Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 84, 2011, стор. 155–162

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 84, 2011, pp. 155–162

ЕМПІРИЧНО-БАЙЄСОВА КЛАСИФІКАЦІЯ ДЛЯ СПОСТЕРЕЖЕНЬ З ДОМІШКОЮ

УДК 519.21

О. СУГАКОВА

Анотація. Розглядається задача класифікації об'єкта за спостереженням його числової характеристики, якщо відомо, що він може належати одному з двох різних класів. Розподіл характеристики для об'єктів першого класу невідомий, але симетричний. Розподіл для другого класу відомий. Побудований емпірично-байєсовий класифікатор і доведена теорема про асимптотичну поведінку ймовірності його помилки.

Abstract. We consider the problem of the object's classification in the case, when the object belongs to one of two classes. Characteristic's distribution for the objects from the first class is unknown, but symmetric. The distribution for the second class is known. The empirical bayesian classificator is constructed. Asymptotic behavior of classificator's error is investigated.

Аннотация. Рассматривается задача классификации объекта по наблюдениям за его числовой характеристикой, если известно, что он может принадлежать одному из двух разных классов. Распределение характеристики для объектов первого класса неизвестно, но известно, что оно симметрично. Распределение для второго класса известно. Построен эмпирически-байесовый классификатор и доказана теорема об асимптотическом поведении его ошибки.

1. Постановка задачі

Розглянемо задачу класифікації об'єкта O за спостереженням його числової характеристики $\xi = \xi(O) \in \mathbf{R}$. Він може належати одній із двох популяцій: $\Re_1$ — популяція основної компоненти і $\Re_0$ — популяція домішки. Номер популяції, якій належить O, позначатимемо $\operatorname{ind}(O)$.

Навчаюча вибірка $\xi_1, \dots, \xi_n$, за якою потрібно побудувати класифікатор, являє собою вибірку із суміші двох компонент: це незалежні однаково розподілені випадкові величини (н.о.р.в.в.), які мають щільність розподілу

$$\psi(x) = pf(x-a) + (1-p)f_0(x),$$

де $p \in (0,1)$ — концентрація основної компоненти, $f_0(x)$ — відома щільність розподілу домішки; a — невідома медіана розподілу основної компоненти, щільність якої $f(x-a)$ невідома і є симметричною ($f(-x) = f(x)$). Параметри a і p теж вважаються невідомими. Моделі такого вигляду природно виникають, наприклад, при аналізі даних генетичних досліджень [1, 2].

Наша мета — побудувати оптимальне правило класифікації об'єктів

$$g\colon X \to \{0,1\},$$

де X — множина всіх спостережуваних характеристик; $0, 1$ — номери класів. Для характеризації якості класифікатора обираємо ймовірність його помилки:

$$\begin{aligned} L(g) &= \mathsf{P}\{g(\xi(O)) \neq \operatorname{ind}(O)\} = 1 - \mathsf{P}\{g(\xi(O)) = \operatorname{ind}(O)\} \\ &= 1 - p\,\mathsf{P}\{\xi(O) \in \Re_1/\operatorname{ind}(O) = 1\} - (1-p)\,\mathsf{P}\{\xi(O) \in \Re_0/\operatorname{ind}(O) = 0\}. \end{aligned}$$

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 62G05; Secondary 62G20.

Нехай фіксована деяка множина допустимих класифікаторів G. Класифікатор g_0 називається байєсовим в класі G, якщо $g_0 \in G$ і для $\forall g \in G$: $L(g_0) \le L(g)$. Будемо позначати байєсів класифікатор g^B.

Як відомо [2, с. 149], байєсів класифікатор для класифікації компонентів суміші нашої задачі має вигляд

$$g^B(x) = I\{pf(x-a) > (1-p)f_0(x)\}, \tag{1}$$

де $I\{A\}$ — індикатор множини A.

Ймовірність помилки такого класифікатора

$$L\left(g^B\right) = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \max(pf(x-a), (1-p)f_0(x))\, dx. \tag{2}$$

Але ми не можемо безпосередньо скористатись формулами (1), (2) для побудови класифікатора і оцінки його якості, оскільки в них входять невідомі нам a, p, $f(x)$.

Тому ми побудуємо так званий емпірично-байєсовий класифікатор, підставивши в (1), (2) замість невідомих характеристик їх консистентні оцінки. Розглянемо такі оцінки.

В роботі [3] була запропонована оцінка $\hat{a}_n$ параметра a, побудована за допомогою методу узагальнених оцінюючих рівнянь (GEE): $\hat{a}_n$ — корінь рівняння

$$\hat{h}(\hat{a}_n) = 0, \tag{3}$$

де

$$\hat{h}(\alpha) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\big(g_1(x-\alpha)G_2(\alpha) - g_2(x-\alpha)G_1(\alpha)\big),$$

$g_1(x)$, $g_2(x)$ — деякі фіксовані непарні функції;

$$G_i(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} g_i(x-\alpha)f_0(x)\, dx, \qquad i = 1, 2.$$

Лема 1.1 ([3]). *Нехай $\hat{a}_n$ — GEE-оцінка (3) і виконуються умови:*

(i) *$\hat{a}_n$ — консистентна оцінка;*

(ii) *Функції $g_i'(x)$, $G_i'(x)$, $i = 1, 2$, неперервні на $\mathbf{R}$;*

$$\mathsf{E}\left(g_i(\xi_1 - a)\right)^2 < \infty, \quad i = 1, 2; \qquad \mathsf{E}\,\frac{\partial}{\partial\alpha}\hat{h}(\xi_1, \alpha)\mid_{\alpha=a} \ne 0;$$

для деяких $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$:

$$\mathsf{E}\sup_{\alpha:\ |a-\alpha|<\varepsilon}\left(g_i'(\xi_1 - \alpha)\right)^{1+\delta} < \infty, \qquad i = 1, 2.$$

Тоді

$$\hat{a}_n - a = O_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \qquad n \to \infty. \tag{4}$$

В роботі [4] була побудована оцінка параметру p:

$$\hat{p}_n = \frac{1}{\hat{a}_n - m_0}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\xi_j - m_0\right), \tag{5}$$

де $m_0 = \int_{-\infty}^{\infty} x f_0(x)\, dx$ — середнє домішки.

Лема 1.2 ([4]). *При виконанні умов (i), (ii), якщо $m_0 \ne a$,*

$$\hat{p}_n - p = O_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \qquad n \to \infty. \tag{6}$$

В роботі [4] були побудовані ядерні оцінки щільності основної компоненти:

$$\hat{f}_n(x) = \frac{1}{\hat{p}_n}\left(\frac{1}{nh_n}\sum_{j=1}^{n} K\left(\frac{x+\hat{a}_n-\xi_j}{h_n}\right) - (1-\hat{p}_n)f_0(x+\hat{a}_n)\right), \tag{7}$$

де $K(x)$ — ядро, тобто щільність на $\mathbf{R}$; h_n, $n \geq 1$ — параметр згладжування, такий, що $h_n \to 0$, $nh_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Вперше оцінка щільності, аналогічна (7), була запропонована в роботі [1], але ми використовуємо інші оцінки для a та p.

Додатково в роботі [4]розглядається симетризована оцінка щільності $f(x)$:

$$\tilde{f}_n(x) = \frac{\hat{f}_n(x) + \hat{f}_n(-x)}{2}. \tag{8}$$

2. Побудова класифікатора

Приступимо до побудови емпірично-байєсового класифікатора.

Припустимо, що кількість розв'язків рівняння $pf(x-a) = (1-p)f_0(x)$ скінченна і дорівнює m, позначимо ці точки $t_1, \dots, t_m$. Вважаємо, що всі вони лежать всередині відрізка $[-R, R]$, де R — деяке фіксоване відоме число. Нехай

$$S(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in [-R, R]; \\ R, & \text{якщо } x > R; \\ -R, & \text{якщо } x < -R. \end{cases}$$

Підставляючи в формулу (1) замість евклідових параметрів a, p їх оцінки (3), (5), а замість щільності основної компоненти $f(x-a)$ її оцінку (7), а також контролюючи поведінку щільностей зовні відрізку $[-R, R]$ за допомогою функції $S(x)$, пропонуємо до розгляду зрізаний емпірично-байєсовий класифікатор (ЗЕМБ-класифікатор) вигляду:

$$\hat{g}(x) = I\left\{\hat{p}_n \hat{f}_n(S(x) - \hat{a}_n) > (1-\hat{p}_n)f_0(S(x))\right\}. \tag{9}$$

Відповідно, ймовірність помилки ЗЕМБ-класифікатора при фіксованій навчаючій вибірці $\xi_1, \dots, \xi_n$ матиме вигляд

$$L(\hat{g}) = (1-p)\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(x)f_0(x)\,dx + p\int_{-\infty}^{\infty}(1-\hat{g}(x))f(x-a))\,dx, \tag{10}$$

а ймовірність помилки байєсового класифікатора (2)можна записати у вигляді

$$L(g) = (1-p)\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_0(x)\,dx + p\int_{-\infty}^{\infty}(1-g(x))f(x-a))\,dx. \tag{11}$$

3. Основні результати

Ми хочемо дослідити асимптотичну поведінку різниці $L(\hat{g}) - L(g)$ при $n \to \infty$. Позначатимемо $c, c_1, c_2, \dots, c_k$ деякі дійсні сталі. Зробимо наступні припущення.

(iii) Припущення, що накладаються на ядро: $K(x)$ — фінітна функція,

$$\operatorname{Var}_R K'(x) < c_1, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} zK(z)\,dz = 0.$$

(iv) Припущення щодо щільностей компонент: $f(x)$, $f_0(x)$ двічі неперервно-диференційовні;

$$|f'(x)| < c_2, \qquad |f_0'(x)| < c_3, \qquad m_0 \neq a;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx < \infty, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_0(x)\,dx < \infty.$$

(v) Обмеження на параметр згладжування h_N:

$$h_N = CN^{-1/5},$$

C — деяка стала.

(vi) На $[-R, R]$ існує m коренів $t_1, \ldots, t_m$, $i = 1, \ldots, m$ рівняння

$$pf(t-a) = (1-p)f_0(t), \tag{12}$$

причому

$$pf'(t_i - a) - (1-p)f_0'(t_i) \neq 0, \qquad i = 1, \ldots, m. \tag{13}$$

(vii) $K(x)$ кусково-монотонна зі скінченною кількістю інтервалів монотонності, а також обмежена: $K(x) < c_5$.

(viii) $|f_0''(x)| < c_6$, $|f_0''(x)| < c_7$.

Теорема 3.1. *Нехай виконуються умови (i)–(viii).*
Тоді

$$n^{4/5}\left(L(\hat{g}) - L(g)\right) \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \eta_i^2,$$

де випадкові величини η_i є незалежними гаусовими з параметрами

$$N\left(\frac{D^2}{2}\sqrt{\beta_i}\gamma_i, \frac{d^2\psi(t_i)}{\beta_i}\right),$$

тут

$$\gamma_i = \frac{\psi''(t_i)}{(1-p)f_0'(t_i) - pf'(t_i - a)}, \qquad \beta_i = \left|(1-p)f_0'(t_i) - pf'(t_i - a)\right|,$$

$$D = \int_{-\infty}^{\infty} z^2 K(z)\, dz, \qquad d^2 = \int_{-\infty}^{\infty} K^2(z)\, dz.$$

Побудуємо ЗЕМБ-класифікатор дещо іншого вигляду, підставивши в (9) замість оцінки щільності $\hat{f}(x)$ симетризовану оцінку (8)

$$\tilde{g}(x) = I\left\{\hat{p}_n \tilde{f}_n(S(x) - \hat{a}_n) > (1-\hat{p}_n) f_0(S(x))\right\}. \tag{14}$$

Ймовірність помилки цього класифікатора має вигляд

$$L(\tilde{g}) = (1-p)\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(x) f_0(x)\, dx + p\int_{-\infty}^{\infty} (1 - \tilde{g}(x)) f(x-a)\, dx. \tag{15}$$

Теорема 3.2. *Нехай виконуються умови (i)–(viii).*
Тоді

$$n^{4/5}\left(L(\tilde{g}) - L(g)\right) \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \zeta_i^2,$$

де в.в. ζ_i є незалежними гаусовими з параметрами

$$N\left(\frac{D^2 C^2}{4}\sqrt{\beta_i}\alpha_i, \frac{d^2(\psi(t_i) + \psi(-t_i))}{4C\beta_i}\right),$$

тут

$$\alpha_i = \frac{\psi''(t_i) + \psi''(-t_i)}{(1-p)f_0'(t_i) - pf'(t_i - a)}.$$

4. Доведення теорем

Спершу доведемо декілька допоміжних лем. Позначимо $\hat{m}_n$ кількість коренів рівняння

$$\hat{p}_n \hat{f}_n(t-\hat{a}_n) = (1-\hat{p}_n) f_0(t) \tag{16}$$

на $[-R, R]$, а $\hat{t}_i$, $i = 1, \dots, m$, — корені рівняння (16).

Лема 4.1. *Припустимо, що виконуються умови (iv)–(vi). Тоді*

$$\mathsf{P}\{\hat{m}_n = m\} = 1, \qquad n \to \infty,$$

а також

$$\hat{t}_i - t_i \xrightarrow{\mathsf{P}} 0, \qquad n \to \infty, \ i = 1, \dots, m.$$

Доведення леми 4.1. Позначимо

$$h(t) = pf(t-a) - (1-p) f_0(t), \qquad \hat{h}_n(t) = \hat{p}_n \hat{f}_n(t-\hat{a}_n) - (1-\hat{p}_n) f_0(t).$$

Підставляючи в останню рівність формулу (7), маємо:

$$\hat{h}_n(t) = \hat{\psi}_n(t) - \psi(t) + 2(\hat{p}_n - p) f_0(t) + h(t) = 0, \tag{17}$$

де

$$\hat{\psi}_n(t) = \frac{1}{nh_n} \sum_{j=1}^{n} K\left(\frac{t-\xi_j}{h_n}\right)$$

ядерна оцінка щільності суміші.

В роботі [2, с. 172] доведено, що при виконанні умов (iii), (v), (vii)

$$\sup_t \left| \hat{\psi}_n(t) - \psi(t) \right| \xrightarrow{\mathsf{P}} 0, \qquad n \to \infty.$$

Далі, оскільки $\hat{p}_n - p \xrightarrow{\mathsf{P}} 0$, а $f_0(t)$ обмежена, то другий доданок в (17) теж прямує до 0 рівномірно по t. Отже,

$$\sup_{t \in [-R,R]} \left| \hat{h}_n(t) - h(t) \right| \xrightarrow{\mathsf{P}} 0, \qquad n \to \infty.$$

Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і позначимо множину $A = \{t \colon \forall t_i |t - t_i| \geq \varepsilon\}$. Тоді існує таке $\delta > 0$, що $\inf_{t \in A} |h(t)| > \delta > 0$.

Оскільки $\mathsf{P}\big\{\exists n_0, \forall n > n_0, \forall t : |\hat{h}_n(t) - h(t)| < \frac{\delta}{2}\big\} \to 1$, $n \to \infty$, то

$$\mathsf{P}\left\{\inf_{t \in A} |\hat{h}_n(t)| > \frac{\delta}{2}\right\} \to 1, \qquad n \to \infty.$$

Отже $\forall \varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}\left\{\exists n_0 \colon \forall n > n_0, \forall \hat{t} \colon \hat{h}_n(\hat{t}) = 0 \text{ існує } t_i \colon h(t_i) = 0, |\hat{t} - t_i| < \varepsilon\right\}.$$

Тобто, при великих n з ймовірністю, близькою до 1, всі корені (16) розташовуються як завгодно близько до коренів рівняння $h(t) = 0$. Тепер доведемо, що їх буде однакова кількість. В роботі [4] була доведена наступна лема.

Лема 4.2 ([4]). *При виконанні умов (i)–(v)*

$$\sup_t \left| \hat{\psi}'_n(t) - \psi'(t) \right| = O_p\left(\frac{\ln n}{n^{1/10}}\right), \qquad n \to \infty.$$

Припустимо для визначеності, що $pf'(t_i - a) - (1-p)f_0'(t_i) > b > 0$. Тоді існує окіл Θ_i точки t_i, такий, що для довільного $t \in \Theta_i$: $pf'(t_i - a) - (1-p)f_0'(t_i) > b > 0$ і очевидно, що

$$\begin{aligned}
&\hat{p}_n \hat{f}_n'(t - \hat{a}_n) - (1-\hat{p}_n)f_0'(t) \\
&\quad = \hat{\psi}_n'(t) - \psi'(t) + 2(\hat{p}_n - p)f_0'(t) + pf'(t-a) - (1-p)f_0'(t) \\
&\quad > b + O_p\left(\frac{\ln n}{n^{1/10}}\right) + O_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).
\end{aligned}$$

Звідси випливає, що для $t \in \Theta_i$:

$$\mathsf{P}\left\{\hat{p}_n \hat{f}_n'(t - \hat{a}_n) - (1-\hat{p}_n)f_0'(t) > b\right\} \to 1, \qquad n \to \infty.$$

Отже,

$$\mathsf{P}\{\text{на } \Theta_i \text{ рівняння (16) має 1 корінь}\} \to 1, \qquad n \to \infty.$$

Лема 4.1 доведена. □

Лема 4.3. *Нехай виконуються умови (iv)-(vi), (viii). Тоді*

$$n^{\frac{2}{5}} \begin{pmatrix} \hat{t}_1 - t_1 \\ \vdots \\ \hat{t}_m - t_m \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{D^2}{2}\gamma_1 + \frac{\zeta_1}{\beta_1} \\ \vdots \\ \frac{D^2}{2}\gamma_m + \frac{\zeta_m}{\beta_m} \end{pmatrix}, \qquad n \to \infty.$$

При цьому випадковий вектор $(\zeta_1, \ldots, \zeta_m)^T$ *розподілений нормально* $N(0, B)$, *де*

$$B = d^2 \mathrm{diag}\left(\psi(t_1), \ldots, \psi(t_m)\right).$$

Доведення леми 4.3. Розкладемо ліву частину формули (16) за допомогою формули Тейлора в точці t_i, врахувавши тільки перший член розкладу:

$$\hat{p}_n \hat{f}_n(t_i - \hat{a}_n) - (1-\hat{p}_n)f_0(t_i) + \left(\hat{p}_n \hat{f}_n'(t - \hat{a}_n) - (1-\hat{p}_n)f_0'(t)\right)\left(\hat{t}_i - t_i\right) \approx 0.$$

Отже,

$$\hat{t}_i - t_i \approx -\frac{\hat{p}_n \hat{f}_n(t_i - \hat{a}_n) - (1-\hat{p}_n)f_0(t_i)}{\hat{p}_n \hat{f}_n'(t - \hat{a}_n) - (1-\hat{p}_n)f_0'(t)},$$

або, враховуючи рівність $pf(t_i - a) - (1-p)f_0(t_i) = 0$, можемо записати

$$\hat{t}_i - t_i \approx \frac{A_{ni} + B_{ni}}{C_{ni}}, \tag{18}$$

де

$$A_{ni} = \hat{p}_n \hat{f}_n(t_i - \hat{a}_n) - pf(t_i - a), \qquad B_{ni} = (\hat{p}_n - p)f_0(t_i),$$
$$C_{ni} = \hat{p}_n \hat{f}_n'(t - \hat{a}_n) - (1-\hat{p}_n)f_0'(t).$$

Як ми це вже встановили,

$$B_{ni} = O_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \qquad n \to \infty. \tag{19}$$

Розглянемо C_{ni}. За лемою 4.2 і (19)

$$\begin{aligned}
C_{ni} &= \hat{\psi}_n'(t_i) - \psi'(t_i) + pf'(t_i - a) - (1-p)f_0'(t_i) + (\hat{p}_n - p)f_0'(t_i) \\
&= pf'(t_i - a) - (1-p)f_0'(t_i) + O_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + O_p\left(\frac{\ln n}{n^{1/10}}\right) \\
&\xrightarrow{\mathsf{P}} pf'(t_i - a) - (1-p)f_0'(t_i).
\end{aligned} \tag{20}$$

Тепер розглянемо

$$A_{ni} = \frac{1}{nh_n} \sum_{j=1}^{n} K\left(\frac{t_i - \xi_j}{h_n}\right) - pf(t_i - a) - (1-p) f_0(t_i).$$

Як відомо [5, с. 59], при виконанні (iii), (iv), (v),

$$\begin{aligned} A_{ni} &= n^{-2/5}\left(\frac{D^2}{2}\psi''(t_i) + \zeta_n(t_i)\right), \\ \zeta_n(t_i) &= \frac{1}{\sqrt{nh_n}} \sum_{j=1}^{n} \left[K\left(\frac{t_i - \xi_j}{h_n}\right) - \mathsf{E}\, K\left(\frac{t_i - \xi_j}{h_n}\right)\right], \end{aligned} \tag{21}$$

Об'єднуючи (18)-(21), бачимо, що

$$n^{\frac{2}{5}} \begin{pmatrix} \hat{t}_1 - t_1 \\ \vdots \\ \hat{t}_m - t_m \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \frac{D^2}{2}\gamma_1 + O_p\left(n^{-1/10}\right) \\ \vdots \\ \frac{D^2}{2}\gamma_m + O_p\left(n^{-1/10}\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\zeta_1}{\beta_1 + O_p\left(\frac{\ln n}{n^{1/10}}\right)} \\ \vdots \\ \frac{\zeta_m}{\beta_m + O_p\left(\frac{\ln n}{n^{1/10}}\right)} \end{pmatrix}.$$

Застосовуючи центральну граничну теорему в схемі серій до $(\zeta_n(t_i))_{i=1}^m$ аналогічно тому, як це було зроблено в роботі [5, с. 59] і як це було проведено в [4], нескладно завершити доведення леми 4.3. □

Доведення теореми 3.1. Для визначеності припустимо, що на $(-\infty, t_1)$ виконується: $pf(x-a) > (1-p)f_0(x)$. За лемою 4.1 при достатньо великих n з ймовірністю, близької до 1, $\hat{m}_n = m$. Також бачимо, що оскільки при $x > R$ для достатньо великих n

$$\begin{aligned} I\left\{\hat{p}_n \hat{f}_n(S(x) - \hat{a}_n) > (1-\hat{p}_n) f_0(S(x))\right\} &= I\left\{\hat{p}_n \hat{f}_n(R - \hat{a}_n) > (1-\hat{p}_n) f_0(R)\right\} \\ &= I\left\{pf(R-a) > (1-p)f_0(R)\right\} \end{aligned}$$

і аналогічна рівність виконується при $x < -R$, то інтеграли (10), (11) в області $|x| > R$ співпадають.

Враховуючи умову (vi), можемо записати

$$L(\hat{g}) - L(g) = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+1} \int_{t_i}^{\hat{t}_i} \left(pf(x-a) - (1-p)f_0(x)\right)\, dx.$$

Розкладемо інтеграл за формулою Тейлора в точці t_i.

$$\begin{aligned} \int_{t_i}^{\hat{t}_i} \left(pf(x-a) - (1-p)f_0(x)\right)\, dx &= \left(pf(t_i - a) - (1-p)f_0(t_i)\right)(\hat{t}_i - t_i) \\ &+ \frac{(\hat{t}_i - t_i)^2}{2}\left(pf'(t_i - a) - (1-p)f_0'(t_i)\right) \\ &+ o\left((\hat{t}_i - t_i)^2\right). \end{aligned} \tag{22}$$

Перший доданок правої частини (22) дорівнює 0, а за лемою 4.3 в.в. $n^{2/5}(\hat{t}_i - t_i)$ асимптотично нормальні

$$N\left(\frac{D^2}{2}\gamma_i,\ \frac{d^2\psi(t_i)}{\beta_i^2}\right)$$

і некорельовані. Аналізуючи вираз

$$(-1)^{i+1}\big(pf'(t_i - a) - (1-p)f_0'(t_i)\big)$$

бачимо, що він завжди невід'ємний, отже, його можна замінити на

$$|pf'(t_i - a) - (1-p)f_0'(t_i)|.$$

Звідси випливає твердження теореми 3.1. □

Теорема 3.2 доводиться цілком аналогічно.

Література

1. L. Bordes, P. Delmas, and P. Vandekerkhove, *Semiparametric estimation of a two-component mixture model where one component is known*, Scand. J. Statist. **33** (2006), 733–752.
2. Р. Майборода, О. Сугакова, *Оцінювання та класифікація за спостереженнями із суміші*, ВПЦ "Київський ун-т", Київ, 2008.
3. О. В. Сугакова, *Оцінка центрального положення за спостереженнями з домішкою*, Теорія імовір. та матем. статист. **80** (2009), 128–137.
4. O. Sugakova, *Density estimation by observation with admixture*, Theory of Stochastic Processes (2010). (to appear)
5. А. А. Боровков, *Математическая статистика*, "Наука", Москва, 1984.
6. J. Shao, *Mathematical Statistics*, Springer-Verlag, New York, 1998.

Кафедра математики та теоретичної радіофізики, радіофізичний факультет, Національний університет ім. Тараса Шевченка, проспект Глушкова, 2, корп. 5, Київ 03127, Україна

Адреса електронної пошти: sugak@univ.kiev.ua

Надійшла 21/06/2010