випадкових векторів у цій роботі застосовується наступне твердження (див., наприклад, [4]).

Твердження 2.2. *Нехай* (Γ_k) *— послідовність центрованих гауссівських випадкових векторів у просторі* $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$. *Якщо для всіх* $\varepsilon > 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \exp\Big\{ -\frac{\varepsilon}{\mathsf{E}\,\|\Gamma_k\|^2} \Big\} < \infty, \tag{3}$$

то

$$\lim_{k\to\infty} \|\Gamma_k\| = 0, \quad \text{м.н.} \tag{4}$$

Якщо послідовність (Γ_k) *є послідовністю незалежних випадкових векторів, то співвідношення* (4) *і* (3) *є рівносильними.*

3. Критерій збіжності м.н. ряду, складеного з елементів багатовимірної гауссівської марковської послідовності

Перш ніж розглянути необхідні і достатні умови збіжності м.н. ряду (2) введемо допоміжні позначення. Нехай для $n \geq 1$

$$Q(n,k) = \begin{cases} D_k + \sum_{l=1}^{n-k} \Big(\prod_{j=k+l}^{k+1} C_j \Big) D_k, & 1 \leq k \leq n-1, \\ D_k, & k = n, \\ \mathcal{O}, & k > n, \end{cases}$$

де $\mathcal{O}$ — нульова $d \times d$-матриця. Для $k \geq 1$ розглянемо матричний ряд

$$\sum_{l=1}^{\infty} \Big(\prod_{j=k+l}^{k+1} C_j \Big) D_k, \tag{5}$$

та покладемо

$$Q(\infty,k) = D_k + \sum_{l=1}^{\infty} \Big(\prod_{j=k+l}^{k+1} C_j \Big) D_k,$$

якщо відповідний ряд є збіжним у матричній нормі.

Для багатовимірної гауссівської марковської послідовності (1) має місце критерій збіжності м.н. ряду (2).

Теорема 3.1. *Нехай матриці C_k, $k \geq 1$, є невиродженими. Для того, щоб випадковий ряд (2) був збіжним м.н., необхідно і достатньо, щоб виконувалися наступні три умови:*

1) *для кожного $k \geq 1$ ряд (5) є збіжним у матричній нормі*;

2) *виконується співвідношення*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |||Q(\infty,k)|||^2 < \infty; \tag{6}$$

3) *для всіх послідовностей (m_j) з класу $\mathfrak{R}^\infty$ та будь-якого $\varepsilon > 0$*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \exp\Big\{ - \frac{\varepsilon}{\sum_{k=m_j+1}^{m_{j+1}} |||Q(m_{j+1},k)|||^2} \Big\} < \infty. \tag{7}$$

Доведення. Перш ніж довести теорему введемо деякі позначення. Розглянемо послідовність (S_n) часткових сум ряду (2):

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, \quad n \geq 1.$$

Метод, який ми будемо використовувати при доведенні теореми 3.1, полягає у переході від послідовності (S_n) до послідовності сум незалежних центрованих гауссівських векторів у просторі $\mathbb{R}^{2d}$. Подібний метод розглядався, наприклад, у монографіях [4, 6].

Оскільки $X_n = S_n - S_{n-1}$, $n \geq 1$, то зі співвідношення (1) випливає, що послідовність (S_n) задовольняє наступне рекурентне співвідношення 2-го порядку:

$$S_{-1} = S_0 = \mathbf{0}, \quad S_n = (I + C_n)S_{n-1} - C_n S_{n-2} + D_n \Gamma_n, \quad n \geq 1, \tag{8}$$

де I — одинична матриця порядку d, а $\mathbf{0}$ — нульовий вектор простору $\mathbb{R}^d$.

Перейдемо від співвідношення (8) до рекурентного співвідношення 1-го порядку у просторі $\mathbb{R}^{2d}$. Це співвідношення має вигляд

$$\widetilde{S}_1 = \Theta_1, \quad \widetilde{S}_n = B_n \widetilde{S}_{n-1} + \Theta_n, \quad n \geq 2, \tag{9}$$

де

$$\widetilde{S}_n = \begin{pmatrix} S_n \\ S_{n-1} \end{pmatrix}, \quad B_n = \begin{pmatrix} I + C_n & -C_n \\ I & \mathcal{O} \end{pmatrix}, \quad \Theta_n = \begin{pmatrix} D_n \Gamma_n \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad n \ge 1.$$

З введених означень випливає, що випадковий ряд (2) є збіжним м.н., тоді і тільки тоді, коли існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} \widetilde{S}_n$, м.н.

З рекурентного співвідношення (9) отримаємо

$$\widetilde{S}_n = \Big(\prod_{j=n}^{2} B_j\Big)\Theta_1 + \Big(\prod_{j=n}^{3} B_j\Big)\Theta_2 + \dots + B_n\Theta_{n-1} + \Theta_n, \quad n \ge 1, \tag{10}$$

де $\prod_{j=n}^{k} B_j = B_n B_{n-1} \dots B_k$, $k \le n$. Застосовуючи метод математичної індукції, бачимо, що

$$\prod_{j=n}^{k} B_j = \begin{pmatrix} I + \sum_{l=1}^{n-k+1}\Big(\prod_{j=k+l-1}^{k} C_j\Big) & -\sum_{l=1}^{n-k+1}\Big(\prod_{j=k+l-1}^{k} C_j\Big) \\ I + \sum_{l=1}^{n-k}\Big(\prod_{j=k+l-1}^{k} C_j\Big) & -\sum_{l=1}^{n-k}\Big(\prod_{j=k+l-1}^{k} C_j\Big) \end{pmatrix}, \quad 2 \le k \le n.$$

Перейдемо до доведення необхідної частини теореми, тобто покажемо, що зі збіжності випадкового ряду (2) випливають умови 1)-3) теореми 3.1.

У цій роботі ми не будемо наводити доведення необхідності умов 1) і 2) теореми 3.1, оскільки доведення цих умов аналогічне доведенню теореми 3.1 роботи [8] з відповідною заміною скалярних коефіцієнтів на матричні.

Для доведення необхідності умови 3) теореми 3.1 будемо застосовувати *метод стискання у просторі збіжних послідовностей* [2, 4, 6]. Зафіксуємо довільну послідовність (m_j) з класу $\mathfrak{R}^\infty$.

Розглянемо масив випадкових векторів $(Y_{n,k}; n, k \ge 1)$, де

$$Y_{n,k} = \begin{cases} \Big(\prod_{j=n}^{k+1} B_j\Big)\Theta_k, & 1 \le k \le n-1, \\ \Theta_k, & k = n, \\ \overrightarrow{0'}, & k > n, \end{cases}$$

а $\overrightarrow{0'}$ — нульовий вектор у просторі $\mathbb{R}^{2d}$. Цей масив задовольняє наступні умови:
а) для кожного $n \ge 1$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} Y_{n,k}$ є збіжним м.н. у нормі простору $\mathbb{R}^{2d}$;
б) послідовності $W_k = (Y_{n,k}, n \ge 1)$, $k \ge 1$, є незалежними і симетричними як випадкові елементи простору послідовностей.

Крім того,

$$\widetilde{S}_n = \sum_{k=1}^{\infty} Y_{n,k}, \quad n \ge 1.$$

Поряд з масивом $(Y_{n,k}; n, k \ge 1)$ розглянемо масив стискання $(\lambda_{n,k}; n, k \ge 1)$, де

$$\lambda_{n,k} = \begin{cases} 1, & n = m_{j+1}, \quad m_j < k \le m_{j+1}, \quad j \ge 1, \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Оскільки випадковий ряд (2) є збіжним м.н., то існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} \widetilde{S}_n$ м.н. Звідси випливає, що послідовність векторів $(\sum_{k=1}^{\infty} Y_{n,k})$ є збіжною м.н. у просторі $\mathbb{R}^{2d}$ і, крім того,

$$\|\lambda_{n,k} Y_{n,k}\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad k \ge 1, \quad \text{м.н.}$$

Згідно з принципом стискання (див. наслідок 2.7.1 [4]) звідси випливає, що

$$\Big\| \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{n,k} Y_{n,k} \Big\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \text{м.н.}$$

Останнє співвідношення має вигляд:

$$\Big\| \sum_{k=m_j+1}^{m_{j+1}} \Big(\prod_{i=m_{j+1}}^{k+1} B_i \Big) \Theta_k \Big\| \underset{j\to\infty}{\to} 0, \quad \text{м.н.},$$

що еквівалентно тому що

$$\left\| \begin{pmatrix} \sum_{k=m_j+1}^{m_{j+1}} Q(m_{j+1},k)\Gamma_k \\ \sum_{k=m_j+1}^{m_{j+1}-1} Q(m_{j+1}-1,k)\Gamma_k \end{pmatrix} \right\| \underset{j\to\infty}{\to} 0, \quad \text{м.н.}$$

Звідси випливає, що

$$\lim_{j\to\infty} \Big\| \sum_{k=m_j+1}^{m_{j+1}} Q(m_{j+1},k)\Gamma_k \Big\| = 0, \quad \text{м.н.} \tag{11}$$

Оскільки (Γ_k) — послідовність незалежних у сукупності стандартних гауссівських векторів, то випадковий вектор $\sum_{k=m_j+1}^{m_{j+1}} Q(m_{j+1},k)\Gamma_k$ є центрованим гауссівським випадковим вектором для всіх $j \ge 1$. Крім того, для будь-яких $j_1 \ne j_2$ випадкові вектори $\sum_{k=m_{j_1}+1}^{m_{j_1+1}} Q(m_{j_1+1},k)\Gamma_k$ і $\sum_{k=m_{j_2}+1}^{m_{j_2+1}} Q(m_{j_2+1},k)\Gamma_k$ є незалежними між собою. Тому з (11) відповідно до твердження 2.2 маємо, що для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \exp\Big\{ - \frac{\varepsilon}{\sum_{k=m_j+1}^{m_{j+1}} |||Q(m_{j+1},k)|||^2} \Big\} < \infty.$$

Таким чином, виконується умова 3) теореми 3.1. Отже, необхідну частину теореми 3.1 доведено.

Доведемо достатню частину теореми, тобто покажемо, що з умов 1)-3) випливає збіжність м.н. ряду (2).

Оскільки всі матриці C_n, $n \ge 1$, є невиродженими, то всі матриці B_n, $n \ge 1$, з представлення (10) є також невиродженими, тобто $\det B_n = \det C_n \ne 0$, $n \ge 1$. Отже, від співвідношення (10) можна перейти до наступного співвідношення

$$\widetilde{S}_n = \Big(\prod_{j=n}^{2} B_j \Big) \Big(\Theta_1 + B_2^{-1}\Theta_2 + (B_2^{-1}B_3^{-1})\Theta_3 + \cdots + (B_2^{-1}B_3^{-1}\dots B_n^{-1})\Theta_n \Big), \quad n \ge 1,$$

де B_k^{-1} — матриця, обернена до матриці B_k, $k \ge 1$.

Представимо послідовність $(\widetilde{S}_n)$ у вигляді послідовності сум незалежних випадкових векторів з операторними нормуваннями [4, 5, 6], а саме

$$\widetilde{S}_n = \mathcal{A}_n \sum_{k=1}^{n} V_k = \mathcal{A}_n \Xi_n, \quad n \ge 1,$$

де

$$\Xi_n = \sum_{k=1}^{n} V_k, \quad n \ge 1,$$

$$V_1 = \Theta_1, \qquad V_k = \Big(\prod_{j=2}^{k} B_j^{-1} \Big) \Theta_k, \quad k \ge 2.$$

Крім того, в нашому випадку

$$\mathcal{A}_1 = I, \quad \mathcal{A}_n = \prod_{j=n}^{2} B_j = \begin{pmatrix} I + \sum_{l=1}^{n-1} \Big(\prod_{j=l+1}^{2} C_j \Big) & -\sum_{l=1}^{n-1} \Big(\prod_{j=l+1}^{2} C_j \Big) \\ I + \sum_{l=1}^{n-2} \Big(\prod_{j=l+1}^{2} C_j \Big) & -\sum_{l=1}^{n-2} \Big(\prod_{j=l+1}^{2} C_j \Big) \end{pmatrix}, \quad n \ge 2.$$

Зауважимо, що (V_n) — послідовність незалежних центрованих гауссівських випадкових векторів у просторі $\mathbb{R}^{2d}$. Таким чином, послідовність $(\widetilde{S}_n)$ представлена у вигляді послідовності $(\mathcal{A}_n\Xi_n)$ сум незалежних симетричних випадкових векторів з операторними нормуваннями у просторі $\mathbb{R}^{2d}$. Звідси випливає, що випадковий ряд (2) є збіжним м.н., якщо $(\mathcal{A}_n\Xi_n) \in c(\mathbb{R}^{2d})$ м.н. Застосуємо твердження 2.1 до послідовності $(\mathcal{A}_n\Xi_n)$.

Нехай ряд (5) є збіжним для всіх $k \geq 1$ у матричній нормі. Звідси випливає, що для всіх $k \geq 1$ існує границя

$$\lim_{n\to\infty} Q(n,k) = Q(\infty,k).$$

Враховуючи, що

$$\mathcal{A}_n V_k = B_n B_{n-1} \dots B_{k+1}\Theta_k = \begin{pmatrix} Q(n,k)\Gamma_k \\ Q(n-1,k)\Gamma_k \end{pmatrix}, \quad k,n \geq 1,$$

отримаємо, що для всіх $k \geq 1$

$$(\mathcal{A}_n V_k) \in c(\mathbb{R}^{2d}) \ \text{ м.н.},$$

тобто виконується умова А) твердження 2.1. Крім того,

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{A}_n V_k = \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} Q(n,k)\Gamma_k \\ Q(n-1,k)\Gamma_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q(\infty,k)\Gamma_k \\ Q(\infty,k)\Gamma_k \end{pmatrix}, \quad k \geq 1.$$

Оскільки

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\lim_{n\to\infty} \mathcal{A}_n V_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} Q(\infty,k)\Gamma_k \\ Q(\infty,k)\Gamma_k \end{pmatrix},$$

то згідно з умовою (6) ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{A}_n V_k)$ є збіжним м.н. у просторі $\mathbb{R}^{2d}$. Таким чином, виконується умова Б) твердження 2.1.

Розглянемо довільну послідовність (m_j) з класу $\mathfrak{R}^{\infty}$. Тоді

$$\mathcal{A}_{m_{j+1}}(\Xi_{m_{j+1}} - \Xi_{m_j}) = \Big(\prod_{j=m_{j+1}}^{m_j+2} B_j \Big)\Theta_{m_j+1} + \dots + B_{m_{j+1}}\Theta_{m_{j+1}-1} + \Theta_{m_{j+1}} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=m_j+1}^{m_{j+1}} Q(m_{j+1},k)\Gamma_k \\ \sum_{k=m_j+1}^{m_{j+1}-1} Q(m_{j+1}-1,k)\Gamma_k \end{pmatrix}, \quad j \geq 1. \tag{12}$$

Нехай виконується умова (7). Тоді з (12) згідно з твердженням 2.2 має місце умова

$$\lim_{j\to\infty} \Big\| \sum_{k=m_j+1}^{m_{j+1}} Q(m_{j+1},k)\Gamma_k \Big\| = 0, \quad \text{м.н.}$$

Звідси та з (12) випливає, що

$$\lim_{j\to\infty} \|\mathcal{A}_{m_{j+1}}(\Xi_{m_{j+1}} - \Xi_{m_j})\| = 0, \quad \text{м.н.},$$

тобто виконується умова В) твердження 2.1.

Таким чином, мають місце умови А)-В) твердження 2.1, згідно з яким $(\mathcal{A}_n\Xi_n) \in c(\mathbb{R}^{2d})$ м.н., тобто випадковий ряд (2) є збіжним м.н. Отже, теорема 3.1 доведена. ☐

Зауваження 3.1. *Припущення про невиродженість матриць C_k, $k \geq 1$, не є принциповим і зроблено для спрощення доведення теореми* 3.1. *При переході до загального випадку матриць C_k, $k \geq 1$, потрібно використовувати метод збурення* [3, 4, 6]. *Для розмірності простору $d = 1$, це було зроблено у роботі* [10].

4. Критерій збіжності м.н. ряду, складеного з елементів гауссівської 2-марковської послідовності випадкових величин

В цьому розділі розглянуто необхідні і достатні умови збіжності м.н. випадкового ряду, складеного з елементів центрованої *гауссівської 2-марковської послідовності.* А саме, розглянемо послідовність випадкових величин (ξ_k), задану рекурентними співвідношеннями 2-го порядку:

$$\xi_{-1} = \xi_0 = 0, \quad \xi_k = a_k \xi_{k-1} + b_k \xi_{k-2} + \beta_k \gamma_k, \quad k \geq 1, \tag{13}$$

де (β_k) — невід'ємна невипадкова послідовність, (γ_k) — стандартна гауссівська послідовність, а (a_k) і (b_k) — невипадкові послідовності. Далі будемо припускати, що $b_k \neq 0$, $k \geq 1$.

Для послідовності (ξ_k) розглянемо випадковий ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k, \tag{14}$$

і знайдемо необхідні і достатні умови збіжності м.н. цього ряду.

Для $k \geq 1$ розглянемо невипадкову дійсну послідовність $(u_n^{(k+1)}, n \geq k-1)$, задану наступними рекурентними співвідношеннями

$$u_{k-1}^{(k+1)} = 0, \quad u_k^{(k+1)} = 1, \qquad u_n^{(k+1)} = a_n u_{n-1}^{(k+1)} + b_n u_{n-2}^{(k+1)}, \quad n \geq k+1.$$

Для $k \geq 1$ покладемо

$$U_k = \sum_{l=0}^{\infty} \beta_k u_{k+l}^{(k+1)},$$

якщо ряд

$$\sum_{l=0}^{\infty} \beta_k u_{k+l}^{(k+1)} \tag{15}$$

є збіжним.

Має місце наступний критерій збіжності м.н. ряду (14).

Теорема 4.1. *Нехай (ξ_k) — центрована гауссівська 2-марковська послідовність. Для того, щоб випадковий ряд* (14) *був збіжним м.н., необхідно і достатньо, щоб виконувалися наступні три умови:*

1) *для кожного $k \geq 1$ є збіжним невипадковий ряд* (15);
2) *виконується співвідношення*

$$\sum_{k=1}^{\infty} U_k^2 < \infty; \tag{16}$$

3) *для всіх послідовностей (m_j) з класу $\mathfrak{R}^\infty$ і будь-якого $\varepsilon > 0$*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \exp\Big\{ - \frac{\varepsilon}{\sum_{k=m_j+1}^{m_{j+1}} \Big(\sum_{l=0}^{m_{j+1}-k} u_{k+l}^{(k+1)} \Big)^2 \beta_k^2} \Big\} < \infty.$$

Доведення. Метод, який використовується при доведенні теореми 4.1, полягає у переході від рекурентного співвідношення 2-го порядку (13) до відповідного рекурентного співвіношення 1-го порядку у просторі $\mathbb{R}^2$. Подібний підхід застосовувався у роботі [3], і був узагальнений у монографіях [4, 6]. Для цього покладемо

$$X_k = \begin{pmatrix} \xi_k \\ \xi_{k-1} \end{pmatrix}, \qquad \Gamma_k = \begin{pmatrix} \gamma_k \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad D_k = \begin{pmatrix} \beta_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C_k = \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad k \geq 1.$$

Підкреслимо, що матриця C_k є матрицею Фробеніуса для кожного $k \geq 1$. Причому, оскільки $b_k \neq 0$, $k \geq 1$, то матриці C_k, $k \geq 1$, є невиродженими.

Перейдемо від співвідношення (13) до рекурентного співвідношення 1-го порядку у просторі $\mathbb{R}^2$, а саме

$$X_1 = D_1\Gamma_1, \quad X_k = C_k X_{k-1} + D_k \Gamma_k, \quad k \geq 2.$$

Таким чином, послідовність (X_k) є центрованою гауссівською марковською послідовністю у просторі $\mathbb{R}^2$. Тому випадковий ряд (14) є збіжним м.н. тоді і тільки тоді, коли ряд $\sum_{k=1}^{\infty} X_k$ є збіжним м.н. у просторі $\mathbb{R}^2$. Застосуємо до ряду $\sum_{k=1}^{\infty} X_k$ теорему 3.1.

Покажемо, що умови 1)-3) теореми 4.1 виконуються тоді і тільки тоді, коли виконуються умови 1)-3) теореми 3.1.

У нашому випадку для $1 \leq k \leq n-1$

$$Q(n,k) = D_k + \sum_{l=1}^{n-k} \Big(\prod_{j=k+l}^{k+1} C_j \Big) D_k = \begin{pmatrix} \big(\sum_{l=0}^{n-k} u_{k+l}^{(k+1)}\big)\beta_k & 0 \\ \big(\sum_{l=1}^{n-k} u_{k+l-1}^{(k+1)}\big)\beta_k & 0 \end{pmatrix},$$

і

$$Q(\infty,k) = \begin{pmatrix} U_k & 0 \\ U_k & 0 \end{pmatrix}, \quad k \geq 1.$$

Таким чином, для $k \geq 1$ числовий ряд $\sum_{l=0}^{\infty} u_{k+l}^{(k+1)}$ є збіжним тоді і тільки тоді, коли матричний ряд $\sum_{l=1}^{n-k} \prod_{j=k+l}^{k+1} C_j$ є збіжним у матричній нормі для кожного $k \geq 1$.

Далі, оскільки (γ_k) — стандартна гауссівська послідовність, і

$$|||Q(\infty,k)|||^2 = 2U_k^2,$$

то умова (6) виконується тоді і тільки тоді, коли має місце співвідношення (16).

Нарешті, зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і довільну послідовність (m_j) з класу $\mathfrak{R}^{\infty}$. Тоді умова

$$\lim_{j\to\infty} \Big\| \sum_{k=m_j+1}^{m_{j+1}} Q(m_{j+1},k)\Gamma_k \Big\| = 0, \quad \text{м.н.}$$

виконується тоді і тільки тоді, коли

$$\lim_{j\to\infty} \Big| \sum_{k=m_j+1}^{m_{j+1}} \Big(\sum_{l=0}^{m_{j+1}-k} u_{k+l}^{(k+1)} \Big) \beta_k \gamma_k \Big| = 0, \quad \text{м.н.}$$

Оскільки (γ_k) — стандартна гауссівська послідовність, то відповідно до твердження 2.2 останнє співвідношення еквівалентне тому, що для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \exp\Bigg\{ -\frac{\varepsilon}{\sum_{k=m_j+1}^{m_{j+1}} \Big(\sum_{l=0}^{m_{j+1}-k} u_{k+l}^{(k+1)}\Big)^2 \beta_k^2} \Bigg\} < \infty.$$

Теорему 4.1 доведено. □

Зауваження 4.1. *Використовуючи підхід, застосований у теоремі* 4.1, *можна знайти необхідні і достатні умови збіжності м.н. випадкового ряду, складеного з елементів центрованої гауссівської m-марковської послідовності, $m \geq 1$, тобто послідовності випадкових величин (ξ_k), що задається наступними рекурентними співвідношеннями*

$$\xi_{1-m} = \cdots = \xi_{-1} = \xi_0 = 0, \quad \xi_k = b_{k_1}\xi_{k-1} + b_{k_2}\xi_{k-2} + \cdots + b_{k_m}\xi_{k-m} + \beta_k\gamma_k, \quad k \geq 1,$$

де (β_k) — невід'ємна невипадкова послідовність, $(b_{k_j}; 1 \leq j \leq m, k \geq 1)$ — невипадковий масив дійсних чисел, а (γ_k) — стандартна гауссівська послідовність.

Розглянемо деякі наслідки.

Наслідок 4.1. *Нехай* (ξ_k) — *гауссівська 2-марковська послідовність така, що* $a_k \geq 0$, $b_k > 0$, $k \geq 1$. *Для того, щоб випадковий ряд* (14) *був збіжним м.н., необхідно і достатньо, щоб виконувалися наступні дві умови:*

1) *для кожного* $k \geq 1$ *є збіжним невипадковий ряд* (15);
2) *виконується співвідношення* (16).

Доведення. Зауважимо, що умови 1) і 2) наслідку 4.1 співпадають з умовами 1) і 2) теореми 4.1. Тому покажемо, що має місце умова 3) теореми 4.1. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і довільну послідовність (m_j) з класу $\mathfrak{R}^\infty$. Оскільки $a_k \geq 0$, $b_k > 0$, $k \geq 1$, то для всіх $j \geq 1$

$$\sum_{l=0}^{m_{j+1}-k} u_{k+l}^{(k+1)} \leq \sum_{l=0}^{\infty} u_{k+l}^{(k+1)}, \quad k \geq 1.$$

Тому для всіх $j \geq 1$

$$\exp\Big\{-\frac{\varepsilon}{\sum_{i=m_j+1}^{m_{j+1}} \left(\sum_{l=0}^{m_{j+1}-k} u_{k+l}^{(k+1)}\right)^2 \beta_k^2}\Big\} \leq \frac{1}{\varepsilon}\Big(\sum_{i=m_j+1}^{m_{j+1}} \Big(\sum_{l=0}^{m_{j+1}-k} u_{k+l}^{(k+1)}\Big)^2 \beta_k^2\Big) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon}\Big(\sum_{i=m_j+1}^{m_{j+1}} U_k^2\Big),$$

а збіжність ряду $\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=m_j+1}^{m_{j+1}} U_k^2\right)$ випливає з умови (16). Таким чином, умова 3) теореми 4.1 виконується автоматично. Наслідок 4.1 доведено. □

Наступний результат дає критерій збіжності м.н. ряду, складеного з елементів гауссівської 2-марковської послідовності зі сталими коефіцієнтами.

Наслідок 4.2. *Нехай послідовність* (ξ_k) *задана наступними рекурентними співвідношеннями*

$$\xi_{-1} = \xi_0 = 0, \quad \xi_k = a\xi_{k-1} + b\xi_{k-2} + \beta_k\gamma_k, \quad k \geq 1,$$

де a *і* b — *деякі сталі, а* (β_k) — *невипадкова невід'ємна дійсна послідовність така, що серед її елементів є елементи не рівні нулю.*

Випадковий ряд (14) *є збіжним м.н. тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні 2 умови:*

1) *коефіцієнти* a *і* b *задовольняють нерівність:* $-1 < b < 1 - |a|$;
2) *виконується співвідношення*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^2 < \infty. \tag{17}$$

Доведення. Розглянемо матрицю Фробеніуса

$$C = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що $b \neq 0$, тобто матриця C є невиродженою. Характеристичне рівняння для цієї матриці має вигляд

$$\lambda^2 - a\lambda - b = 0. \tag{18}$$

Нехай λ_1 і λ_2 — корені характеристичного рівняння. Зауважимо, що у загальному випадку корені можуть бути комплексними числами. Позначимо через r спектральний радіус матриці C, тобто

$$r = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\},$$

а через μ — максимальну серед кратностей коренів λ_k, $k = 1, 2$.

Далі покладемо

$$X_k = \begin{pmatrix} \xi_k \\ \xi_{k-1} \end{pmatrix}, \qquad \Gamma_k = \begin{pmatrix} \gamma_k \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D_k = \beta_k M, \qquad k \geq 1.$$

Тоді від рекурентного співвідношення 2-го порядку, заданого у просторі $\mathbb{R}$, можна перейти до рекурентного співвідношення 1-го порядку у просторі $\mathbb{R}^2$. А саме,

$$X_1 = D_1 \Gamma_1, \quad X_k = C X_{k-1} + D_k \Gamma_k, \quad k \geq 2.$$

Очевидно послідовність (X_k) є центрованою гауссівською марковською послідовністю у просторі $\mathbb{R}^2$. Тому випадковий ряд (14) збігається м.н. тоді і тільки тоді, коли випадковий ряд $\sum_{k=1}^{\infty} X_k$ збігається м.н. у просторі $\mathbb{R}^2$. Таким чином, можна застосувати теорему 3.1 до ряду $\sum_{k=1}^{\infty} X_k$.

Розглянемо матричний ряд

$$\sum_{l=0}^{\infty} C^l D_k.$$

Зауважимо, що для всіх $k \geq 1$

$$|||C^l D_k||| = |||C^l \beta_k M||| = \beta_k |||C^l M|||, \quad l \geq 1.$$

Оскільки матриця C є матрицею Фробеніуса, то відповідно до оцінок, встановлених у роботі [9] (див. також лему 7.7.3 [6]), для будь-якого $l \geq 1$ отримаємо

$$c_1 \cdot r^l \cdot l^{\mu-1} \leq |||C^l M||| \leq c_2 \cdot r^l \cdot l^{\mu-1}, \tag{19}$$

де c_1 і c_2 деякі сталі такі, що $c_2 > c_1 > 0$. Звідси

$$c_1 \cdot r^l \cdot l^{\mu-1} \cdot \beta_k \leq |||C^l D_k||| \leq c_2 \cdot r^l \cdot l^{\mu-1} \cdot \beta_k, \quad l \geq 1,$$

якщо відповідне $\beta_k \neq 0$. Тому для відповідного k матричний ряд $\sum_{l=0}^{\infty} C^l D_k$ є збіжним у матричній нормі тоді і тільки тоді, коли

$$\sum_{l=0}^{\infty} r^l \cdot l^{\mu-1} < \infty.$$

Оскільки $\mu = 1$ або $\mu = 2$, то останнє співвідношення виконується тоді і тільки тоді, коли $r < 1$. Розв'язуючи характеристичне рівняння (18) отримаємо, що $r < 1$ тоді і тільки тоді, коли коефіцієнти a і b задовольняють нерівність

$$-1 < b < 1 - |a|.$$

Таким чином, умова 1) теореми 3.1 у нашому випадку має місце тоді і тільки тоді, коли виконується умова 1) наслідку 4.2.

Далі, оскільки

$$|||Q(\infty, k)|||^2 = \Big|\Big|\Big|\Big(\sum_{l=0}^{\infty} C^l\Big)\beta_k M\Big|\Big|\Big|^2 = \beta_k^2 \Big|\Big|\Big|\Big(\sum_{l=0}^{\infty} C^l\Big) M\Big|\Big|\Big|^2, \quad k \geq 1,$$

то умова (6) виконується тоді і тільки тоді, коли має місце умова (17).

Нарешті, зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і довільну послідовність (m_j) з класу $\mathfrak{R}^{\infty}$. Тоді згідно з (19) отримаємо

$$\exp\Big\{-\frac{\varepsilon}{\sum_{k=m_j+1}^{m_{j+1}} |||Q(m_{j+1}, k)|||^2}\Big\} \leq \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=m_j+1}^{m_{j+1}} |||Q(m_{j+1}, k)|||^2 =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=m_j+1}^{m_{j+1}} \Big|\Big|\Big|\Big(\sum_{l=0}^{m_{j+1}-k} C^l\Big)\beta_k M\Big|\Big|\Big|^2 \leq \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=m_j+1}^{m_{j+1}} \beta_k^2 \Big(\sum_{l=0}^{m_{j+1}-k} \Big|\Big|\Big| C^l M \Big|\Big|\Big|\Big)^2 \leq$$

$$\leq \frac{c_2^2}{\varepsilon} \sum_{k=m_j+1}^{m_{j+1}} \beta_k^2 \Big(\sum_{l=0}^{m_{j+1}-k} r^l \cdot l^{\mu-1} \Big)^2 \leq \frac{c_2^2}{\varepsilon} \Big(\sum_{l=0}^{\infty} r^l \cdot l^{\mu-1} \Big)^2 \cdot \sum_{k=m_j+1}^{m_{j+1}} \beta_k^2.$$

Таким чином, умова (7) випливає з умови (17) .

Наслідок 4.2 доведено. □

Зауважимо, що аналогічний, наведеному у наслідку 4.2, підхід можна застосовувати для знаходження необхідних і достатніх умов збіжності м.н. ряду (14), складеного з елементів гауссівської m-марковської послідовності випадкових величин зі сталими коефіцієнтами.

5. Висновки

У статті знайдено критерій збіжності м.н. рядів, складених з елементів багатовимірної гауссівської марковської послідовності. Отриманий критерій застосовано до знаходження необхідних і достатніх умов збіжності м.н. сум, складених з елементів гауссівської 2-марковської послідовності випадкових величин.

Література

1. В. В. Булдыгин, *Усиленные законы больших чисел и сходимость к нулю гауссовских последовательностей*, Теория вероятн. и матем. статист. **19** (1978), 33–41.
2. В. В. Булдыгин, С. А. Солнцев, *Принцип сжатия и усиленный закон больших чисел для взвешеных сумм*, Теория вероятн. применен. **31** (1986), №3, 516–529.
3. В. В. Булдыгин, С. А. Солнцев, *УЗБЧ для сумм независимых случайных векторов с операторными нормировками и сходимость к нулю гауссовских последовательностей*, Теория вероятн. применен. **32** (1987), №2, 266–281.
4. В. В. Булдыгин, С. А. Солнцев, *Функциональные методы в задачах суммирования случайных величин*, "Наукова думка", Киев, 1989.
5. В. В. Булдыгин, С. А. Солнцев, *О сходимости сумм независимых случайных векторов с операторными нормировками*, Теория вероятн. применен. **36** (1991), №2, 346–351.
6. V. V. Buldygin and S. A. Solntsev, *Asymptotic Behavior of Linearly Transformed Sums of Random Variables*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.
7. V. V. Buldygin and M. K. Runovska, *On the convergence of series of autoregressive sequences*, Theory of Stochastic Processes **15(31)** (2009), no. 1, 7–14.
8. V. V. Buldygin and M. K. Runovska, *On the convergence of series of autoregressive sequences in Banach spaces*, Theory of Stochastic Processes **16(32)** (2010), no. 1, 29–38.
9. В. А. Коваль, *Ассимптотическое поведение решений стохастических рекуррентных уравнений в пространстве* $\mathbb{R}^d$, Укр. мат. журн. **43** (1991), №6, 829–833.
10. М. К. Руновська, *Збіжність рядів, складених з елементів гауссівських марковських послідовностей*, Теорія ймовір. та матем. статист. **83** (2010), 125–137.

Кафедра математичного аналізу і теорії ймовірностей, Національний технічний університет України ("КПІ"), прос. Перемоги, 37, Київ 03056, Україна

Адреса електронної пошти: matan@ntu-kpi.kiev.ua

Надійшла 30/11/2010