Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 84, 2011, стор. 163–176

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 84, 2011, pp. 163–176

УСТОЙЧИВОСТЬ ТАНДЕМА СИСТЕМ ОБСЛУЖИВАНИЯ С БЕРНУЛЛИЕВСКИМ НЕМГНОВЕННЫМ ПЕРЕМЕЩЕНИЕМ ТРЕБОВАНИЙ

УДК 519.21

А. В. ЗОРИН

Аннотация. Рассматривается тандем из двух систем массового обслуживания с циклическим алгоритмом управления независимыми конфликтными входными потоками. Обслуженные требования из первой системы перемещаются со случайными скоростями во вторую систему. С применением кибернетического подхода строится математическая модель в виде многомерной счётной марковской цепи. Выполнена классификация состояний этой цепи и найдено достаточное условие существования стационарного распределения.

Анотація. Розглядається тандем з двох систем масового обслуговування з циклічним алгоритмом управління незалежними конфліктними вхідними потоками. Вимоги з першої системи, що були обслужені, переміщуються з випадковими швидкостями до другої системи. Із застосуванням кібернетичного підходу будується математична модель у вигляді багатовимірного лічильного марковського ланцюга. Виконано класифікацію станів цього ланцюга і знайдена достатня умова існування стаціонарного розподілу.

Abstract. A tandem of two queueing systems with cyclic algorithm for control of independent conflict input flows is considered. Customers served in the first queueing system make transition to the second system with random speed. A cybernetic approach was used to construct a mathematical model as a multidimensional denumerable Markov chain. Classification of the states of this Markov chain is carried out and a sufficient condition of the stationary distribution existence is obtained.

1. Постановка задачи

Рассмотрим две системы массового обслуживания при следующих предположениях. Четыре независимых входных конфликтных потока поступают извне, по два потока в каждую из систем. Каждый из этих потоков является неординарным пуассоновским. Конфликтность означает здесь запрет одновременного обслуживания требований различных потоков в одной системе обслуживания, так что нельзя сложением потоков свести задачу к другой задаче с меньшим числом входных потоков. Требования каждого потока помещаются в отдельный буфер с бесконечным числом мест ожидания. Время обслуживания произвольного требования случайно, а длительности обслуживания разных требований суть зависимые случайные величины с неизвестными законами распределения. В каждой системе за один акт обслуживания могут быть обслужены несколько требований. Обслуживание конфликтных потоков в каждой из двух систем обслуживания осуществляется в классе циклических алгоритмов. Предполагается, что длительности актов обслуживания суть соизмеримые постоянные величины. В момент времени 0 акты обслуживания начинаются в обеих системах. Требования из первой очереди первой системы после

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60K25, 90B22.

Ключевые слова и фразы. Управляемая система обслуживания, кибернетический подход, нелокальное описание потока требований, марковская цепь, стационарное распределение.

Работа выполнена в рамках госбюджетной НИР ННГУ им. Н. И. Лобачевского — национальном исследовательском университете по теме № 0120.0602598 “Анализ дискретных управляющих систем обслуживания и систем вычисления булевых функций”.

обслуживания направляются во вторую систему. Предполагается, что необходимо время для перемещения из первой системы во вторую. Скорость перемещения произвольного требования случайна с неизвестным распределением вероятностей. Кроме того, скорости перемещения различных требований изменяются с течением времени и имеют различные распределения вероятностей. Вследствие этого примем, что каждое перемещающееся из первой системы во вторую требование за время одного акта обслуживания с известной вероятностью успевает достичь второй системы обслуживания, а с противоположной вероятностью не успевает и продолжит перемещение в следующем промежутке времени. Поступившие требования из первой системы помещаются в очередь вместе с требованиями из первого внешнего входного потока второй системы. Таким образом, результирующий входной поток, поступающий во вторую систему обслуживания, имеет сложную вероятностную структуру. Наконец, каждое требование из второй очереди из первой системы обслуживания и все требования из второй системы покидают тандем после обслуживания.

Возможной физической интерпретацией тандема из систем обслуживания с циклическим управлением в каждой системе является цепочка перекрёстков (рис. 1) с входными транспортными потоками $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_5$. Здесь потоки Π_1 и Π_4 являются конфликтными, а суперпозиция потоков Π_2 и Π_3 конфликтна с потоком Π_5. Поток Π_3 является выходным потоком с первого перекрёстка.

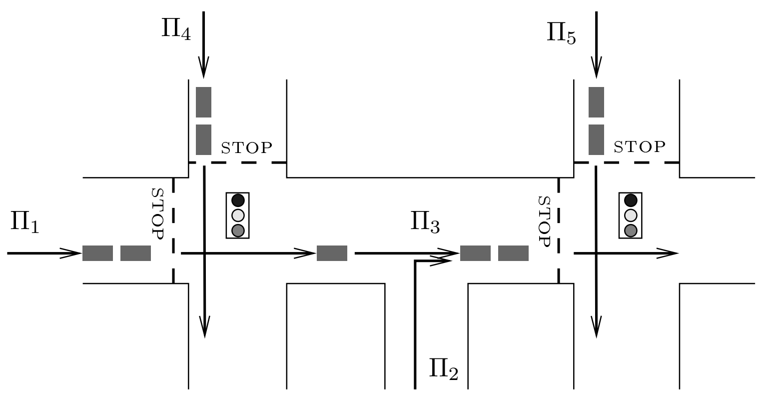

Рис. 1. Тандем из перекрёстков

Заметим, что выходной поток Π_3 формируется в первой системе обслуживания, которая переключается с обслуживания потока Π_1 на блокировку этого потока, а затем снова с блокировки на обслуживание Π_1. Кроме того, реальные моменты выхода требований зависят от длительностей обслуживания этих требований, которые зависимы и имеют неизвестные различные законы распределения. Следовательно, классическое описание выходного потока с помощью некоторого считающего процесса вида $\{\eta(t); t \geqslant 0\}$ с непрерывным временем (либо любое эквивалентное описание) получить практически не удаётся. Вместо этого мы используем нелокальное описание потоков требований (событий, и т.д.) и кибернетический подход к построению и анализу математических моделей управляемых систем массового обслуживания [1, 2, 3, 4]. Нелокальное описание потока требований Π есть маркированный точечный процесс $\{(\tau_i', \eta_i', \nu_i'); i = 1, 2, \ldots\}$, где τ_i' — момент наблюдения, $\tau_0' = 0$, η_i — число требований, поступивших за полуинтервал $(\tau_{i-1}, \tau_i]$ и ν_i' — метка поступивших за этот полуинтервал требований. Кибернетический подход базируется на трёх принципах: 1) принципе дискретности функционирования управляемой системы обслуживания в моменты времени τ_i, $i = 0, 1, \ldots$; 2) принципе нелокальности при описании поблочного строения управляемой системы обслуживания; 3) принципе совместного рассмотрения поблочного строения управляемой системы обслуживания и её функционирования во времени. Любая управляемая система обслуживания имеет *схему*, *информацию*, *координаты* и *функцию*. На схеме присутствуют следующие семь блоков: 1) внешняя среда, 2) входные полюса, 3) внешняя память, 4) устройство по переработке информации во внешней памяти, 5) внутренняя память, 6) устройство по переработке информации во внутренней памяти, 7) выходные полюса. Информация — это набор всех возможных состояний блоков. Координата определяет состояние соответствующего блока. Функция описывает то действие, которое управляемая система обслуживания выполняет при переходе от одного дискретного момента времени к следующему.

В оставшейся части работы мы будем рассматривать только входные потоки Π_1, Π_2, Π_3. Аналогичным образом возможно изучить обслуживание всех пяти входных потоков $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_5$. Обозначим O_1 накопитель для требований потока Π_1, O_2 — накопитель для требований потока Π_2, O_3 — накопитель для требований, перемещающихся их первой системы обслуживания во вторую. Нам потребуются следующие параметры, чтобы задать процессы поступления требований и обслуживания. Пусть λ_j обозначает интенсивность поступления групп по потоку Π_j, $j = 1, 2$. Далее, $p_x^{(j)}$ есть вероятность того, что поступившая по потоку Π_j группа содержит x требований, $x = 1, 2, \ldots$. Будем считать, что ряды

$$\sum_{x=1}^{\infty} z^x p_x^{(j)}, \qquad j = 1, 2,$$

сходятся по крайней мере в круге $|z| < 1 + \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Длительность акта обслуживания для требований из очереди O_1 равна T_1', T_2' — длительность акта обслуживания для потока Π_4, T_3' — длительность акта обслуживания для потоков Π_2 и Π_3, T_4' — длительность акта обслуживания для потока Π_5. Чтобы выбрать дискретную временну́ю шкалу, рассмотрим моменты $\tau_1, \tau_2, \ldots$, в которые хотя бы одно обслуживающее устройство меняет своё состояние; положим также $\tau_0 = 0$. С этого момента будем смотреть на два обслуживающие устройства как на новое обслуживающее устройство с $n < \infty$ состояниями $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \ldots, \Gamma^{(n)}$ и длительностями $T_1, T_2, \ldots, T_n$ пребывания в каждом состоянии соответственно. Значения величины n и длительностей пребывания в каждом состоянии выбираются согласно с величинами T_1', T_2', T_3', T_4' и начальными состояниями обслуживающих устройств обеих сообщающихся систем обслуживания. В состоянии $\Gamma^{(r)}$ либо не обслуживается ни одно требование из очередей O_1, O_2 (состояние типа I), либо обслуживаются только требования из очереди O_1 (состояние типа II), либо обслуживаются только требования из очереди O_2 (состояние типа III), либо обслуживаются требования из обеих очередей O_1 и O_2 (состояние типа IV). Например, пусть $T_1' = 5$, $T_2' = 4$, $T_3' = 3$, $T_4' = 3$ и в момент τ_0 начинается обслуживание требований из потоков Π_1 и Π_5. Тогда $n = 8$, $\tau_1 = 3$, $\tau_2 = 5$, $\tau_3 = 6$, $\tau_4 = 9$, $\tau_5 = 12$, $\tau_6 = 14$, $\tau_7 = 15$, $\tau_8 = 18$, $\tau_9 = 21, \ldots$; $T_1 = 3$, $T_2 = 2$, $T_3 = 1$, $T_4 = 3$, $T_5 = 3$, $T_6 = 2$, $T_7 = 1$, $T_8 = 3$; $\Gamma^{(4)}$ и $\Gamma^{(7)}$ являются состояниями типа I, $\Gamma^{(1)}$ и $\Gamma^{(6)}$ — состояния типа II, $\Gamma^{(3)}$ и $\Gamma^{(8)}$ — состояния типа III, $\Gamma^{(2)}$ и $\Gamma^{(5)}$ — состояния типа IV. Наконец, мы предполагаем, что каждое требование из очереди O_3 достигает очередь O_2 с вероятностью p_r независимо от остальных требований в очереди O_3, если обслуживающее устройство находится в состоянии $\Gamma^{(r)}$ в течение времени T_r.

Поскольку, по предположению, длительности обслуживания разных требований зависимы и имеют разный закон распределения, процесс обслуживания удобно задавать с помощью потоков насыщения $\Pi_1^{\text{нас}}$ и $\Pi_2^{\text{нас}}$ вместо распределения длительности обслуживания произвольного требования [1]. Поток насыщения — это виртуальный выходной поток системы при наивысшей загруженности очередей и наибольшем использовании ресурсов обслуживающего устройства. Поток насыщения $\Pi_1^{\text{нас}}$ содержит 0 требований при состоянии $\Gamma^{(r)}$ типов I и III обслуживающего устройства и содержит неслучайное число $\ell_{r,1} > 0$ требований при состоянии $\Gamma^{(r)}$ типов II и IV. Поток насыщения $\Pi_2^{\text{нас}}$ содержит 0 требований при состоянии $\Gamma^{(r)}$ типов I и II и содержит неслучайное число $\ell_{r,2} > 0$ требований при состоянии $\Gamma^{(r)}$ типов III и IV.

Схема управляемой системы обслуживания изображена на рис. 2. Схема содержит следующие блоки: 1) внешнюю среду, 2) входные потоки Π_1, Π_2, Π_3 — входные полюса первого типа, и потоки насыщения $\Pi_1^{\text{нас}}$, $\Pi_2^{\text{нас}}$ — входные полюса второго типа, 3) накопители O_1, O_2, O_3 — внешнюю память, 4) устройства β_1, β_2, β_3 поддержания дисциплины очередей — устройство переработки информации во внешней памяти, 5) обслуживающее устройство — внутреннюю память, 6) граф смены состояний обслуживающего устройства — устройство по переработке информации во внутренней памяти, 7) выходные потоки $\Pi_1^{\text{вых}}$, $\Pi_2^{\text{вых}}$ — выходные полюса. Множество всех состояний случайной среды, входных потоков, накопителей, обслуживающего устройства, потоков насыщения и выходных потоков задаёт информацию управляемой системы обслуживания. Номера состояний внешней среды, входных потоков, накопителей, устройств организации дисциплины очередей, обслуживающего устройства, потоков насыщения и выходных потоков являются координатами. Функция данной системы заключается в обслуживании требований в классе циклических алгоритмов с фиксированным ритмом.

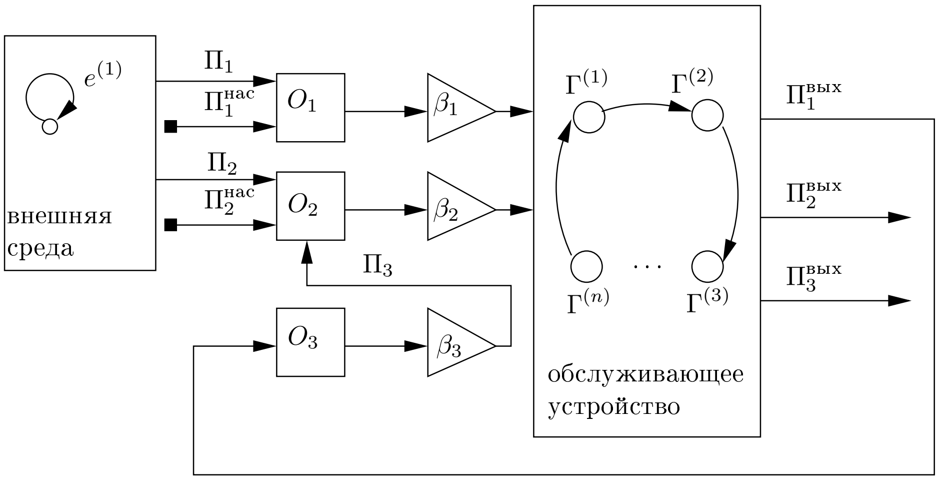

Рис. 2. Схема тандема двух систем обслуживания в классе циклических алгоритмов с фиксированным ритмом как управляемой системы обслуживания

2. Построение математической модели

Все случайные величины и случайные элементы считаются заданными на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$. Последовательность $\tau_0 = 0, \tau_1, \dots, \tau_i, \dots$ моментов наблюдений была определена ранее. Обозначим Γ_i состояние обслуживающего устройства в момент τ_i, $\kappa_{s,i}$ — число требований в очереди O_s, $s = 1, 2, 3$, в момент τ_i, $\eta_{s,i}$ — количество требований по потоку Π_s, поступивших за промежуток времени $(\tau_i, \tau_{i+1}]$, $\bar{\xi}_{1,i}$ — реальное число обслуженных требований по потоку $\Pi_1^{\text{вых}}$ за промежуток времени $(\tau_i, \tau_{i+1}]$, $\xi_{j,i}$ — количество требований по потоку $\Pi_j^{\text{нас}}$ за промежуток времени $(\tau_i, \tau_{i+1}]$. Для r, $1 \leqslant r < n$, определим $r \oplus 1 = r+1$ и $n \oplus 1 = 1$. Обозначим $\Gamma = \{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \ldots, \Gamma^{(n)}\}$ и введём отображение $u(\cdot)\colon \Gamma \to \Gamma$ с помощью равенства $u(\Gamma^{(r)}) = \Gamma^{(r\oplus 1)}$. Учитывая особенности функционирования рассматриваемой управляемой системы обслуживания получаем следующие рекуррентные по $i = 0,\, 1,\, \ldots$ уравнения:

$$\Gamma_{i+1} = u(\Gamma_i), \qquad \kappa_{1,i+1} = \max\{0, \kappa_{1,i} + \eta_{1,i} - \xi_{1,i}\},$$
$$\kappa_{2,i+1} = \max\{0, \kappa_{2,i} + \eta_{2,i} + \eta_{3,i} - \xi_{2,i}\}, \qquad \kappa_{3,i+1} = \kappa_{3,i} + \bar{\xi}_{1,i} - \eta_{3,i},$$
$$\bar{\xi}_{1,i+1} = \min\{\xi_{1,i}, \kappa_{1,i} + \eta_{1,i}\}.$$

Мы задаём нелокальное описание входных потоков и потоков насыщения с помощью некоторых свойств условных распределений дискретной компоненты $\{(\eta_{1,i}, \eta_{2,i}); i = 0,1,\ldots\}$ маркированного точечного процесса $\{(\tau_i, \eta_{1,i}, \eta_{2,i}, \nu_i); i = 0,1,\ldots\}$, дискретной компоненты $\{(\xi_{1,i}, \xi_{2,i}); i = 0,1,\ldots\}$ маркированного точечного процесса $\{(\tau_i, \xi_{1,i}, \xi_{2,i}, \nu_i); i = 0,1,\ldots\}$ и дискретной компоненты $\{\eta_{3,i}; i = 0,1,\ldots\}$ маркированного точечного процесса $\{(\tau_i, \eta_{3,i}, \bar{\nu}_i); i = 0,1,\ldots\}$. Здесь $\nu_i = \Gamma_i$ и $\bar{\nu}_i = (\Gamma_i, \kappa_{3,i})$ — метки поступивших за промежуток $(\tau_i, \tau_{i+1}]$ требований соответствующих потоков.

Для $x \geqslant 0$, $0 \leqslant k \leqslant x$, $0 < \alpha < 1$ обозначим $\psi(k; x, \alpha) = C_x^k \alpha^k (1-\alpha)^{x-k}$, $\Gamma = \Gamma^{\mathrm{I}} \cup \Gamma^{\mathrm{II}} \cup \Gamma^{\mathrm{III}} \cup \Gamma^{\mathrm{IV}}$, где Γ^{I} — множество всех состояний типа I, Γ^{II} — множество всех состояний типа II, Γ^{III} — множество всех состояний типа III, Γ^{IV} — множество всех состояний типа IV, и определим величины $\varphi_j(x, T)$, $T > 0$, $x = 0,\, 1,\, \ldots,\, j = 1,\, 2$, посредством разложений

$$\sum_{x=0}^{\infty} z^x \varphi_j(x, T) = \exp\left\{\lambda_j T \left(\sum_{x=1}^{\infty} z^x p_x^{(j)} - 1\right)\right\}, \quad |z| < 1.$$

Тогда

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \eta_{j,i} = b\} | \{\omega\colon \Gamma_i = \Gamma^{(r)}\}) = \varphi_j(b; T_{r\oplus 1}) \qquad \text{при } b = 0,\, 1,\, \ldots,$$
$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_{1,i} = 0\} | \{\omega\colon \Gamma_i = \Gamma^{(r)}\}) = 1 \qquad \text{при } \Gamma^{(r\oplus 1)} \in \Gamma^{\mathrm{I}} \cup \Gamma^{\mathrm{III}},$$
$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_{1,i} = \ell_{r\oplus 1,1}\} | \{\omega\colon \Gamma_i = \Gamma^{(r)}\}) = 1 \qquad \text{при } \Gamma^{(r\oplus 1)} \in \Gamma^{\mathrm{II}} \cup \Gamma^{\mathrm{IV}},$$
$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_{2,i} = 0\} | \{\omega\colon \Gamma_i = \Gamma^{(r)}\}) = 1 \qquad \text{при } \Gamma^{(r\oplus 1)} \in \Gamma^{\mathrm{I}} \cup \Gamma^{\mathrm{II}},$$
$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_{2,i} = \ell_{r\oplus 1,2}\} | \{\omega\colon \Gamma_i = \Gamma^{(r)}\}) = 1 \qquad \text{при } \Gamma^{(r\oplus 1)} \in \Gamma^{\mathrm{III}} \cup \Gamma^{\mathrm{IV}},$$
$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \eta_{3,i} = b\} | \{\omega\colon \Gamma_i = \Gamma^{(r)}, \kappa_{3,i} = x\}) = \psi(b; x, p_{r\oplus 1}) \qquad \text{при } 0 \leqslant b \leqslant x.$$

Для целых неотрицательных чисел i, x_1, x_2, x_3, b_1, b_2, b_3, y_1, y_2 и $r = 1,\, 2,\, \ldots,\, n$ введём события $A_i(r, x_1, x_2, x_3) = \{\omega\colon \Gamma_i = \Gamma^{(r)}, \kappa_{1,i} = x_1, \kappa_{2,i} = x_2, \kappa_{3,i} = x_3\}$, $B_i(b_1, b_2, b_3, y_1, y_2) = \{\omega\colon \eta_{1,i} = b_1, \eta_{2,i} = b_2, \eta_{3,i} = b_3, \xi_{1,i} = y_1, \xi_{2,i} = y_2,\}$. Наконец, для любых неотрицательных целых i, b_1, b_2, b_3, y_1, y_2, $x_{1,0}$, $x_{2,0}$, $x_{3,0}$, $x_{1,1}$, $x_{2,1}$, $x_{3,1}$, $\ldots$, $x_{1,i}$, $x_{2,i}$, $x_{3,i}$, и произвольных $\Gamma^{(r_0)} \in \Gamma$, $\Gamma^{(r_1)} \in \Gamma$, $\ldots$, $\Gamma^{(r_i)} \in \Gamma$,

$$\mathbf{P}\left(B_i(b_1, b_2, b_3, y_1, y_2) \middle| \bigcap_{\bar{\iota}=0}^{i} A_{\bar{\iota}}(r_{\bar{\iota}}, x_{1,\bar{\iota}}, x_{2,\bar{\iota}}, x_{3,\bar{\iota}})\right) =$$
$$= \mathbf{P}(\{\omega\colon \eta_{1,i} = b_1\} | \{\omega\colon \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}\}) \mathbf{P}(\{\omega\colon \eta_{2,i} = b_2\} | \{\omega\colon \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}\}) \times$$
$$\times \mathbf{P}(\{\omega\colon \eta_{3,i} = b_3\} | \{\omega\colon \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}, \kappa_{3,i} = x_i\}) \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_{1,i} = y_1\} | \{\omega\colon \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}\}) \times$$
$$\times \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_{2,i} = y_2\} | \{\omega\colon \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}\}). \tag{1}$$

Теорема 1. *При заданном распределении случайного вектора* $(\Gamma_0, \kappa_{1,0}, \kappa_{2,0}, \kappa_{3,0})$ *последовательность*

$$\{(\Gamma_i, \kappa_{1,i}, \kappa_{2,i}, \kappa_{3,i}); i = 0,1,\ldots\} \tag{2}$$

является марковской цепью.

Доказательство. Для любых $\Gamma^{(r_0)} \in \Gamma$, $\Gamma^{(r_1)} \in \Gamma$, ..., $\Gamma^{(r_i)} \in \Gamma$, неотрицательных чисел $x_{1,0}$, $x_{2,0}$, $x_{3,0}$, $x_{1,1}$, $x_{2,1}$, $x_{3,1}$, ..., $x_{1,i+1}$, $x_{2,i+1}$, $x_{3,i+1}$, по формуле полной вероятности и из предположения (1) имеем:

$$\mathbf{P}\left(A_{i+1}(r_i\oplus 1, x_{1,i+1}, x_{2,i+1}, x_{3,i+1})\middle| \bigcap_{\bar\iota=0}^{i} A_{\bar\iota}(r_{\bar\iota}, x_{1,\bar\iota}, x_{2,\bar\iota}, x_{3,\bar\iota})\right) =$$
$$= \sum_{b_1=0}^{\infty}\sum_{b_2=0}^{\infty}\sum_{b_3=0}^{\infty}\sum_{y_1=0}^{\infty}\sum_{y_2=0}^{\infty} \mathbf{P}\left(B_i(b_1,b_2,b_3,y_1,y_2)\middle| \bigcap_{\bar\iota=0}^{i} A_{\bar\iota}(r_{\bar\iota}, x_{1,\bar\iota}, x_{2,\bar\iota}, x_{3,\bar\iota})\right)\times$$
$$\times\,\mathbf{P}\left(A_{i+1}(r_i\oplus 1, x_{1,i+1}, x_{2,i+1}, x_{3,i+1})\middle| \bigcap_{\bar\iota=0}^{i} A_{\bar\iota}(r_{\bar\iota}, x_{1,\bar\iota}, x_{2,\bar\iota}, x_{3,\bar\iota})\cap B_i(b_1,b_2,b_3,y_1,y_2)\right) =$$
$$= \sum_{b_1=0}^{\infty}\sum_{b_2=0}^{\infty}\sum_{b_3=0}^{\infty}\sum_{y_1=0}^{\infty}\sum_{y_2=0}^{\infty} \mathbf{P}(\{\omega\colon \eta_{1,i}=b_1\}|\{\omega\colon \Gamma_i=\Gamma^{(r_i)}\})\times$$
$$\times\mathbf{P}(\{\omega\colon \eta_{2,i}=b_2\}|\{\omega\colon \Gamma_i=\Gamma^{(r_i)}\})\mathbf{P}(\{\omega\colon \eta_{3,i}=b_3\}|\{\omega\colon \Gamma_i=\Gamma^{(r_i)}, \kappa_{3,i}=x_i\})\times$$
$$\times\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_{1,i}=y_1\}|\{\omega\colon \Gamma_i=\Gamma^{(r_i)}\})\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_{2,i}=y_2\}|\{\omega\colon \Gamma_i=\Gamma^{(r_i)}\})\times$$
$$\times\mathbf{P}(\{\omega\colon x_{1,i+1}=\max\{0, x_{1,i}+b_1-y_1\}, x_{2,i+1}=\max\{0, x_{2,i}+b_2+b_3-y_2\},$$
$$x_{3,i+1}=x_{3,i}+\min\{y_1, x_{1,i}+b_1\}-b_3\}).$$

Аналогичные вычисления дают

$$\mathbf{P}(A_{i+1}(r_i\oplus 1, x_{1,i+1}, x_{2,i+1}, x_{3,i+1})|A_i(r_i, x_{1,i}, x_{2,i}, x_{3,i})) =$$
$$= \sum_{b_1=0}^{\infty}\sum_{b_2=0}^{\infty}\sum_{b_3=0}^{\infty}\sum_{y_1=0}^{\infty}\sum_{y_2=0}^{\infty} \mathbf{P}(\{\omega\colon \eta_{1,i}=b_1\}|\{\omega\colon \Gamma_i=\Gamma^{(r_i)}\})\times$$
$$\times\mathbf{P}(\{\omega\colon \eta_{2,i}=b_2\}|\{\omega\colon \Gamma_i=\Gamma^{(r_i)}\})\mathbf{P}(\{\omega\colon \eta_{3,i}=b_3\}|\{\omega\colon \Gamma_i=\Gamma^{(r_i)}, \kappa_{3,i}=x_i\})\times$$
$$\times\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_{1,i}=y_1\}|\{\omega\colon \Gamma_i=\Gamma^{(r_i)}\})\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_{2,i}=y_2\}|\{\omega\colon \Gamma_i=\Gamma^{(r_i)}\})\times$$
$$\times\mathbf{P}(\{\omega\colon x_{1,i+1}=\max\{0, x_{1,i}+b_1-y_1\}, x_{2,i+1}=\max\{0, x_{2,i}+b_2+b_3-y_2\},$$
$$x_{3,i+1}=x_{3,i}+\min\{y_1, x_{1,i}+b_1\}-b_3\}). \tag{3}$$

Поскольку правые части двух последних равенств совпадают, рассматриваемые условные вероятности также равны. $\square$

Положим $Q_i(r; x_1, x_2, x_3) = \mathbf{P}(A_i(r, x_1, x_2, x_3))$. Символы w_1, w_2, w_3, x_1, x_2, x_3, b_1, b_2 и c будут обозначать неотрицательные целые числа. Из равенства (3),

$$Q_{i+1}(r\oplus 1; w_1, w_2, w_3) = \sum Q_i(r; x_1, x_2, x_3)\varphi_1(b_1; T_{r\oplus 1})\varphi_2(b_2; T_{r\oplus 1})\psi(c; x_3, p_{r\oplus 1}),$$

где суммирование распространяется на неотрицательные целые x_1, x_2, x_3, b_1, b_2, c, удовлетворяющие уравнениям

$$w_1 = \max\{0, x_1+b_1-y_1\},\ w_2=\max\{0, x_2+b_2+c-y_2\},$$
$$w_3 = x_3+\min\{y_1, x_1+b_1\}-c, \tag{4}$$

и неравенству $c \leqslant x_3$, а y_j принимает значение 0, если в состоянии $\Gamma^{(r\oplus 1)}$ требования из очереди O_j не обслуживаются, и значение $\ell_{r\oplus 1,j}$ в противном случае. Теперь допустим $\Gamma^{(r\oplus 1)} \in \Gamma^{\mathrm{I}}$. Тогда $y_1 = y_2 = 0$. Для $w_1 \geqslant 0$, $w_2 \geqslant 0$, $w_3 \geqslant 0$ система уравнений (4) принимает вид $w_1 = x_1 + b_1$, $w_2 = x_2 + b_2 + c$, $w_3 = x_3 - c$. Решение есть $b_1 = w_1 - x_1$, $b_2 = w_2 - c - x_2$, $x_3 = w_3 + c$ с $0 \leqslant x_1 \leqslant w_1$, $0 \leqslant c \leqslant w_2$,

$0 \leqslant x_2 \leqslant w_2 - c$. Следовательно,

$$Q_{i+1}(r \oplus 1; w_1, w_2, w_3) = \sum_{x_1=0}^{w_1} \sum_{c=0}^{w_2} \sum_{x_2=0}^{w_2-c} Q_i(r; x_1, x_2, w_3 + c) \times$$
$$\times \varphi_1(w_1 - x_1; T_{r\oplus 1}) \varphi_2(w_2 - c - x_2; T_{r\oplus 1}) \psi(c; w_3 + c, p_{r\oplus 1}). \tag{5}$$

Аналогичные вычисления при $\Gamma^{(r\oplus 1)} \in \Gamma^{\mathrm{II}}$ дают

$$Q_{i+1}(r \oplus 1; 0, 0, w_3) = \sum_{x_1=0}^{\min\{w_3, \ell_{r\oplus 1,1}\}} \sum_{b_1=0}^{\min\{w_3, \ell_{r\oplus 1,1}\} - x_1} Q_i(r; x_1, 0, w_3 - x_1 - b_1) \times$$
$$\times \varphi_1(b_1; T_{r\oplus 1}) \varphi_2(0; T_{r\oplus 1}) \psi(0; w_3 - x_1 - b_1, p_{r\oplus 1}), \qquad w_3 \geqslant 0; \tag{6}$$

$$Q_{i+1}(r \oplus 1; 0, w_2, 0) = \sum_{c=0}^{w_2} \sum_{x_2=0}^{w_2-c} \varphi_1(0; T_{r\oplus 1}) \varphi_2(w_2 - x_2 - c; T_{r\oplus 1}) \psi(c; c, p_{r\oplus 1}) \times$$
$$\times Q_i(r; 0, x_2, c), \qquad w_2 \geqslant 1; \tag{7}$$

$$Q_{i+1}(r \oplus 1; 0, w_2, w_3) = \sum_{c=0}^{w_2} \sum_{x_2=0}^{w_2-c} \sum_{x_1=0}^{\min\{w_3+c, \ell_{r\oplus 1,1}\}} \sum_{b_1=0}^{\min\{w_3+c, \ell_{r\oplus 1,1}\} - x_1} \varphi_1(b_1; T_{r\oplus 1}) \times$$
$$\times Q_i(r; x_1, x_2, w_3 + c - x_1 - b_1) \varphi_2(w_2 - c - x_2; T_{r\oplus 1}) \times$$
$$\times \psi(c; w_3 + c - x_1 - b_1, p_{r\oplus 1}), \qquad w_2 \geqslant 1, \quad w_3 \geqslant 1; \tag{8}$$

$$Q_{i+1}(r \oplus 1; w_1, w_2, w_3) = \sum_{x_1=0}^{w_1 + \ell_{r\oplus 1,1}} \sum_{c=0}^{w_2} \sum_{x_2=0}^{w_2-c} Q_i(r; x_1, x_2, c + w_3 - \ell_{r\oplus,1}) \times$$
$$\times \varphi_1(w_1 + \ell_{r\oplus 1,1} - x_1; T_{r\oplus 1}) \varphi_2(w_2 - c - x_2; T_{r\oplus 1}) \times$$
$$\times \psi(c; c + w_3 - \ell_{r\oplus 1,1}, p_{r\oplus 1}), \qquad w_1 \geqslant 1, \quad w_2 \geqslant 0, \quad w_3 \geqslant \ell_{r\oplus 1,1}; \tag{9}$$

при $\Gamma^{(r\oplus 1)} \in \Gamma^{\mathrm{III}}$

$$Q_{i+1}(r \oplus 1; w_1, 0, w_3) = \sum_{x_1}^{w_1} \sum_{x_2=0}^{\ell_{r\oplus 1,2}} \sum_{c=0}^{\ell_{r\oplus 1,2} - x_2} \sum_{b_2=0}^{\ell_{r\oplus 1,2} - x_2 - c} \varphi_1(w_1 - x_1; T_{r\oplus 1}) \times$$
$$\times Q_i(r; x_1, x_2, w_3 + c) \varphi_2(b_2; T_{r\oplus 1}) \psi(c; w_3 + c, p_{r\oplus 1}), \qquad w_1 \geqslant 0, w_3 \geqslant 0; \tag{10}$$

$$Q_{i+1}(r \oplus 1; w_1, w_2, w_3) = \sum_{x_1=0}^{w_1} \sum_{c=0}^{w_2 + \ell_{r\oplus 1,2}} \sum_{x_2=0}^{w_2 + \ell_{r\oplus 1,2} - c} Q_i(r; x_1, x_2, w_3 + c) \varphi_1(w_1 - x_1; T_{r\oplus 1}) \times$$
$$\times \varphi_2(w_2 + \ell_{r\oplus 1,2} - x_2 - c; T_{r\oplus 1}) \psi(c; w_3 + x, p_{r\oplus 1}), \qquad w_1 \geqslant 0,\ w_2 \geqslant 1,\ w_3 \geqslant 0; \tag{11}$$

при $\Gamma^{(r\oplus 1)} \in \Gamma^{\mathrm{IV}}$

$$Q_{i+1}(r \oplus 1; 0, 0, w_3) = \sum_{x_1=0}^{\min\{w_3, \ell_{r\oplus 1,1}\}} \sum_{b_1=0}^{\min\{w_3, \ell_{r\oplus 1,1}\} - x_1} \sum_{c=0}^{\ell_{r\oplus 1,2}} \sum_{x_2=0}^{\ell_{r\oplus 1,2} - c} \sum_{b_2=0}^{\ell_{r\oplus 1,2} - c - x_2} \varphi_1(b_1; T_{r\oplus 1}) \times$$

$$\times Q_i(r;x_1,x_2,w_3+c-x_1-b_1)\varphi_2(b_2;T_{r\oplus1})\psi(c;w_3+c-x_1-b_1,p_{r\oplus1}),\quad w_3\geqslant 0;\ (12)$$

$$Q_{i+1}(\Gamma^{(r\oplus1)};0,w_2,w_3)=\sum_{x_1=0}^{\min\{\ell_{r\oplus1,1},w_3\}}\ \sum_{b_1=0}^{\min\{\ell_{r\oplus1,1},w_3\}-x_1}\ \sum_{c=0}^{w_2+\ell_{r\oplus1,2}}\ \sum_{x_2=0}^{\ell_{r\oplus1,2}-c}\varphi_1(b_1;T_{r\oplus1})\times$$
$$\times Q_i(r;x_1,x_2,w_3+c-x_1-b_1)\varphi_2(w_2+\ell_{r\oplus1,2}-x_2-c;T_{r\oplus1})\times$$
$$\times\psi(c;w_3+c-x_1-b_1,p_{r\oplus1}),\qquad w_2\geqslant 1,\quad w_3\geqslant 0;\tag{13}$$

$$Q_{i+1}(\Gamma^{(r\oplus1)};w_1,0,w_3)=\sum_{x_1=0}^{w_1+\ell_{r\oplus1,1}}\ \sum_{c=0}^{\ell_{r\oplus1,2}}\ \sum_{x_2=0}^{\ell_{r\oplus1,2}-c}\ \sum_{b_2=0}^{\ell_{r\oplus1,2}-c-x_2}Q_i(\Gamma^{(r)};x_1,x_2,w_3+c-\ell_{r\oplus1,1})\times$$
$$\times\varphi_1(w_1+\ell_{r\oplus1,1}-x_1;T_{r\oplus1})\psi(c;w_3+c-\ell_{r\oplus1,1},p_{r\oplus1})\times$$
$$\times\varphi_2(b_2;T_{r\oplus1}),\qquad w_1\geqslant 1,\quad w_3\geqslant\ell_{r\oplus1,1};\tag{14}$$

$$Q_{i+1}(\Gamma^{(r\oplus1)};w_1,w_2,w_3)=\sum_{x_1=0}^{w_1+\ell_{r\oplus1,1}}\ \sum_{c=0}^{\ell_{r\oplus1,2}}\ \sum_{x_2=0}^{\ell_{r\oplus1,2}-c}Q_i(\Gamma^{(r)};x_1,x_2,w_3+c-\ell_{r\oplus1,1})\times$$
$$\times\varphi_1(w_1+\ell_{r\oplus1,1}-x_1;T_{r\oplus1})\varphi_2(w_2+\ell_{r\oplus1,2}-x_2-c;T_{r\oplus1})\times$$
$$\times\psi(c;w_3+c-\ell_{r\oplus1,1},p_{r\oplus1}),\qquad w_1\geqslant 1,w_2\geqslant 1,w_3\geqslant\ell_{r\oplus1,1}.\tag{15}$$

Наконец,

$$Q_{i+1}(r\oplus1;w_1,w_2,w_3)=0\tag{16}$$

при $\Gamma^{(r\oplus1)}\in\Gamma^{\mathrm{II}}\cup\Gamma^{\mathrm{IV}}$, $w_1\geqslant 1$, $w_2\geqslant 0$, $0\leqslant w_3\leqslant\ell_{r\oplus1,1}-1$. Мы установили теорему об абсолютных распределениях вероятностей марковской цепи (2).

Теорема 2. *Вероятности $Q_i(r;x_1,x_2,x_3)$ удовлетворяют рекуррентным по $i=0,1,\ldots$ уравнениям* (5)–(16).

Обозначим через $w=(w_1,w_2,w_3)$ произвольный элемент множества X, $E_1'=\{(\Gamma^{(r)},w)\colon\Gamma^{(r)}\in\Gamma^{\mathrm{II}}\cup\Gamma^{\mathrm{IV}},w_1>0,w_3<\ell_{r,1}\}$, $E_1=\{(\gamma,w)\colon\gamma\in\Gamma^{\mathrm{I}}\cup\Gamma^{\mathrm{III}},w\in X\}$, $E_2=\{(\gamma,w)\colon\gamma\in\Gamma^{\mathrm{II}}\cup\Gamma^{\mathrm{IV}},w_1=0\}$, $E_3=\{(\Gamma^{(r)},w)\colon\Gamma^{(r)}\in\Gamma^{\mathrm{II}}\cup\Gamma^{\mathrm{IV}},w_1>0,w_3\geqslant\ell_{r,1}\}$.

Следствие 1. *Множество состояний марковской цепи (2) есть объединение незамкнутого множества E_1' несущественных состояний и замкнутого подмножества $E_1\cup E_2\cup E_3$ существенных периодических состояний с периодом n.*

При $r=1,\,2,\,\ldots,\,n$, $j=1,\,2$, и $|z_1|\leqslant 1$, $|z_2|\leqslant 1$, $|z_3|\leqslant 1$ введём производящие функции

$$\Psi_i(r;z_1,z_2,z_3)=\sum_{x_1=0}^{\infty}\sum_{x_2=0}^{\infty}\sum_{x_3=0}^{\infty}z_1^{x_1}z_2^{x_2}z_3^{x_3}Q_i(r;x_1,x_2,x_3),$$
$$q_{r,j}(z_j)=\exp\left\{\lambda_jT_r\left(\sum_{x=1}^{\infty}p_x^{(j)}z_j^x-1\right)\right\}$$

для соответствующих распределений вероятностей.

Теорема 3. *Имеют место следующие рекуррентные по $i=0,\,1,\,\ldots$ соотношения для производящих функций: для $\Gamma^{(r\oplus1)}\in\Gamma^{\mathrm{I}}$*

$$\Psi_{i+1}(r\oplus1;z_1,z_2,z_3)=q_{r\oplus1,1}(z_1)q_{r\oplus1,2}(z_2)\Psi_i(r;z_1,z_2,z_2p_{r\oplus1}+z_3(1-p_{r\oplus1})),$$

для $\Gamma^{(r\oplus1)}\in\Gamma^{\mathrm{II}}$

$$\Psi_{i+1}(r\oplus1;z_1,z_2,z_3)=\left(\frac{z_3}{z_1}\right)^{\ell_{r\oplus1,1}}q_{r\oplus1,1}(z_1)q_{r\oplus1,2}(z_2)\Psi_i(r;z_1,z_2,z_2p_{r\oplus1}+z_3(1-p_{r\oplus1}))+$$

$$+q_{r\oplus 1,2}(z_2)\sum_{x_1=0}^{\ell_{r\oplus 1,1}}\sum_{x_2=0}^{\infty}\sum_{x_3=0}^{\infty}Q_i(r;x_1,x_2,x_3)z_2^{x_2}(z_2p_{r\oplus 1}+z_3(1-p_{r\oplus 1}))^{x_3}\times$$
$$\times\sum_{b_1=0}^{\ell_{r\oplus 1,1}-x_1}(z_3^{x_1+b_1}-z_1^{x_1+b_1-\ell_{r\oplus 1,1}}z_3^{\ell_{r\oplus 1,1}})\varphi_1(b_1;T_{r\oplus 1}),$$

для $\Gamma^{(r\oplus 1)}\in\Gamma^{\mathrm{III}}$

$$\Psi_{i+1}(r\oplus 1;z_1,z_2,z_3)=z_2^{-\ell_{r\oplus 1,2}}q_{r\oplus 1,1}(z_1)q_{r\oplus 1,2}(z_2)\times$$
$$\times\Psi_i(r;z_1,z_2,z_2p_{r\oplus 1}+z_3(1-p_{r\oplus 1}))+q_{r\oplus 1,1}(z_1)\sum_{x_1=0}^{\infty}\sum_{x_2=0}^{\ell_{r\oplus 1,2}}\sum_{x_3=0}^{\infty}Q_i(r;x_1,x_2,x_3)\times$$
$$\times\sum_{c=0}^{\min\{x_3,\ell_{r\oplus 1,2}-x_2\}}\sum_{b_2=0}^{\ell_{r\oplus 1,2}-x_2-c}z_1^{x_1}(1-z_2^{x_2+b_2+c-\ell_{r\oplus 1,2}})z_3^{x_3-c}\varphi_2(b_2;T_{r\oplus 1})\psi(c;x_3,p_{r\oplus 1}),$$

для $\Gamma^{(r\oplus 1)}\in\Gamma^{\mathrm{IV}}$

$$\Psi_{i+1}(r\oplus 1;z_1,z_2,z_3)=\left(\frac{z_3}{z_1}\right)^{\ell_{r\oplus 1,1}}z_2^{-\ell_{r\oplus 1,2}}q_{r\oplus 1,1}(z_1)q_{r\oplus 1,2}(z_2)\times$$
$$\times\Psi_i(r;z_1,z_2,z_2p_{r\oplus 1}+z_3(1-p_{r\oplus 1}))+\sum_{x_1}^{\ell_{r\oplus 1,1}}\sum_{x_2=0}^{\infty}\sum_{x_3=0}^{\infty}Q_i(r;x_1,x_2,x_3)\times$$
$$\times\sum_{b_1=0}^{\ell_{r\oplus 1,1}-x_1}\sum_{c=\max\{0,\ell_{r\oplus 1,2}-x_2\}}^{x_3}\sum_{b_2=\max\{0,\ell_{r\oplus 1,2}-x_2-c\}}^{\infty}z_2^{x_2+b_2+c-\ell_{r\oplus 1,2}}\times$$
$$\times(z_3^{x_1+x_3+b_1-c}-z_1^{x_1+b_1-\ell_{r\oplus 1,1}}z_3^{x_3+\ell_{r\oplus 1,1}-c})\varphi_1(b_1;T_{r\oplus 1,1})\varphi_2(b_2;T_{r\oplus 1})\psi(c;x_3,p_{r\oplus 1})+$$
$$+\sum_{x_1=0}^{\infty}\sum_{x_2=0}^{\ell_{r\oplus 1,2}}\sum_{x_3=0}^{\infty}Q_i(r;x_1,x_2,x_3)\sum_{b_1=\max\{0,\ell_{r\oplus 1,1}-x_1\}}^{\infty}\sum_{c=0}^{\min\{x_3,\ell_{r\oplus 1,2}-x_2\}}\sum_{b_2=0}^{\ell_{r\oplus 1,2}-x_2-c}\varphi_1(b_1;T_{r\oplus 1})\times$$
$$\times\varphi_2(b_2;T_{r\oplus 1})\psi(c;x_3,p_{r\oplus 1})z_1^{x_1+b_1-\ell_{r\oplus 1,1}}(1-z_2^{x_2+b_2+c-\ell_{r\oplus 1,2}})z_3^{x_3+\ell_{r\oplus 1,1}-c}+$$
$$+\sum_{x_1=0}^{\ell_{r\oplus 1,1}}\sum_{x_2=0}^{\ell_{r\oplus 1,2}}\sum_{x_3=0}^{\infty}Q_i(r;x_1,x_2,x_3)\sum_{b_1=0}^{\ell_{r\oplus 1,1}-x_1}\sum_{c=0}^{\min\{x_3,\ell_{r\oplus 1,2}-x_2\}}\sum_{b_2=0}^{\ell_{r\oplus 1,2}-x_2-c}\varphi_1(b_1;T_{r\oplus 1})\times$$
$$\times\varphi_2(b_2;T_{r\oplus 1})\psi(c;x_3,p_{r\oplus 1})(z_3^{x_1+x_3+b_1-c}-z_1^{x_1+b_1-\ell_{r\oplus 1,1}}z_2^{x_2+b_2+c-\ell_{r\oplus 1,2}}z_3^{x_3+\ell_{r\oplus 1,1}-c}).$$

Доказательство. Через $\mathbf{E}(\cdot)$ будем обозначать оператор математического ожидания. Пусть $I_B(\omega)$ — индикатор события $B\in\mathfrak{F}$; положим $\mathbf{E}(\theta;B)=\mathbf{E}(\theta I_B)$ для случайной величины θ. Тогда производящие функции $\Psi_i(r;z_1,z_2,z_3)$, $r=1,2,\ldots,n$, могут быть записаны в виде

$$\Psi_i(r;z_1,z_2,z_3)=\mathbf{E}(z_1^{\kappa_{1,i}}z_2^{\kappa_{2,i}}z_3^{\kappa_{3,i}};\{\omega\colon\Gamma_i=\Gamma^{(r)}\}).$$

Пусть $x=(x_1,x_2,x_3)$ — произвольный элемент из множества X. Продемонстрируем доказательство наиболее трудоёмкого последнего случая: $\Gamma^{(r\oplus 1)}\in\Gamma^{\mathrm{IV}}$. Оставшиеся случаи могут быть проверены аналогичным образом. Для $\Gamma^{(r\oplus 1)}\in\Gamma^{\mathrm{IV}}$

$$\Psi_{i+1}(r\oplus 1;z_1,z_2,z_3)=\sum_{x\in X}Q_i(r;x_1,x_2,x_3)\mathbf{E}\big(z_1^{\max\{0,x_1+\eta_{1,i}-\ell_{r\oplus 1,1}\}}\times$$
$$\times z_2^{\max\{0,x_2+\eta_{2,i}+\eta_{3,i}-\ell_{r\oplus 1,2}\}}z_3^{x_3+\min\{x_1+\eta_{1,i},\ell_{r\oplus 1,1}\}-\eta_{3,i}}\big|A_i(r;x_1,x_2,x_3)\big)=$$

$$= \sum_{x\in X} \mathbf{E}\big(z_1^{x_1+\eta_{1,i}-\ell_{r\oplus 1,1}} z_2^{x_2+\eta_{2,i}+\eta_{3,i}-\ell_{r\oplus 1,2}} z_3^{x_3+\ell_{r\oplus 1,1}-\eta_{3,i}} \big| A_i(r;x_1,x_2,x_3)\big)\times$$
$$\times Q_i(r;x_1,x_2,x_3) + \sum_{x\in X} \mathbf{E}\big(z_1^{\max\{0,x_1+\eta_{1,i}-\ell_{r\oplus 1,1}\}} z_2^{\max\{0,x_2+\eta_{2,i}+\eta_{3,i}-\ell_{r\oplus 1,2}\}}\times$$
$$\times z_3^{x_3+\min\{x_1+\eta_{1,i},\ell_{r\oplus 1,1}\}-\eta_{3,i}} - z_1^{x_1+\eta_{1,i}-\ell_{r\oplus 1,1}} z_2^{x_2+\eta_{2,i}+\eta_{3,i}-\ell_{r\oplus 1,2}}\times$$
$$\times z_3^{x_3+\ell_{r\oplus 1,1}-\eta_{3,i}} \big| A_i(r;x_1,x_2,x_3)\big) Q_i(r;x_1,x_2,x_3).$$

Первое слагаемое в сумме в правой части равно

$$\left(\frac{z_3}{z_1}\right)^{\ell_{r\oplus 1,1}} z_2^{-\ell_{r\oplus 1,2}} q_{r\oplus 1,1}(z_1) q_{r\oplus 1,2}(z_2) \Psi_i(r; z_1, z_2, z_2 p_{r\oplus 1} + z_3(1-p_{r\oplus 1})).$$

Поскольку

$$I_{\{\eta_{1,i}\leqslant \ell_{r\oplus 1,1}-x_1,\eta_{2,i}+\eta_{3,i}>\ell_{r\oplus 1,2}-x_2\}} + I_{\{\eta_{1,i}>\ell_{r\oplus 1,1}-x_1,\eta_{2,i}+\eta_{3,i}\leqslant \ell_{r\oplus 1,2}-x_2\}}+$$
$$+I_{\{\eta_{1,i}\leqslant \ell_{r\oplus 1,1}-x_1,\eta_{2,i}+\eta_{3,i}\leqslant \ell_{r\oplus 1,2}-x_2\}} + I_{\{\eta_{1,i}>\ell_{r\oplus 1,1}-x_1,\eta_{2,i}+\eta_{3,i}>\ell_{r\oplus 1,2}-x_2\}} = 1,$$

и

$$z_1^{\max\{0,x_1+\eta_{1,i}-\ell_{r\oplus 1,1}\}} z_2^{\max\{0,x_2+\eta_{2,i}+\eta_{3,i}-\ell_{r\oplus 1,2}\}} z_3^{x_3+\min\{x_1+\eta_{1,i},\ell_{r\oplus 1,1}\}-\eta_{3,i}} =$$
$$= z_1^{x_1+\eta_{1,i}-\ell_{r\oplus 1,1}} z_2^{x_2+\eta_{2,i}+\eta_{3,i}-\ell_{r\oplus 1,2}} z_3^{x_3+\ell_{r\oplus 1,1}-\eta_{3,i}}$$

при $\eta_{1,i} > \ell_{r\oplus 1,1} - x_1$ и $\eta_{2,i} + \eta_{3,i} > \ell_{r\oplus 1,2} - x_2$, имеет место следующее равенство:

$$\mathbf{E}\big(z_1^{\max\{0,x_1+\eta_{1,i}-\ell_{r\oplus 1,1}\}} z_2^{\max\{0,x_2+\eta_{2,i}+\eta_{3,i}-\ell_{r\oplus 1,2}\}} z_3^{x_3+\min\{x_1+\eta_{1,i},\ell_{r\oplus 1,1}\}-\eta_{3,i}} -$$
$$- z_1^{x_1+\eta_{1,i}-\ell_{r\oplus 1,1}} z_2^{x_2+\eta_{2,i}+\eta_{3,i}-\ell_{r\oplus 1,2}} z_3^{x_3+\ell_{r\oplus 1,1}-\eta_{3,i}} \big| A_i(r;x_1,x_2,x_3)\big) =$$
$$= \mathbf{E}\big(\big(z_2^{x_2+\eta_{2,i}+\eta_{3,i}-\ell_{r\oplus 1,2}} z_3^{x_3+x_1+\eta_{1,i}-\eta_{3,i}} - z_1^{x_1+\eta_{1,i}-\ell_{r\oplus 1,1}}\times$$
$$\times z_2^{x_2+\eta_{2,i}+\eta_{3,i}-\ell_{r\oplus 1,2}} z_3^{x_3+\ell_{r\oplus 1,1}-\eta_{3,i}}\big) I_{\{\eta_{1,i}\leqslant \ell_{r\oplus 1,1}-x_1,\eta_{2,i}+\eta_{3,i}>\ell_{r\oplus 1,2}-x_2\}} \big| A_i(r;x_1,x_2,x_3)\big)+$$
$$+\mathbf{E}\big(\big(z_1^{x_1+\eta_{1,i}-\ell_{r\oplus 1,1}} z_3^{x_3+\ell_{r\oplus 1,1}-\eta_{3,i}} - z_1^{x_1+\eta_{1,i}-\ell_{r\oplus 1,1}}\times$$
$$\times z_2^{x_2+\eta_{2,i}+\eta_{3,i}-\ell_{r\oplus 1,2}} z_3^{x_3+\ell_{r\oplus 1,1}-\eta_{3,i}}\big) I_{\{\eta_{1,i}>\ell_{r\oplus 1,1}-x_1,\eta_{2,i}+\eta_{3,i}\leqslant \ell_{r\oplus 1,2}-x_2\}} \big| A_i(r;x_1,x_2,x_3)\big)+$$
$$+\mathbf{E}\big(\big(z_3^{x_3+x_1+\eta_{1,i}-\eta_{3,i}} - z_1^{x_1+\eta_{1,i}-\ell_{r\oplus 1,1}} z_2^{x_2+\eta_{2,i}+\eta_{3,i}-\ell_{r\oplus 1,2}}\times$$
$$\times z_3^{x_3+\ell_{r\oplus 1,1}-\eta_{3,i}}\big) I_{\{\eta_{1,i}\leqslant \ell_{r\oplus 1,1}-x_1,\eta_{2,i}+\eta_{3,i}\leqslant \ell_{r\oplus 1,2}-x_2\}} \big| A_i(r;x_1,x_2,x_3)\big).$$

Заметим, что для некоторых наборов значений величин x_1, x_2, x_3 часть слагаемых может обращаться в ноль; например, при $x_1 > \ell_{r\oplus 1,1}$ событие $\eta_{1,i} \leqslant \ell_{r\oplus 1,1} - x_1$ является невозможным. С учётом этого получим:

$$\sum_{x\in X} Q_i(r;x_1,x_2,x_3)\mathbf{E}\big(\big(z_2^{x_2+\eta_{2,i}+\eta_{3,i}-\ell_{r\oplus 1,2}} z_3^{x_3+x_1+\eta_{1,i}-\eta_{3,i}} - z_1^{x_1+\eta_{1,i}-\ell_{r\oplus 1,1}}\times$$
$$\times z_2^{x_2+\eta_{2,i}+\eta_{3,i}-\ell_{r\oplus 1,2}} z_3^{x_3+\ell_{r\oplus 1,1}-\eta_{3,i}}\big) I_{\{\eta_{1,i}\leqslant \ell_{r\oplus 1,1}-x_1,\eta_{2,i}+\eta_{3,i}>\ell_{r\oplus 1,2}-x_2\}} \big| A_i(r;x_1,x_2,x_3)\big) =$$
$$= \sum_{x_1=0}^{\ell_{r\oplus 1,1}} \sum_{x_2=0}^{\infty} \sum_{x_3=0}^{\infty} Q_i(r;x_1,x_2,x_3) \sum_{b_1=0}^{\ell_{r\oplus 1,1}-x_1} \sum_{c=\max\{0,\ell_{r\oplus 1,2}-x_2\}}^{\infty} \sum_{b_2=\max\{0,\ell_{r\oplus 1,2}-x_2-c\}}^{\infty} \varphi_1(b_1;T_{r\oplus 1})\times$$
$$\times \psi(c;x_3,T_{r\oplus 1}) z_2^{x_2+b_2+c-\ell_{r\oplus 1,2}} (z_3^{x_1+x_3+b_1-c} - z_1^{x_1+b_1-\ell_{r\oplus 1,1}} z_3^{\ell_{r\oplus 1,1}+x_3-c}),$$
$$\sum_{x\in X} Q_i(r;x_1,x_2,x_3)\mathbf{E}((z_1^{x_1+\eta_{1,i}-\ell_{r\oplus 1,1}} z_3^{x_3+\ell_{r\oplus 1,1}-\eta_{3,i}} - z_1^{x_1+\eta_{1,i}-\ell_{r\oplus 1,1}}\times$$
$$\times z_2^{x_2+\eta_{2,i}+\eta_{3,i}-\ell_{r\oplus 1,2}} z_3^{x_3+\ell_{r\oplus 1,1}-\eta_{3,i}}) I_{\{\eta_{1,i}>\ell_{r\oplus 1,1}-x_1,\eta_{2,i}+\eta_{3,i}\leqslant \ell_{r\oplus 1,2}-x_2\}} | A_i(r;x_1,x_2,x_3)) =$$

$$= \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\ell_{r\oplus1,2}} \sum_{x_3=0}^{\infty} Q_i(r; x_1, x_2, x_3) z_1^{x_1-\ell_{r\oplus1,1}} z_3^{x_3+\ell_{r\oplus1,2}} \times$$
$$\times \sum_{b_1=\min\{0,\ell_{r\oplus1,1}-x_1\}+1}^{\infty} \sum_{c=0}^{\min\{x_3,\ell_{r\oplus1,2}\}} \sum_{b_2=0}^{\ell_{r\oplus1,2}-x_2-c} \varphi_1(b_1; T_{r\oplus1})\varphi_2(b_2; T_{r\oplus1}) \times$$
$$\times \psi(c; x_3, T_{r\oplus1}) z_1^{b_1}(1 - z_2^{x_2+b_2+c-\ell_{r\oplus1,2}}) z_3^{-c},$$
$$\sum_{x\in X} Q_i(r; x_1, x_2, x_3)\mathbf{E}((z_3^{x_3+x_1+\eta_{1,i}-\eta_{3,i}} - z_1^{x_1+\eta_{1,i}-\ell_{r\oplus1,1}} z_2^{x_2+\eta_{2,i}+\eta_{3,i}-\ell_{r\oplus1,2}} \times$$
$$\times z_3^{x_3+\ell_{r\oplus1,1}-\eta_{3,i}}) I_{\{\eta_{1,i}\leqslant\ell_{r\oplus1,1}-x_1, \eta_{2,i}+\eta_{3,i}\leqslant\ell_{r\oplus1,2}-x_2\}} | A_i(r; x_1, x_2, x_3)) =$$
$$= \sum_{x_1=0}^{\ell_{r\oplus1,1}} \sum_{x_2=0}^{\ell_{r\oplus1,2}} \sum_{x_3=0}^{\infty} Q_i(r; x_1, x_2, x_3) \sum_{b_1=0}^{\ell_{r\oplus1,1}-x_1} \sum_{c=0}^{\min\{x_3,\ell_{r\oplus1,2}-x_2\}} \sum_{b_2=0}^{\ell_{r\oplus1,2}-x_2-c} \varphi_1(b_1; T_{r\oplus1}) \times$$
$$\times \varphi_2(b_2; T_{r\oplus1})\psi(c; x_3, T_{r\oplus1})(z_3^{x_1+x_3+b_1-c} - z_1^{x_1+b_1-\ell_{r\oplus1,1}} z_2^{x_2+b_2+c-\ell_{r\oplus1,2}} z_3^{x_3+\ell_{r\oplus1,1}-c}).$$

Последнее соотношение из формулировки теоремы доказано. □

По заданному распределению вероятностей вектора $(\Gamma_0, \kappa_{1,0}, \kappa_{2,0}, \kappa_{3,0})$ рекуррентные соотношения теоремы 3 позволяют последовательно определить производящие функции $\Psi_{i+1}(r; z_1, z_2, z_3)$, $r = 1, 2, \ldots, n$, $i = 0, 1, \ldots$, сходящиеся в поликруге $D_0 = \{(z_1, z_2, z_3)\colon |z_i| \leqslant 1\}$. Следующая лемма демонстрирует, что производящие функции будут сходиться в поликруге $D_\varepsilon = \{(z_1, z_2, z_3)\colon |z_i| \leqslant 1+\varepsilon\}$, не содержащем точек (z_1, z_2, z_3) с особой точкой z_1 функции $q_{r,1}(z_1)$ при некотором r, или особой точкой z_2 функции $q_{r,2}(z_2)$ при некотором r, при надлежащем выборе $\Psi_0(r; z_1, z_2, z_3)$.

Лемма 1. *При $0 < p < 1$ функция $(z_1, z_2, z_3) \to (z_1, z_2, pz_2 + (1-p)z_3)$ отображает поликруг D_ε в поликруг D_ε.*

Доказательство. Рассмотрим полярные координаты $z_j = \rho_j e^{iu_j}$, $j = 1, 2, 3$. В поликруге D_ε имеем $\rho_j \leqslant 1 + \varepsilon$. Тогда

$$|pz_2 + (1-p)z_3|^2 = p^2\rho_2^2 + (1-p)^2\rho_3^2 + 2p(1-p)\rho_2\rho_3\cos(u_2 - u_3) \leqslant$$
$$\leqslant (p\rho_2 + (1-p)\rho_3)^2 \leqslant (1+\varepsilon)^2.$$

Значит, $(z_1, z_2, pz_2 + (1-p)z_3) \in D_\varepsilon$. Лемма доказана. □

3. Достаточное условие существования стационарного распределения

Введём обозначения: $\ell_1 = \sum\limits_{r\colon \Gamma^{(r)}\in\Gamma^{\mathrm{II}}\cup\Gamma^{\mathrm{IV}}} \ell_{r,1}$, $\ell_2 = \sum\limits_{r\colon \Gamma^{(r)}\in\Gamma^{\mathrm{III}}\cup\Gamma^{\mathrm{IV}}} \ell_{r,2}$, $T = T_1 + T_2 + \ldots + T_n$, $\bar\lambda_j = \lambda_j \sum\limits_{x=1}^{\infty} x p_x^{(j)}$. Здесь ℓ_j задаёт число требований потока насыщения $\Pi_j^{\text{нас}}$ за рабочий цикл обслуживающего устройства длительностью T, а $\bar\lambda_j$ — интенсивность поступления требований по потоку Π_j, поскольку $\sum\limits_{x=1}^{\infty} x p_x^{(j)}$ есть математическое ожидание размера группы по потоку Π_j. В следующей теореме содержатся ограничения на интенсивности входных потоков, средние размеры групп, потоки насыщения и длительности состояний обслуживающего устройства, при выполнении которых среднее число требований в системе ограничено по времени.

Теорема 4. *Для существования стационарного распределения марковской цепи (2) достаточно выполнения неравенства $\bar\lambda_1 T - \ell_1 < 0$, $(\bar\lambda_1 + \bar\lambda_2)T - \ell_2 < 0$.*

Доказательство. Пусть в предположениях теоремы стационарное распределение не существует. Тогда последовательность $\{\mathbf{E}(\kappa_{1,i}+\kappa_{2,i}+\kappa_{3,i}); i=0,1,\ldots\}$ с необходимостью неограниченно возрастает при любом начальном распределении. Выберем поликруг D_ε, не содержащий точек (z_1,z_2,z_3) таких, что z_1 есть особая точка функции $q_{r',1}(z_1)$, или z_2 есть особая точка функции $q_{r',2}(z_2)$ для некоторого $r'=1, 2, \ldots, n$. Затем выберем начальное распределение вероятностей так, что производящие функции $\Psi_0(r;z_1,z_2,z_3)$, $r=1, 2, \ldots, n$, сходятся в поликруге D_ε. Покажем, что при таком выборе начального распределения последовательность $\{\mathbf{E}(\kappa_{1,i}+\kappa_{2,i}+\kappa_{3,i}); i= =0,1,\ldots\}$ из математических ожиданий является ограниченной.

С этой целью сначала выберем точку $(z^*,1,1)\in D_\varepsilon$ с $1<z^*<1+\varepsilon$ и докажем, что последовательность $\Psi_i(r;z^*,1,1)$, $i=0, 1, \ldots$, является ограниченной для любого r. Из теоремы 3 имеем: при $\Gamma^{(r\oplus 1)}\in\Gamma^{\mathrm{I}}\cup\Gamma^{\mathrm{III}}$

$$\Psi_{i+1}(r\oplus 1;z^*,1,1)=q_{r\oplus 1,1}(z^*)\Psi_i(r;z^*,1,1), \tag{17}$$

а при $\Gamma^{(r\oplus 1)}\in\Gamma^{\mathrm{II}}\cup\Gamma^{\mathrm{IV}}$

$$\Psi_{i+1}(r\oplus 1;z^*,1,1)=(z^*)^{-\ell_{r\oplus 1,1}}q_{r\oplus 1,1}(z^*)\Psi_i(r;z^*,1,1)+$$
$$+\sum_{x_1=0}^{\ell_{r\oplus 1,1}}\sum_{x_2=0}^{\infty}\sum_{x_3=0}^{\infty}Q_i(r;x_1,x_2,x_3)\sum_{b_1=0}^{\ell_{r\oplus 1,1}-x_1}(1-(z^*)^{x_1+b_1-\ell_{r\oplus 1,1}})\varphi_1(b_1;T_{r\oplus 1}).$$

Поскольку величины $Q_i(r;x_1,x_2,x_3)$ образуют распределение вероятностей, то

$$\sum_{x_2=0}^{\infty}\sum_{x_3=0}^{\infty}Q_i(r;x_1,x_2,x_3)\leqslant 1,$$

следовательно,

$$\Psi_{i+1}(r\oplus 1;z^*,1,1)\leqslant(z^*)^{-\ell_{r\oplus 1,1}}q_{r\oplus 1,1}(z^*)\Psi_i(r;z^*,1,1)+$$
$$+\sum_{x_1=0}^{\ell_{r\oplus 1,1}}\sum_{b_1=0}^{\ell_{r\oplus 1,1}-x_1}(1-(z^*)^{x_1+b_1-\ell_{r\oplus 1,1}})\varphi_1(b_1;T_{r\oplus 1}). \tag{18}$$

Из соотношений (17), (18) найдём:

$$\sum_{r=1}^{n}\Psi_{i+n}(r;z^*,1,1)\leqslant\left(\prod_{r=1}^{n}q_{r,1}(z^*)\right)(z^*)^{-\ell_1}\left(\sum_{r=1}^{n}\Psi_i(r;z^*,1,1)\right)+B(z^*).$$

Из неравенства $\bar\lambda_1T-\ell_1<0$ следует, что

$$\prod_{r=1}^{n}q_{r,1}(z^*)(z^*)^{-\ell_1}<1.$$

Последовательность

$$M_0=\sum_{r=1}^{n}\Psi_0(r;z^*,1,1),\quad\ldots,\quad M_{n-1}=\sum_{r=1}^{n}\Psi_{n-1}(r;z^*,1,1),$$
$$M_{i+n}=M_i\prod_{r=1}^{n}q_{r,1}(z^*)(z^*)^{-\ell_1}+B(z^*),\qquad i=0,1,\ldots$$

сходится, следовательно, ограничена; кроме того, имеем оценку

$$\sum_{r=1}^{n}\Psi_i(r;z^*,1,1)\leqslant M_i,\qquad i=0,1,\ldots.$$

Поэтому, величины $\Psi_i(r;z^*,1,1)$, $i=0, 1, \ldots$, ограничены некоторой константой M^* при каждом r.

Теперь подставим $z_1 = z_2 = z_3 = z^*$ в рекуррентные соотношения из теоремы 3. Получим: для $\Gamma^{(r\oplus 1)} \in \Gamma^{\mathrm{I}} \cup \Gamma^{\mathrm{II}}$

$$\Psi_{i+1}(r \oplus 1; z^*, z^*, z^*) = q_{r\oplus 1,1}(z^*) q_{r\oplus 1,2}(z^*) \Psi_i(r; z^*, z^*, z^*), \tag{19}$$

а для $\Gamma^{(r\oplus 1)} \in \Gamma^{\mathrm{III}} \cup \Gamma^{\mathrm{IV}}$

$$\begin{gathered}\Psi_{i+1}(r \oplus 1; z^*, 1, 1) = (z^*)^{-\ell_{r\oplus 1,2}} q_{r\oplus 1,1}(z^*) q_{r\oplus 1,2}(z^*) \Psi_i(r; z^*, z^*, z^*) + \\ + (z^*)^{-\ell_{r\oplus 1,2}} q_{r\oplus 1,1}(z^*) q_{r\oplus 1,2}(z^*) \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\ell_{r\oplus 1,2}} \sum_{x_3=0}^{\ell_{r\oplus 1,2}-x_2} Q_i(r; x_1, x_2, x_3) \times \\ \times \sum_{c=0}^{\min\{x_3, \ell_{r\oplus 1,2}-x_2\}} \sum_{b_2=0}^{\ell_{r\oplus 1,2}-x_2-c} (z^*)^{x_1+x_3-c}(1 - (z^*)^{x_2+b_2+c-\ell_{r\oplus 1,2}}) \times \\ \times \varphi_2(b_2; T_{r\oplus 1}) \psi(c; x_3, T_{r\oplus 1}).\end{gathered} \tag{20}$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{gathered}\sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\ell_{r\oplus 1,2}} \sum_{x_3=0}^{\ell_{r\oplus 1,2}-x_2} Q_i(r; x_1, x_2, x_3) \sum_{c=0}^{\min\{x_3, \ell_{r\oplus 1,2}-x_2\}} \sum_{b_2=0}^{\ell_{r\oplus 1,2}-x_2-c} (z^*)^{x_1+x_3-c} \times \\ \times (1 - (z^*)^{x_2+b_2+c-\ell_{r\oplus 1,2}}) \varphi_2(b_2; T_{r\oplus 1}) \psi(c; x_3, T_{r\oplus 1}) \leqslant \\ \leqslant \Bigg(\max_{0 \leqslant x_2+x_3 \leqslant \ell_{r\oplus 1,2}} \Bigg\{ \sum_{c=0}^{\min\{x_3, \ell_{r\oplus 1,2}-x_2\}} \sum_{b_2=0}^{\ell_{r\oplus 1,2}-x_2-c} (z^*)^{x_3-c} \times \\ \times (1 - (z^*)^{x_2+b_2+c-\ell_{r\oplus 1,2}}) \varphi_2(b_2; T_{r\oplus 1}) \psi(c; x_3, T_{r\oplus 1}) \Bigg\} \Bigg) \times \\ \times \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\ell_{r\oplus 1,2}} \sum_{x_3=0}^{\ell_{r\oplus 1,2}-x_2} (z^*)^{x_1} Q_i(r; x_1, x_2, x_3).\end{gathered}$$

В то же время,

$$\begin{gathered}\sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\ell_{r\oplus 1,2}} \sum_{x_3=0}^{\ell_{r\oplus 1,2}-x_2} (z^*)^{x_1} Q_i(r; x_1, x_2, x_3) \leqslant \\ \leqslant \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\infty} \sum_{x_3=0}^{\infty} (z^*)^{x_1} Q_i(r; x_1, x_2, x_3) = \Psi_i(r; z^*, 1, 1).\end{gathered}$$

Поскольку $\Psi_i(r; z^*, 1, 1) < M^*$, второе слагаемое в правой части равенства (20) мажорируется другой константой, не зависящей от i. Из равенств (19), (20) найдём:

$$\sum_{r=1}^{n} \Psi_{i+n}(r; z^*, z^*, z^*) \leqslant \left(\prod_{r=1}^{n} q_{r,1}(z^*) q_{r,2}(z^*) \right) (z^*)^{-\ell_2} \left(\sum_{r=1}^{n} \Psi_i(r; z^*, z^*, z^*) \right) + B_1(z^*).$$

Из неравенства $(\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2)T - \ell_2 < 0$ следует, что

$$\prod_{r=1}^{n} q_{r,1}(z^*) q_{r,2}(z^*) (z^*)^{-\ell_2} < 1.$$

Последовательность

$$M_0' = \sum_{r=1}^{n} \Psi_0(r; z^*, z^*, z^*), \quad \ldots, \quad M_{n-1}' = \sum_{r=1}^{n} \Psi_{n-1}(r; z^*, z^*, z^*),$$

$$M_{i+n}' = M_i' \left(\prod_{r=1}^{n} q_{r,1}(z^*) q_{r,2}(z^*) \right) (z^*)^{-\ell_2} + B_1(z^*), \qquad i = 0, 1, \ldots$$

сходится, следовательно, ограничена; более того,

$$\sum_{r=1}^{n} \Psi_i(r; z^*, z^*, z^*) \leqslant M_i', \qquad i = 0, 1, \ldots.$$

Итак, последовательность $\Psi_i(r; z^*, z^*, z^*)$, $i = 0, 1, \ldots$, ограничена некоторой постоянной M^{**} при каждом r. В силу теоремы Коши, математической ожидание

$$\mathbf{E}(\kappa_{1,i} + \kappa_{2,i} + \kappa_{3,i}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{|z-1|=\rho} (z-1)^{-2} \sum_{r=1}^{n} \Psi_i(r; z, z, z)\, dz$$

имеет верхнюю оценку, которая зависит только от ρ и M^{**}. Мы убедились, что математическое ожидание общего числа требований в системе ограничено. Теорема доказана. $\square$

Интересно выяснить структуру достаточного условия в теореме 4. Первое неравенство гарантирует, что очередь O_1 ограничена в среднем с течением времени. Тогда интенсивность выходного потока из очереди O_1 равна интенсивности входного потока Π_1. Второе неравенство означает, что суммарная интенсивность поступления требований в очередь O_2 равна $\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2$ и не зависит от вероятностей достижения p_r, $r = 1, 2, \ldots, n$. Можно думать, что второе неравенство гарантирует, что система в среднем успевает "вовремя" обслужить все требования, поступающие в очередь O_2.

Список литературы

1. М. А. Федоткин, *Оптимальное управление конфликтными потоками и маркированные точечные процессы с выделенной дискретной компонентой. I*, Литовский математический сборник **28** (1988), №4, 783–794.
2. М. А. Федоткин, *Процессы обслуживания и управляющие системы*, Математические вопросы кибернетики, "Наука", Москва, 1996, стр. 51–70.
3. М. А. Федоткин, *Нелокальный способ задания управляемых случайных процессов*, Математические вопросы кибернетики, "Наука", Москва, 1998, стр. 333–344.
4. A. V. Zorine and M. A. Fedotkin, *Optimization of control of doubly stochastic non-ordinary flows in time-sharing systems*, Automation and remote control **66** (2005), №7, 1115–1124.

Кафедра прикладной теории вероятностей, факультет вычислительной математики и кибернетики, Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского — национальный исследовательский университет, проспект Гагарина, 23, Нижний Новгород, 603950, Россия

Адрес электронной почты: zoav1602@gmail.com

Поступила 13/10/2010