Теорія йовір. та матем. статист. Вип. 84, 2011, стор. 18–33

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst. No. 84, 2011, pp. 18–33

ЗБІЖНІСТЬ МАКСИМАЛЬНОЇ ЙМОВІРНОСТІ УСПІХУ В ЗАДАЧІ КВАНТИЛЬНОГО ХЕДЖУВАННЯ ДЛЯ МОДЕЛІ ПРОЦЕСУ ЦІНИ АКЦІЇ З ДОВГОСТРОКОВОЮ ЗАЛЕЖНІСТЮ

УДК 519.21

М. В. БРАТИК, Ю. В. КОЗАЧЕНКО І Ю. С. МІШУРА

Анотація. Досліджується збіжність за ймовірністю множин максимальної ймовірності успіху в задачі квантильного хеджування для моделі процесу ціни акції, заданої за допомогою броунівського та дробово-броунівського рухів.

Abstract. The convergence in probability of the sets of maximal success in the problem of quantile hedging in the model of asset price involving Brownian and fractional Brownian motions is studied.

Аннотация. Исследуется сходимость по вероятности множеств максимальной вероятности успеха в задаче квантильного хеджирования для модели процесса цены акции, заданной с помощью броуновского и дробно-броуновского движений.

1. Вступ

Задача хеджування платіжних зобов'язань добре вивчена у випадку повних безарбітражних моделей фінансового ринку. Розглянемо інвестора, який хоче у фіксований момент часу $T > 0$ забезпечити виконання зобов'язання H і оперує активом, ціна якого моделюється семімартингалом $X = \{X_t, t \geq 0\}$. Як відомо, необхідною та достатньою умовою для цього є наявність початкового капіталу $H_0 = E_{P^*}(H)$, де E_{P^*} — математичне сподівання відносно єдиної мартингальної міри P^*, тобто міри, відносно якої X є мартингалом. Якщо інвестор не хоче або не може використати як початковий капітал суму H_0, а може дозволити собі використати тільки деяку суму $\nu < H_0$, то з безарбітражності моделі випливає, що інвестор не може забезпечити виконання зобов'язання H у всіх можливих сценаріях розвитку подій, тобто він буде неспроможним з ймовірністю 1 виконати зобов'язання H.

Загальні результати щодо такого типу виконання зобов'язань, тобто такого їхнього хеджування, яке називається квантильним, у випадку, коли процес ціни активу є семімартингалом, викладено у роботі [4]. Задачею квантильного хеджування є максимізувати ймовірність успіху, тобто ймовірність виконати зобов'язання H.

У нашій роботі ми розглянемо так звану змішану модель процесу ціни акції, якій притаманна властивість довгострокової залежності. Такий тип залежності можна спостерігати в багатьох сферах людської діяльності, зокрема в економіці, на фінансових ринках, в гідрофізиці та в телекомунікаційних мережах. Змішана модель на відміну від "чистих" моделей, що містять тільки дробовий броунівський рух, є безарбітражною принаймні для класу марківських самофінансовних стратегій.

У роботі [1] для змішаної моделі процесу ціни акції отримано вигляд множини, для якої ймовірність успіху є максимальною. Однак через складну структуру цієї

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60G22, 91B24; Secondary 60G15.

Ключові слова і фрази. Квантильне хеджування, дробово-броунівський рух, змішана модель, граничні теореми, ймовірність успіху.

Дослідження другого автора виконані за сприяння гранту №230804 "Mutifractionality" Європейської комісії.

множини виникають труднощі при обчисленні її ймовірності. У свою чергу, складна структура множини пов'язана з виглядом щільності dP^*/dP, яка у випадку змішаної моделі залежить від розподілу відповідних процесів на всьому проміжку $[0,T]$ (тут P — початкова, або об'єктивна міра). Зокрема, у роботі [1] для деяких видів платіжних зобов'язань отримано оцінку знизу максимальної ймовірності успіху, що дозволяє шукати нижню оцінку початкового капіталу, який необхідний, щоб з наперед заданою ймовірністю гарантувати виконання платіжного зобов'язання.

Дана робота є продовженням роботи [1]. Ми досліджуємо збіжність за ймовірністю множин максимальної ймовірності успіху в задачі квантильного хеджування для змішаної моделі процесу ціни акції. Роботу організовано наступним чином. У розділі 1 задано змішану модель процесу ціни акції. У розділі 2 описано розв'язок задачі квантильного хеджування для змішаної моделі, використаний у роботі [1], доведено деякі властивості ядра Вольтерра, за допомогою якого задається щільність dP^*/dP, та показано вигляд множини, для якої ймовірність успіху є максимальною. У розділі 3 доведено збіжність за ймовірністю множин максимальної ймовірності успіху.

1.1. **Модель ринку з довгостроковою залежністю.** Нехай задано повний ймовірнісний простір $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ з фільтрацією $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$. Розглянемо на ньому два незалежні процеси: вінерівський процес $B = \{B_t, t \geq 0\}$ та $B^H = \{B_t^H, t \geq 0\}$ — дробовий броунівський рух з індексом Хюрста H. Нагадаємо, що B^H — це неперервний гауссівський процес, що стартує з нуля, з нульовим середнім, коваріаційна функція якого дорівнює

$$\mathsf{E}\, B_t^H B_s^H = \frac{1}{2}\left(s^{2H} + t^{2H} - |s-t|^{2H}\right).$$

Розглянемо змішану модель, у якій процес ціни акції задається наступним чином:

$$X_t = X_0 \exp\left\{mt + \delta\left(B_t + \sigma B_t^H\right)\right\}, \tag{1}$$

де $X_0 > 0$, $m \in \mathbf{R}$, $\delta \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $\sigma > 0$ – деякі сталі.

Надалі у статті ми розглядатимемо тільки випадок, коли $H \in (\frac{3}{4}; 1]$.

Якщо $m = 0$, то, згідно з теоремою 4.2 з [2] процес $M_t^{H,\sigma} = B_t + \sigma B_t^H$ є еквівалентним до деякого вінерівського процесу. Тоді з теореми 1 з [3] (див. також теорему 4.15 з [2]) випливає, що існує єдине дійснозначне ядро Вольтерра

$$h \in \mathbb{L}_2(0 \leq s < t \leq T)$$

таке, що

$$W_t = M_t^{H,\sigma} - \int_0^t \int_0^s h\,(s,u)\, M_u^{H,\sigma}\, ds$$

є вінерівським процесом на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Більше того,

$$M_t^{H,\sigma} = W_t - \int_0^t \int_0^s r_\sigma\,(s,u)\; dW_u\, ds, \tag{2}$$

де W — вінерівський процес відносно міри P, $r_\sigma \in \mathbb{L}_2(0 \leq s < t \leq T)$ — обернене резольвентне ядро для h, що є єдиним розв'язком рівняння

$$r_\sigma\,(t,s) + \int_0^s r_\sigma\,(t,x)\, r_\sigma\,(s,x)\; dx = \sigma^2 H\,(2H-1)\cdot(t-s)^{2H-2}, \qquad 0 \leq s < t \leq T, \tag{3}$$

і для якого $\int_0^T \int_0^s (r_\sigma(s,u))^2\, du\, ds < \infty$.

Тепер, неважко перевірити, що "зсунутий процес" $(m/\sigma)t + B_t + \sigma B_t^H$ також є еквівалентним до вінерівського процесу. Для цього можна розглянути незалежні процеси $(m/\sigma)t + B_t$ та σB_t^H і “знищити” зсув окремо для процесу $(m/\sigma)t + B_t$. Тому процес $M_t^{H,\sigma}$ буде вінерівським відносно міри P^*, визначеної так:

$$\begin{aligned}\frac{dP^*}{dP} = \exp\Bigg(-\left(\frac{m}{\delta} + \frac{1}{2}\delta\right) W_t + \int_0^t \int_0^s r_\sigma(s,u)\, dW_u\, dW_s \\ - \frac{1}{2}\int_0^t \left(\frac{m}{\delta} + \frac{1}{2}\delta - \int_0^s r_\sigma\left(s,u\right)\, dW_u\right)^2 ds\Bigg).\end{aligned} \tag{4}$$

Зауваження 1.1. Процес $M_t^{H,\sigma}$, а значить, і X_t, не буде семімартингалом відносно фільтрації, породженої сукупністю процесів B_t та B_t^H, однак буде семімартингалом відносно натуральної фільтрації.

2. Застосування підходу Феллмера-Лейкерта для змішаної моделі процесу ціни акції на повному безарбітражному ринку

2.1. **Максимізація ймовірності успіху.** Нагадаємо, що задача квантильного хеджування за умови $\nu < H_0$ полягає в тому, щоб максимізувати ймовірність $\{V_T \geq H\}$ по всіх самофінансовних стратегіях ξ з початковим капіталом $V_0 \leq \nu$ і допустимих у тому сенсі, що процес капіталу

$$V_t = V_0 + \int_0^t \xi_s\, dX_s, \tag{5}$$

що відповідає стратегії ξ, є невід'ємним м.н. для всіх $0 \leq t \leq T$. Загальний семімартингальний підхід до розв'язку цієї задачі з застосуванням леми Неймана–Пірсона міститься в статті [4], а в роботі [1] модифікований підхід Феллмера–Лейкерта застосовано до змішаної броунівської–дробово-броунівської моделі. Опишемо коротко схему розв'язання для загального випадку і її особливості при застосуванні до змішаної моделі.

Назвемо множину $A = \{V_T \geq H\}$ множиною успіху, яка відповідає обраній стратегії. Введемо міру Q^* таку, що

$$\frac{dQ^*}{dP^*} = \frac{H}{H_0}. \tag{6}$$

Задача оптимізації полягає в максимізації ймовірності $\mathsf{P}(A)$ по всіх $\mathcal{F}_T$-вимірних множинах A, які задовольняють умову

$$\frac{V_0}{H_0} = \frac{E_{P^*}\left(HI_A\right)}{H_0} = E_{Q^*}\left(I_A\right) \leq \frac{\nu}{H_0}. \tag{7}$$

Нехай

$$\bar{a} = \inf\left\{a \colon Q^*\left(\frac{dP}{dP^*} > a \cdot H\right) \leq \frac{\nu}{H_0}\right\}.$$

Припустимо, що

$$Q^*\left(\frac{dP}{dP^*} = \bar{a} \cdot H\right) = 0. \tag{8}$$

За лемою Неймана–Пірсона оптимальною є множина

$$A = A_{\bar{a}} := \left\{\frac{dP}{dP^*} > \bar{a} \cdot H\right\}. \tag{9}$$

За вибором $\bar{a}$ для початкового капіталу ν існує стратегія, яка дозволяє виконати з ймовірністю 1 вимогу $\bar{H} = HI_{A_{\bar{a}}}$, а отже з ймовірністю $\mathsf{P}(A_{\bar{a}})$ виконати вимогу H. Ця стратегія максимізує ймовірність $\mathsf{P}(V_T \geq H)$.

2.2. **Про обчислення максимальної ймовірності успіху.** Розглянемо одну з найпростіших ситуацію, коли вимога H залежить лише від ціни акції в кінцевий момент часу, тобто $H = H_T = f(X_T)$. У термінах леми Неймана–Пірсона задача полягає у знаходженні сталої $\bar{a}$ такої, що ймовірність P множини

$$A = A_a := \left\{ \frac{dP}{dP^*} > a \cdot H \right\}$$

є максимальною, при умові, що $Q^*(A) \le \nu / H_0$. Враховуючи вигляд (4) щільності, множина A набуває вигляду

$$\begin{aligned} A = \Bigg\{ \exp\Bigg(\left(\frac{m}{\delta} + \frac{1}{2}\delta \right) W_T - \int_0^T \int_0^s r_\sigma\,(s,u)\; dW_u\, dW_s \\ + \frac{1}{2} \int_0^T \left(\frac{m}{\delta} + \frac{1}{2}\delta - \int_0^s r_\sigma(s,u)\, dW_u \right)^2 ds \Bigg) > a \cdot f\,(X_T) \Bigg\}. \end{aligned} \tag{10}$$

Ця множина залежить від значень процесу $W = \{W_t, t \ge 0\}$ на всьому проміжку $[0,T]$, а тому ймовірності $Q^*(A)$ та $\mathsf{P}(A)$ важко обчислити, що не дозволяє безпосередньо використати підхід з [4] навіть для найпростіших вимог $f(X_T)$ (наприклад, Європейського опціону купівлі).

Тим не менше, не обчислюючи самої імовірності $\mathsf{P}(A)$, дослідимо питання її стійкості, якщо параметри m, δ, σ неперервно змінюються.

2.3. **Властивості ядра r_σ.** Спочатку розглянемо деякі додаткові властивості ядра r_σ, що задовольняє умову (3), які стануть в нагоді при доведенні граничних теорем про стійкість $\mathsf{P}(A)$.

Лема 2.1. *Ядро r_σ задовольняє нерівність*

$$|r_\sigma(t,s)| < \sigma^2 H(2H-1)(t-s)^{2H-2} + C_{T,H,\sigma}, \tag{11}$$

де

$$C_{T,H,\sigma} = 2H^2(2H-1)^2 \frac{T^{4H-3}}{4H-3} \sigma^4 \exp(2C_{T,\sigma}),$$

$$C_{T,\sigma} = \int_0^T \int_0^s (r_\sigma(s,u))^2\, du\, ds < \infty.$$

Доведення. У лемі 2.2 з [7] показано, що $\int_0^s r_\sigma^2(t,x)\,dx \le C_{T,H,\sigma}$, $0 \le s \le t \le T$. Тому

$$\left| \int_0^s r_\sigma(t,x) r_\sigma(s,x)\, dx \right| \le \sqrt{\int_0^s r_\sigma^2(t,x)\, dx \int_0^s r_\sigma^2(s,x)\, dx} \le C_{T,H,\sigma}. \tag{12}$$

Доведення безпосередньо випливає з (3) та (12). □

Лема 2.2. *Ядро r_σ є неперервним за першим аргументом.*

Доведення. Нехай $t' \to t$. Позначимо $\varepsilon = (t-s)/2$. Оскільки $t > s$, то не обмежуючи загальності можна вважати, що $t' > s + \varepsilon$.

З (3) випливає, що

$$\begin{aligned} |r_\sigma(t',s) - r_\sigma(t,s)| \le H(2H-1)\sigma^2 \left| (t'-s)^{2H-2} - (t-s)^{2H-2} \right| \\ + \int_0^s |r_\sigma(s,x)| \cdot |r_\sigma(t',x) - r_\sigma(t,x)|\; dx. \end{aligned} \tag{13}$$

Для оцінки першого доданка у правій частині нерівності (13) скористаємося теоремою Лагранжа, врахувавши, що $\varepsilon < \min(t'-s, t-s)$:

$$\left| (t'-s)^{2H-2} - (t-s)^{2H-2} \right| \le (t'-t) \cdot (2-2H) \cdot \varepsilon^{2H-3}, \tag{14}$$

отже,

$$H(2H-1)\sigma^2 \left|(t'-s)^{2H-2} - (t-s)^{2H-2}\right| \le A_{H,\sigma,\varepsilon} \cdot |t'-t|,$$

де

$$A_{H,\sigma,\varepsilon} = H(2H-1)\sigma^2 (2-2H) \cdot \varepsilon^{2H-3}.$$

Позначимо $\Delta_\sigma(s,t',t) = |r_\sigma(t',s) - r_\sigma(t,s)|$, тоді нерівність (13) можна записати у вигляді

$$\Delta_\sigma(s,t',t) \le A_{H,\sigma,\varepsilon} \cdot |t'-t| + \int_0^s |r_\sigma(s,x)| \cdot \Delta_\sigma(x,t',t)\,dx, \tag{15}$$

звідки

$$\begin{aligned}
(\Delta_\sigma(s,t',t))^2 &\le 2A^2_{H,\sigma,\varepsilon} \cdot |t'-t|^2 + 2\left(\int_0^s |r_\sigma(s,x)| \cdot \Delta_\sigma(x,t',t)\,dx\right)^2 \\
&\le 2A^2_{H,\sigma,\varepsilon} \cdot |t'-t|^2 + 2\int_0^s r^2_\sigma(s,x)\,dx \cdot \int_0^s (\Delta_\sigma(x,t',t))^2\,dx \\
&\le 2A^2_{H,\sigma,\varepsilon} \cdot |t'-t|^2 + 2C_{T,H,\sigma} \cdot \int_0^s (\Delta_\sigma(x,t',t))^2\,dx.
\end{aligned}$$

Нарешті, за нерівністю Гроноулла

$$\begin{aligned}
(\Delta_\sigma(s,t',t))^2 &\le 2A^2_{H,\sigma,\varepsilon} \cdot |t'-t|^2 \cdot \exp(2C_{T,H,\sigma} \cdot s) \\
&\le 2A^2_{H,\sigma,\varepsilon} \cdot |t'-t|^2 \cdot \exp(2C_{T,H,\sigma} \cdot T).
\end{aligned} \tag{16}$$

З нерівності (16) випливає неперервність функції $r_\sigma(t,s)$ за першим аргументом. □

Зауваження 2.1. З оцінки (16) випливає, що функція $r_\sigma(t,s)$ є рівномірно неперервною за першим аргументом.

Лема 2.3. *Ядро r_σ є неперервним за другим аргументом.*

Доведення. Спочатку доведемо неперервність справа. Нехай $s' \to s+$, причому

$$s < s' < t.$$

Тоді

$$\begin{aligned}
r_\sigma(t,s') - r_\sigma(t,s) = H(2H-1)\sigma^2 &\left|(t-s')^{2H-2} - (t-s)^{2H-2}\right| \\
&- \int_0^s r_\sigma(t,x) \cdot (r_\sigma(s',x) - r_\sigma(s,x))\,dx \\
&- \int_s^{s'} r_\sigma(t,x) r_\sigma(s',x)\,dx.
\end{aligned} \tag{17}$$

Звідси

$$\begin{aligned}
(r_\sigma(t,s') - r_\sigma(t,s))^2 \le 3H^2(2H-1)^2\sigma^4 &\left((t-s')^{2H-2} - (t-s)^{2H-2}\right)^2 \\
&+ 3\int_0^s r^2_\sigma(t,x)\,dx \cdot \int_0^s (r_\sigma(s',x) - r_\sigma(s,x))^2\,dx \\
&+ 3\int_s^{s'} r^2_\sigma(t,x)\,dx \cdot \int_s^{s'} r^2_\sigma(s',x)\,dx.
\end{aligned} \tag{18}$$

Перший доданок у правій частині рівності (18) прямує до 0 при $s' \to s+$. Оцінимо другий. З леми 2.2 випливає, що $r_\sigma(s',x) - r_\sigma(s,x) \to 0$, $s' \to s+$. Щоб застосувати теорему Лебега про мажоровану збіжність, знайдемо інтегровну мажоранту:

$$\begin{aligned}
(r_\sigma(s',x) - r_\sigma(s,x))^2 &\le 2H^2(2H-1)^2\sigma^4 \left((s'-x)^{2H-2} - (s-x)^{2H-2}\right)^2 \\
&\quad + 2\int_0^x r^2_\sigma(x,y)\,dy \cdot \int_0^x (r_\sigma(s',y) - r_\sigma(s,y))^2\,dy \\
&\le 2H^2(2H-1)^2\sigma^4 \cdot (s-x)^{4H-4} + 8C^2_{T,H,\sigma},
\end{aligned} \tag{19}$$

оскільки

$$\int_0^x r_\sigma^2(x,y)dy \le C_{T,H,\sigma}$$

та

$$\begin{aligned}\int_0^x \left(r_\sigma(s',y) - r_\sigma(s,y)\right)^2\, dy &\le 2\int_0^x r_\sigma^2(s',y)\,dy + 2\int_0^x r_\sigma^2(s,y)\,dy \\ &\le 2\int_0^{s'} r_\sigma^2(s',y)\,dy + 2\int_0^s r_\sigma^2(s,y)\,dy \le 4C_{T,H,\sigma}.\end{aligned}$$

З теореми Лебега про мажоровану збіжність випливає, що

$$\int_0^s \left(r_\sigma(s',x) - r_\sigma(s,x)\right)^2\, dx \to 0, \qquad s' \to s+,$$

а отже, другий доданок прямує до нуля при $s' \to s+$. Оцінимо третій доданок правої частини нерівності (18), використовуючи рівняння (3):

$$\begin{aligned}\int_s^{s'} r_\sigma^2(s',x)dx &\le 2\int_s^{s'} H^2(2H-1)^2\sigma^4(s'-x)^{4H-4}\,dx \\ &\quad + 2\int_s^{s'}\left(\int_0^x r_\sigma^2(x,y)\,dy\right)\cdot\left(\int_0^x r_\sigma^2(s',y)\,dy\right)dx \\ &\le 2H^2(2H-1)^2\sigma^4\cdot\frac{(s'-s)^{4H-3}}{4H-3} + 2C_{T,H,\sigma}^2(s'-s) \to 0, \\ &\qquad s' \to s+,\end{aligned} \tag{20}$$

оскільки $H > \frac{3}{4}$. Отже, неперервність справа доведено.

Доведемо неперервність ядра r_σ за другим аргументом зліва. При $s' \to s-$ рівність (17) набуде вигляду:

$$\begin{aligned}r_\sigma(t,s') - r_\sigma(t,s) &= H(2H-1)\sigma^2\left|(t-s')^{2H-2} - (t-s)^{2H-2}\right| \\ &\quad - \int_0^s \mathbf{1}_{\{x<s'\}}\cdot r_\sigma(t,x)\cdot\left(r_\sigma(s',x) - r_\sigma(s,x)\right)\,dx \\ &\quad + \int_{s'}^s r_\sigma(t,x)r_\sigma(s,x)\,dx.\end{aligned} \tag{21}$$

Відмінність рівності (21) від рівності (17) полягає у другому доданку правої частини, а доведення того, що перший та третій доданки правої частини рівності (21) прямують до нуля при $s' \to s-$, проводиться аналогічно. Тому доведемо збіжність до нуля другого доданка при $s' \to s-$. Зафіксуємо $\theta \in (0,s)$ і подамо другий доданок правої частини як суму

$$\begin{aligned}&\int_0^s \mathbf{1}_{\{x<s'\}}\cdot r_\sigma(t,x)\cdot\left(r_\sigma(s',x) - r_\sigma(s,x)\right)\,dx \\ &\quad = \int_0^{s-\theta} \mathbf{1}_{\{x<s'\}}\cdot r_\sigma(t,x)\cdot\left(r_\sigma(s',x) - r_\sigma(s,x)\right)\,dx \\ &\qquad + \int_{s-\theta}^s \mathbf{1}_{\{x<s'\}}\cdot r_\sigma(t,x)\cdot\left(r_\sigma(s',x) - r_\sigma(s,x)\right)\,dx.\end{aligned} \tag{22}$$

Покажемо, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна вибрати $\theta \in (0, s)$ таким, щоб кожен з отриманих доданків був меншим за $\varepsilon/2$. Оскільки

$$\begin{aligned}\left(\int_{s-\theta}^{s} \mathbf{1}_{\{x<s'\}} \cdot r_\sigma(t,x) \cdot (r_\sigma(s',x) - r_\sigma(s,x))\, dx\right)^2 \\ \le \int_{s-\theta}^{s} r_\sigma^2(t,x)\, dx \cdot \int_{s-\theta}^{s} \mathbf{1}_{\{x<s'\}} \left(2r_\sigma^2(s',x) + 2r_\sigma^2(s,x)\right) dx \\ \le \int_{s-\theta}^{s} r_\sigma^2(t,x)\, dx \cdot \left(2\int_0^{s'} r_\sigma^2(s',x)\, dx + 2\int_0^{s} r_\sigma^2(s,x)\, dx\right) \\ \le \int_{s-\theta}^{s} r_\sigma^2(t,x)\, dx \cdot 4C_{T,H,\sigma},\end{aligned} \tag{23}$$

то число θ можна вибрати так, щоб нерівність

$$\int_{s-\theta}^{s} r_\sigma^2(t,x)\, dx \cdot 4C_{T,H,\sigma} < \frac{\varepsilon^2}{4}$$

виконувалася. Для довільного $\theta \in (0, s)$ вираз

$$\int_0^{s-\theta} \mathbf{1}_{\{x<s'\}} \cdot r_\sigma(t,x) \cdot (r_\sigma(s',x) - r_\sigma(s,x))\, dx$$

прямуватиме до нуля при $s' \to s-$, а отже стане меншим за $\varepsilon/2$, бо підінтегральний вираз прямує до нуля, і при $s' > s - \theta/2$ буде виконуватися $s' - x > \theta/2$, а тому інтегровна мажоранта для застосування теореми Лебега буде наступною:

$$\begin{aligned}(r_\sigma(s',x) - r_\sigma(s,x))^2 \le 2H^2(2H-1)^2\sigma^4\left((s'-x)^{2H-2} - (s-x)^{2H-2}\right)^2 \\ + 2\int_0^x r_\sigma^2(x,y)\, dy \cdot \int_0^x (r_\sigma(s',y) - r_\sigma(s,y))^2\, dy \\ \le 2H^2(2H-1)^2\sigma^4 \cdot \left(\frac{\theta}{2}\right)^{4H-4} + 8C_{T,H,\sigma}^2,\end{aligned} \tag{24}$$

Отже, неперервність ядра r_σ за другим аргументом доведено. □

Лема 2.4. *Ядро $r_\sigma = r_\sigma(t,s)$ є неперервним за σ при будь-яких $0 \le s < t < T$.*

Доведення. Для фіксованих $0 \le s < t < T$ покажемо, що $r_{\sigma_n}(t,s) \to r_\sigma(t,s)$ при $\sigma_n \to \sigma$. Покладемо $\alpha = H - \frac{1}{2}$. Оскільки для достатньо великих n виконуватиметься нерівність $t(\sigma_n/\sigma)^{1/\alpha} \le T$, то за властивістю самоподібності, яка доведена в лемі 2.1 з [7] і полягає в тому, що $r_\sigma(t,s) = \sigma^{1/\alpha} r_1\big(\sigma^{1/\alpha}t, \sigma^{1/\alpha}s\big)$ при $0 \le s < t \le T \wedge T\sigma^{-1/\alpha}$, виконується рівність

$$r_{\sigma_n}(t,s) = \left(\frac{\sigma_n}{\sigma}\right)^{1/\alpha} r_\sigma\left(t\left(\frac{\sigma_n}{\sigma}\right)^{1/\alpha}, s\left(\frac{\sigma_n}{\sigma}\right)^{1/\alpha}\right).$$

Зауважимо, що $(\sigma_n/\sigma)^{1/\alpha} \to 1$ при $n \to \infty$, тому достатньо довести, що

$$r_\sigma\left(t\left(\frac{\sigma_n}{\sigma}\right)^{1/\alpha}, s\left(\frac{\sigma_n}{\sigma}\right)^{1/\alpha}\right) \to r_\sigma(t,s), \qquad \sigma_n \to \sigma.$$

Маємо:

$$\begin{aligned}\left|r_\sigma(t,s) - r_\sigma\left(t\left(\frac{\sigma_n}{\sigma}\right)^{1/\alpha}, s\left(\frac{\sigma_n}{\sigma}\right)^{1/\alpha}\right)\right| \\ \le \left|r_\sigma(t,s) - r_\sigma\left(t, s\left(\frac{\sigma_n}{\sigma}\right)^{1/\alpha}\right)\right| \\ + \left|r_\sigma\left(t, s\left(\frac{\sigma_n}{\sigma}\right)^{1/\alpha}\right) - r_\sigma\left(t\left(\frac{\sigma_n}{\sigma}\right)^{1/\alpha}, s\left(\frac{\sigma_n}{\sigma}\right)^{1/\alpha}\right)\right|.\end{aligned} \tag{25}$$

За лемою 2.3 ядро $r_\sigma(t,s)$ є неперервним за другим аргументом, тому

$$\left| r_\sigma(t,s) - r_\sigma\left(t, s\left(\frac{\sigma_n}{\sigma}\right)^{1/\alpha}\right)\right| \to 0, \qquad n\to\infty.$$

Зауважимо, що другий доданок у правій частині нерівності (25) можна записати як

$$\Delta_\sigma\left(s\left(\frac{\sigma_n}{\sigma}\right)^{1/\alpha}, t\left(\frac{\sigma_n}{\sigma}\right)^{1/\alpha}, t\right),$$

а в лемі (2.2) нерівність (16) виконується при всіх s, t', t таких, що $\varepsilon < \min(t-s, t'-s)$.

Оскільки $(\sigma_n/\sigma)^{1/\alpha} \to 1$, $n\to\infty$, то для достатньо великих n буде справджуватися нерівність

$$\varepsilon = \frac{t-s}{2} < \min\left(t - s\left(\frac{\sigma_n}{\sigma}\right)^{1/\alpha}, t\left(\frac{\sigma_n}{\sigma}\right)^{1/\alpha} - s\left(\frac{\sigma_n}{\sigma}\right)^{1/\alpha}\right),$$

тому з нерівності (16) і зауваження 2.1 випливає, що

$$\Delta_\sigma\left(s\left(\frac{\sigma_n}{\sigma}\right)^{1/\alpha}, t\left(\frac{\sigma_n}{\sigma}\right)^{1/\alpha}, t\right) \to 0, \qquad n\to\infty,$$

що й означає те, що

$$\left| r_\sigma\left(t, s\left(\frac{\sigma_n}{\sigma}\right)^{1/\alpha}\right) - r_\sigma\left(t\left(\frac{\sigma_n}{\sigma}\right)^{1/\alpha}, s\left(\frac{\sigma_n}{\sigma}\right)^{1/\alpha}\right)\right| \to 0, \qquad n\to\infty.$$

2.4. **Максимальні оцінки для гауссівських випадкових процесів.** Розглянемо метод оцінки супремумів гауссівських випадкових процесів, який буде використаний при доведенні граничних теорем.

Нехай

$$U(x) = \exp\left\{\frac{x^2}{2}\right\} - 1. \tag{26}$$

Означення 2.1. Простором Орліча $L_U(\Omega)$, що породжується функцією $U(x)$, називається простір випадкових величин ξ таких, що існує стала $C_\xi > 0$, для якої

$$\mathsf{E}\, U\left(\frac{\xi}{C_\xi}\right) < \infty.$$

Теорема 2.1 ([5])**.** *Простір Орліча є банаховим відносно норми Люксембурга*

$$\|\xi\|_U = \inf\left\{r>0\colon\ \mathsf{E}\exp\left\{\frac{\xi^2}{r^2}\right\} \le 2\right\}.$$

Зокрема, якщо $\xi = N(0,\sigma^2)$, то ξ належить простору Орліча $L_U(\Omega)$, де $U(x)$ визначається за допомогою (26), то $\|\xi\|_U = 2\sigma/\sqrt{3}$.

Твердження 2.1 (Лема 2.3.3 з [5])**.** Якщо $\xi \in L_U(\Omega)$, де U визначено за допомогою (26), то $\mathsf{E}\,|\xi| \le \sqrt{2}\|\xi\|_U$.

Нехай $\mathfrak{X} = \{\mathfrak{X}(t), t\in\mathfrak{T}\}$ – випадковий процес з простору $L_U(\Omega)$, де U визначено за допомогою (26), $\rho(t,s) = \|\mathfrak{X}(t) - \mathfrak{X}(s)\|_U$, $\mathfrak{X}(t)$ – сепарабельний на $(\mathfrak{T},\rho)$, тоді (за теоремою 3.3.1 з [5]) виконуватиметься

$$\|\sup_{t\in\mathfrak{T}}\mathfrak{X}(t)\|_U \le \inf_{t\in\mathfrak{T}}\|\mathfrak{X}(t)\|_U + \frac{1}{\theta(1-\theta)}\int_0^{\varepsilon_0\theta} \varkappa(N(\varepsilon))\,d\varepsilon, \tag{27}$$

(якщо інтеграл збігається), де θ — будь-яке з інтервалу $(0,1)$, $\varepsilon_0 = \sup_{t,s\in\mathfrak{T}}\rho(t,s)$, $N(u)$ — метрична масивність $(\mathfrak{T},\rho)$, тобто найменше число куль радіусу u, що покривають $(\mathfrak{T},\rho)$, $\varkappa(n)$ — мажоруюча характеристика (у випадку (26)

$$\varkappa(n) = e\,(2\ln(n+1))^{1/2},$$

див. приклад 2.3.2 з [5]).

Нехай тепер $\mathfrak{T} = [a, b]$ та $\sup_{|t-s|\le h} \|\mathfrak{X}(t) - \mathfrak{X}(s)\| \le \sigma(h)$, де $\sigma(h)$ — неперервна монотонно зростаюча функція, $\sigma(0) = 0$. Оскільки

$$N(u) \le \frac{b-a}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1,$$

то

$$\begin{aligned} \|\sup_{t\in T} \mathfrak{X}(t)\|_U &\le \inf_{t\in T} \|\mathfrak{X}(t)\|_U + \frac{1}{\theta(1-\theta)} \int_0^{\varepsilon_0\theta} \varkappa\left(\frac{b-a}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1\right) du \\ &= \inf_{t\in T} \|\mathfrak{X}(t)\|_U + \frac{e\sqrt{2}}{\theta(1-\theta)} \int_0^{\varepsilon_0\theta} \left(\ln\left(\frac{b-a}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 2\right)\right)^{1/2} du. \end{aligned} \tag{28}$$

Останній інтеграл збігається зокрема у випадку, коли

$$\sigma(h) = Ch^{\rho} \tag{29}$$

для деякого $\rho > 0$.

2.5. **Оцінки приросту інтеграла з ядром.** Нехай $\{W(t), t \ge 0\}$ — довільний вінерівський процес. Очевидно, для кожного $t > 0$ існує інтеграл $\int_0^t r_\sigma(t,u)\,dW(u)$ і утворює гауссівський процес по t.

Лема 2.5. *Нехай $H > \frac{3}{4}$. Для гауссівського процесу $Z(t) = \int_0^t r_\sigma(t,u)\,dW(u)$ виконується нерівність*

$$\mathsf{E}\,|Z(t) - Z(s)|^2 < C \cdot |t-s|^{2H-3/2}. \tag{30}$$

Доведення. Не обмежуючи загальності, припустимо, що $t > s$. Тоді в силу незалежності і центрованості випадкових величин $\int_0^s (r_\sigma(t,u) - r_\sigma(s,u))\; dW(u)$ і $\int_s^t r_\sigma(t,u)\,dW(u)$ маємо рівності

$$\mathsf{E}\,|Z(t) - Z(s)|^2 = \int_0^s (r_\sigma(t,u) - r_\sigma(s,u))^2\; du + \int_s^t r_\sigma^2(t,u)\,du.$$

Оцінимо кожен з отриманих доданків окремо. (Надалі в доведенні цієї леми додатні сталі будемо позначати C, не вказуючи точні значення для тих сталих, для яких це не є важливим.) Для оцінки другого доданку використаємо нерівність (11):

$$|r_\sigma(t,u)| < C \cdot (t-u)^{2H-2} + C \le C \cdot (t-u)^{2H-2}.$$

Тоді

$$\int_s^t r_\sigma^2(t,u)\,du \le \int_s^t C(t-u)^{4H-4}\,du = C \cdot (t-s)^{4H-3}.$$

Нагадаємо, що $H \in (\frac{3}{4}, 1)$, тому $4H - 3 > 0$.

Оцінимо перший доданок $\int_0^s (r_\sigma(t,u) - r_\sigma(s,u))^2\,du$. Використовуючи теорему Лагранжа, запишемо

$$\left|(s-u)^{2H-2} - (t-u)^{2H-2}\right| \le (2-2H)\,(t-s)\,(s-u)^{2H-3}.$$

З іншого боку,

$$\left|(s-u)^{2H-2} - (t-u)^{2H-2}\right| \le (s-u)^{2H-2}.$$

Тому для будь-якого $\gamma \in (0,1)$ виконується

$$\begin{aligned} \left|(s-u)^{2H-2} - (t-u)^{2H-2}\right| &\le C(s-u)^{(2H-2)\gamma}(s-u)^{(2H-3)(1-\gamma)}(t-s)^{1-\gamma} \\ &= C(t-s)^{1-\gamma}(s-u)^{2H-3+\gamma}. \end{aligned} \tag{31}$$

Виберемо $\gamma = \frac{7}{4} - H$; оскільки $H \in (\frac{3}{4}, 1)$, то одночасно $\gamma \in (0,1)$ і $2H - 3 + \gamma > -\frac{1}{2}$.

Використовуючи нерівність (3), подібно доведенню леми 2.2 отримаємо:

$$\begin{aligned}(\Delta_\sigma(u,t,s))^2 &\le 2\left(H(2H-1)\sigma^2\left|(t-u)^{2H-2}-(s-u)^{2H-2}\right|\right)^2\\&+2C_{T,H,\sigma}\int_0^u \Delta_\sigma^2(x,t,s)\,dx.\end{aligned}\tag{32}$$

З нерівності (31) для всіх $v\in(0,u]$ випливає:

$$\begin{aligned}\left|(s-v)^{2H-2}-(t-v)^{2H-2}\right| &\le C(t-s)^{1-\gamma}(s-v)^{2H-3+\gamma}\\&\le C(t-s)^{1-\gamma}(s-u)^{2H-3+\gamma}.\end{aligned}\tag{33}$$

З нерівностей (32) та (33) отримаємо:

$$\begin{aligned}(\Delta_\sigma(v,t,s))^2 &\le 2\left(H(2H-1)\sigma^2\left|(t-v)^{2H-2}-(s-v)^{2H-2}\right|\right)^2\\&+2C_{T,H,\sigma}\int_0^v \Delta_\sigma^2(x,t,s)\,dx\\&\le C(t-s)^{2-2\gamma}(s-u)^{4H-6+2\gamma}+2C_{T,H,\sigma}\int_0^v \Delta_\sigma^2(x,t,s)\,dx.\end{aligned}$$

Зауважимо, що в останній нерівності вираз $C(t-s)^{1-\gamma}(s-u)^{2H-3+\gamma}$ не залежить від v, тому за нерівністю Гронуолла матимемо:

$$(\Delta_\sigma(v,t,s))^2 \le C(t-s)^{2-2\gamma}(s-u)^{4H-6+2\gamma}.\tag{34}$$

Оскільки нерівність (34) виконується для всіх $v\in(0,u]$, то при $v=u$ отримаємо:

$$(\Delta_\sigma(u,t,s))^2 \le C(t-s)^{2-2\gamma}(s-u)^{4H-6+2\gamma}.\tag{35}$$

Зауважимо, що $4H-6+2\gamma>-1$. Тому

$$\begin{aligned}\int_0^s (r_\sigma(t,u)-r_\sigma(s,u))^2\,du &\le \int_0^s C(t-s)^{2-2\gamma}(s-u)^{4H-6+2\gamma}du\\&\le C(t-s)^{2-2\gamma}.\end{aligned}$$

Отже,

$$\mathsf{E}\,|Z(t)-Z(s)|^2 < C(t-s)^{4H-3}+C(t-s)^{2-2\gamma} < C|t-s|^\beta,$$

де $\beta=\min\{4H-3;2-2\gamma\}=2H-\frac{3}{2}$, $C>0$ — деяка стала. □

3. Збіжність за ймовірністю множин з максимальною ймовірністю успіху

Розглянемо випадок, коли параметри m, δ, σ процесу X_t змінюються, тобто

$$X_t^n = X_0\exp\left\{m_n t+\delta_n\left(B_t+\sigma_n B_t^H\right)\right\},\qquad n\ge 1.\tag{36}$$

Тоді, взагалі кажучи, буде змінюватися і вінерівський процес із зображення (2), і множина (10) максимальної імовірності успіху матиме вигляд

$$\begin{aligned}A_n=\Bigg\{\exp\Bigg(&\left(\frac{m_n}{\delta_n}+\frac{1}{2}\delta_n\right)W_T^n-\int_0^T\int_0^s r_{\sigma_n}(s,u)\,dW_u^n\,dW_s^n\\&+\frac{1}{2}\int_0^T\left(\frac{m_n}{\delta_n}+\frac{1}{2}\delta_n-\int_0^s r_{\sigma_n}(s,u)\,dW_u^n\right)^2ds\Bigg)>a\cdot f(X_T)\Bigg\}.\end{aligned}\tag{37}$$

Дослідимо питання збіжності за ймовірністю множин A_n при $n\to\infty$, за умови, що всі параметри збігаються до деяких граничних значень.

3.1. **Збіжність за ймовірністю множин A_n.** Для доведення збіжності за ймовірністю множин A_n скористаємося результатом з [6], але спочатку запровадимо деякі позначення. Нехай $\left(\Omega^n, \mathcal{F}^n, (\mathcal{F}^n_t)_{t\in[0,T]}, P^n\right)$ — послідовність стохастичних базисів. Зафіксуємо деяку зліченну та скрізь щільну на $[0,T]$ множину $\mathbf{T}$, причому $0 \in \mathbf{T}$.

Позначимо також $L_{\mathbf{T}}$ клас усіх послідовностей

$$\alpha_k = \{0 = t_{0k} < t_{1k} < \cdots < t_{l_k k} < T\}$$

скінченних розбиттів відрізка $[0,T]$, що задовольняють наступні умови:

(1) $\alpha_k \subseteq \alpha_{k+1} \subseteq \mathbf{T}$,

(2) для будь-якого $t \in \mathbf{T}$ існує $k(t)$ таке, що $t \in \alpha_k$ для $k > k(t)$.

Позначимо

$$\Delta_{ik} x := x(t_{i\,k}) - x(t_{i-1\,k}),$$
$$\omega_{ik} x = \sup_{t_{i-1\,k} \le s < t \le t_{i\,k}} |x(t) - x(s)|,$$
$$\mathcal{T}(\mathcal{F}^n) = \{0 \le \tau \le T,\ \tau - \mathcal{F}^n_\cdot \text{— момент зупинки}\}.$$

Символом "$\xrightarrow{d}$" будемо позначати слабку збіжність скінченновимірних розподілів відповідних процесів, символом "$\Rightarrow$" – слабку збіжність мір, що відповідають випадковим процесам.

Нехай

$$\{X_n(t), \mathcal{F}^n_t, t \in [0,T], n \in \mathbf{Z}_+\} = \left\{X^1_n(t), X^2_n(t), \ldots, X^d_n(t), \mathcal{F}^n_t, t \in [0,T], n \in \mathbf{Z}_+\right\}$$

— послідовність d-вимірних семімартингалів, компоненти яких допускають розклад

$$X^j_n(t) = X^j_n(0) + M^j_n(t) + B^j_n(t), \qquad 1 \le j \le d, \tag{38}$$

де $\{M^j_n(t), \mathcal{F}^n_t, t \in [0,T], n \in \mathbf{Z}_+\}$ — послідовність квадратично інтегровних мартингалів з неперервними траєкторіями, $\{B^j_n(t), t \in [0,T], n \in \mathbf{Z}_+\}$ — послідовність неперервних процесів обмеженої варіації. Нехай $\{\mu^j_n(t) := \langle M^j_n\rangle(t)$ — квадратичні характеристики відповідних мартингалів. Нехай також

$$\left\{\xi^j_n(t), \mathcal{F}^n_t, t \in [0,T], n \in \mathbf{Z}_+, 1 \le j \le d\right\}$$

— послідовність $\mathcal{F}^n_\cdot$-передбачуваних процесів, які задовольняють наступні умови

$$E^n \int_0^T (\xi^j_n)^2(t)\, d\mu^j_n(t) < \infty, \qquad \int_0^T \xi^j_n(t)\, dB^j_n(t) < \infty, \qquad P^n\text{-м.н.},\ n \in \mathbf{Z}_+,\ 1 \le j \le d.$$

Позначимо $\int_0^T (\xi_n(t), dX_n(t)) := \sum_{j=1}^d \int_0^T \xi^j_n(t)\, dX^j_n(t)$.

Сформулюємо теорему 5 з [8] у дещо спрощеному для нашого випадку вигляді.

Теорема 3.1. *Нехай* $\{X_n(t), \mathcal{F}^n_t, t \in [0,T], n \in \mathbf{Z}_+\}$ *– послідовність семімартингалів із розкладом* (38) *та виконуються наступні умови:*

(1) $(\xi_n(t), M_n(t), B_n(t), \mu_n(t)),\ t \in \mathbf{T} \xrightarrow{d} (\xi_0(t), M_0(t), B_0(t), \mu_0(t)),\ t \in \mathbf{T}$*;*

для всіх $1 \le j \le d$*:*

(2) $\sup_{n\ge 0} E^n \int_0^T (\xi^j_n)^2(s)\, d\mu^j_n(s) < \infty$*;*

(3) $\lim_{C\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P^n \left\{\sup_{0\le t\le T} |\xi^j_n(t)| \ge C\right\} = 0$*;*

(4) $\lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} E^n \sum_{i=1}^{l_k} \omega_{ik}\xi^j_n \omega_{ik} B^j_n = 0$*;*

(5)

$$\lim_{\delta\to 0} \limsup_{n\to\infty} P^n \left\{ \sup_{0\le t<t'\le t''<t+\delta\le T} \left(|B^j_n(t'') - B^j_n(t')| \wedge |B^j_n(t') - B^j_n(t)|\right) \ge b \right\} = 0,$$
$$b > 0;$$

(6) $\lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} E^n \sum_{i=1}^{l_k} \omega_{ik}\xi^j_n \omega_{ik} \mu^j_n = 0$*;*

(7) $\lim_{\delta\to 0}\limsup_{n\to\infty}\sup_{\sigma\in\mathcal{T}(\mathcal{F}^n)} E^n\big(\mu_n^j(\sigma+\delta)-\mu_n^j(\sigma)\big)=0.$

Тоді сім'я стохастичних інтегралів $\int_0^{\cdot}(\xi_n(s),dX_n(s))$ *слабко збігається:*

$$\int_0^{\cdot}(\xi_n(s),dX_n(s))\Rightarrow\int_0^{\cdot}(\xi_0(s),dX_0(s))\,,\qquad n\to\infty.$$

Теорема 3.2. *Якщо* $\lim_{n\to\infty}m_n=m$, $\lim_{n\to\infty}\delta_n=\delta$, $\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\sigma>0$, *то* $\mathsf{P}(A_n)\to\mathsf{P}(A)$ *при* $n\to\infty$.

Доведення. Для доведення збіжності за ймовірністю множин A_n скористаємося теоремою 3.1. В межах позначень цієї теореми ми можемо, наприклад, покласти

$$\xi_n^1(t)=\frac{m_n}{\delta_n}+\frac{1}{2}\delta_n,\qquad M_n^1(t)=W_t^n,\qquad \mu_n^1(t)=t,\qquad B_n^1(t)=0;$$

$$\xi_n^2(t)=\int_0^t r_{\sigma_n}(t,u)\,dW_u^n,\qquad M_n^2(t)=W_t^n,\qquad \mu_n^2(t)=t,\qquad B_n^2(t)=0;$$

$$\xi_n^3(t)=\left(\frac{m_n}{\delta_n}+\frac{1}{2}\delta_n-\int_0^t r_{\sigma_n}(t,u)dW_u^n\right)^2,\qquad B_n^3(t)=t.$$

Перевіримо послідовно виконання кожної з умов теореми 3.1.

Умова (1). Для перевірки слабкої збіжності скінченно-вимірних розподілів послідовності $\{(\xi_n^j(t),X_n^j(t),B_n^j(t),\mu_n^j(t)),1\le j\le 3\}$ достатньо довести збіжність відповідних характеристичних функцій, причому лише для двох процесів:

$$\int_0^t r_{\sigma_n}(t,u)\,dW_u^n\quad\text{та}\quad W_t^n.$$

Ці випадкові процеси мають спільний гауссівський розподіл, центровані, коваріаційна функція дорівнює

$$R(u,v)=\mathsf{E}\,W_u^n\int_0^v r_{\sigma_n}(v,u)\,dW_u^n=\int_0^{u\wedge v}r_{\sigma_n}(v,s)\,ds.$$

Доведемо, що $\int_0^{u\wedge v}r_{\sigma_n}(v,s)\,ds\to\int_0^{u\wedge v}r_{\sigma}(v,s)\,ds$, $n\to\infty$. За лемою 2.4 має місце поточкова збіжність $r_{\sigma_n}(v,s)\to r_\sigma(v,s)$ при $n\to\infty$.

Знайдемо інтегровну мажоранту. Існує таке $c>0$, що $\sigma_n<\sigma+c$ для всіх n. Тоді за нерівністю (11) матимемо:

$$\begin{aligned}|r_{\sigma_n}(v,s)|&<\sigma_n^2H(2H-1)(v-s)^{2H-2}+C_{T,H,\sigma_n}\\&\le(\sigma+c)^2H(2H-1)(v-s)^{2H-2}\\&\quad+2H^2(2H-1)^2\frac{T^{4H-3}}{4H-3}(\sigma+c)^4\exp(2C_{T,\sigma_n}).\end{aligned}\tag{39}$$

Покладемо, як і раніше, $\alpha=H-\frac{1}{2}>0$. Використовуючи властивість самоподібності для ядра r_σ, матимемо:

$$\begin{aligned}C_{T,\sigma_n}&=\int_0^T\int_0^s(r_{\sigma_n}(s,u))^2\,du\,ds\\&\le\int_0^{T(\sigma_n/(\sigma+c))^{1/\alpha}}\int_0^{s(\sigma_n/(\sigma+c))^{1/\alpha}}r_{\sigma+c}^2(s,u)\,du\,ds\\&\le\int_0^T\int_0^s r_{\sigma+c}^2(s,u)\,du\,ds<\infty.\end{aligned}\tag{40}$$

Оскільки $2H-2>-\frac{1}{2}$, то нерівність (39) задає інтегровну мажоранту. Тому за теоремою Лебега про мажоровану збіжність

$$\int_0^{u\wedge v}r_{\sigma_n}(v,s)\,ds\to\int_0^{u\wedge v}r_\sigma(v,s)\,ds,\qquad n\to\infty.$$

Отже, умова (1) теореми 3.1 виконується.

Умова (2). Спочатку перевіримо виконання умови (2) для $\{\xi_n^2\}$.

$$\begin{aligned}\sup_{n\geq 0} E^n \int_0^t \left(\int_0^s r_{\sigma_n}(s,u)\, dW_u^n\right)^2 ds &= \sup_{n\geq 0}\int_0^t\int_0^s r_{\sigma_n}^2(s,u)\, du\, ds \\ \leq \sup_{n\geq 0}\int_0^{t\left(\frac{\sigma_n}{\sigma+c}\right)^{1/\alpha}}\int_0^{s\left(\frac{\sigma_n}{\sigma+c}\right)^{1/\alpha}} & r_{\sigma+c}^2(s,u)\, du\, ds \leq \int_0^t\int_0^s r_{\sigma+c}^2(s,u)\, du\, ds < \infty.\end{aligned}$$

Для $\{\xi_n^3\}$ умова (2), з урахуванням попередніх обчислень, набуває вигляду

$$\sup_{n\geq 0} E^n \int_0^t \left(\frac{m_n}{\delta_n} + \frac{1}{2}\delta_n\right)^2 ds < \infty$$

для $t \leq T$, що очевидно виконується. Для $\{\xi_n^1\}$ виконання цієї умови також є очевидним, оскільки $\mu_n^3 = 0$.

Умова (3). Спочатку перевіримо виконання цієї умови для $\{\xi_n^2\}$. За наслідком 2 на стор. 143 з [6] маємо:

$$\forall c \geq 4\sqrt{2}D\left(T, \frac{\theta}{2}\right): \quad \mathsf{P}\left\{\sup_{t\in[0,T]} \xi_n^2(t) > c\right\} \leq 1 - \Phi\left(\frac{c - 4\sqrt{2}D\left(T, \frac{\theta}{2}\right)}{\theta}\right), \tag{41}$$

де $D(T,\theta/2) = \int_0^{\theta/2} (\ln(T/u))^{1/2}\, du$ — інтеграл Дадлі, $\theta^2 = \sup_{t\in[0,T]} \operatorname{Var} \xi_n^2(t)$, Φ — функція стандартного нормального розподілу.

Для застосування даного наслідку необхідно показати, що $\sup_{t\in[0,T]} \operatorname{Var} \xi_n^2(t)$ є скінченним:

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,T]} \operatorname{Var} \xi_n^2(t) &= \sup_{t\in[0,T]} \operatorname{Var} \int_0^t r_{\sigma_n}(t,u)\, dW_u^n = \sup_{t\in[0,T]} \mathsf{E}\left(\int_0^t r_{\sigma_n}(t,u)\, dW_u^n\right)^2 \\ &= \sup_{t\in[0,T]}\int_0^t r_{\sigma_n}^2(t,u)\, du \\ &\leq C_{H,T}\cdot {\sigma_n}^4 \exp\left(2\int_0^t\int_0^s r_{\sigma_n}^2(s,u)\, du\, ds\right) \\ &\leq C_{H,T}\cdot (\sigma+c)^4 \exp\left(2\int_0^T\int_0^s r_{\sigma+c}^2(s,u)\, du\, ds\right) =: (\theta^*)^2,\end{aligned} \tag{42}$$

де

$$C_{H,T} = 2H^2(2H-1)^2\frac{T^{4H-3}}{4H-3}.$$

(У вище наведених викладках ми скористалися нерівністю з доведення леми 2.2 з [7].)

За властивістю інтеграла Дадлі маємо: $D(T,\theta/2) \leq D(T,\theta^*/2)$, тому

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{t\in[0,T]} \left|\xi_n^2(t)\right| > C\right\} \leq 2\left(1 - \Phi\left(\frac{C - 4\sqrt{2}D\left(T, \frac{\theta^*}{2}\right)}{\theta^*}\right)\right) \to 0,$$

при $C \to +\infty$.

Очевидно, що для $\xi_n^1(t)$ умова (3) виконується, а з вищенаведених нерівностей ясно, що вона виконується і для $\xi_n^3(t)$. Умова (5) очевидна.

Умова (6). Очевидно, що ця умова виконується для ξ_n^1 та ξ_n^3. Доведемо її для ξ_n^2. Для цього скористаємося результатами з пункту 2.4. Позначимо $\Delta_{ik} := t_{ik} - t_{i-1\,k}$.

Тоді

$$
\begin{aligned}
&E^n \sum_{i=1}^{l_k} \omega_{ik} \xi_n^2 \omega_{ik} \mu_n^2 \\
&\quad = E^n \sum_{i=1}^{l_k} \sup_{t_{i-1\,k} \le s < t \le t_{ik}} \left| \int_0^t r_{\sigma_n}(t,u)\, dW_u^n - \int_0^s r_{\sigma_n}(s,u)\, dW_u^n \right| \Delta_{ik} \\
&\quad \le 2E^n \sum_{i=1}^{l_k} \sup_{t \in [t_{i-1\,k}, t_{ik}]} \left| \int_0^t r_{\sigma_n}(t,u)\, dW_u^n - \int_0^{t_{i-1\,k}} r_{\sigma_n}(t_{i-1\,k},u)\, dW_u^n \right| \Delta_{ik} \\
&\quad \le 2 \max_{i=1,\dots,l_k} E^n \sup_{t \in [t_{i-1\,k}, t_{ik}]} \left| \int_0^t r_{\sigma_n}(t,u)\ dW_u^n \right. \\
&\qquad\qquad \left. - \int_0^{t_{i-1\,k}} r_{\sigma_n}(t_{i-1\,k},u)\ dW_u^n \right| \cdot T \\
&\quad \le 2T \max_{i=1,\dots,l_k} \left(E^n \sup_{t \in [t_{i-1\,k}, t_{ik}]} \left(\int_0^t r_{\sigma_n}(t,u)\ dW_u^n \right.\right. \\
&\qquad\qquad \left.\left. - \int_0^{t_{i-1\,k}} r_{\sigma_n}(t_{i-1\,k},u)\ dW_u^n \right)^2 \right)^{1/2}.
\end{aligned} \tag{43}
$$

Позначимо $\Delta\xi_{n\,ik}^2(t) = \int_0^t r_{\sigma_n}(t,u)\, dW_u^n - \int_0^{t_{i-1\,k}} r_{\sigma_n}(t_{i-1\,k},u)\ dW_u^n$, де $t \in [t_{i-1\,k}, t_{ik}]$. Оскільки $\inf_{t \in [t_{i-1\,k}, t_{ik}]} \|\Delta\xi_{n\,ik}^2(t)\|_U = 0$, то застосувавши до процесу $\Delta\xi_{n\,ik}^2(t)$ оцінку з нерівності (28), отримаємо:

$$
\left\| \sup_{t \in [t_{i-1\,k}, t_{ik}]} \Delta\xi_{n\,ik}^2(t) \right\|_U \le \frac{e\sqrt{2}}{\theta(1-\theta)} \int_0^{\varepsilon_0\theta} \left(\ln\left(\frac{\Delta_{ik}}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 2 \right) \right)^{1/2} du, \tag{44}
$$

причому з леми 2.5 випливає, що $\sigma(h) = Ch^{H-3/4}$, а $\varepsilon_0 \le C\Delta_{ik}^{H-3/4}$, де $C > 0$ — деяка стала.

Позначимо $\gamma := H - \frac{3}{4}$ та покладемо $\theta = \frac{1}{2}$. Оскільки $\sigma^{(-1)}(u) = (u/C)^{1/\gamma}$, то нерівність (44) набуде вигляду:

$$
\left\| \sup_{t \in [t_{i-1\,k}, t_{ik}]} \Delta\xi_{n\,ik}^2(t) \right\|_U \le 4\sqrt{2}e \int_0^{\frac{1}{2}C\Delta_{ik}^{\gamma}} \left(\ln\left(\frac{\Delta_{ik}}{2} \cdot \left(\frac{C}{u}\right)^{1/\gamma} + 2 \right) \right)^{1/2} du. \tag{45}
$$

Доведемо, що права частина нерівності (45) прямує до нуля при $\Delta_{ik} \to 0$. Оскільки

$$
\frac{\Delta_{ik}}{2} \cdot \left(\frac{C}{u}\right)^{1/\gamma} + 2 > 2,
$$

то скористаємося нерівністю $\ln(1+x) < C_\gamma x^\gamma$ для всіх $x > 1$, де $C_\gamma > 0$ — деяка стала. Тому

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{1}{2}C\Delta_{ik}^{\gamma}} \left(\ln\left(\frac{\Delta_{ik}}{2} \cdot \left(\frac{C}{u}\right)^{1/\gamma} + 2 \right) \right)^{1/2} du \\
&\qquad \le \int_0^{\frac{1}{2}C\Delta_{ik}^{\gamma}} \left(\frac{\Delta_{ik}}{2} \cdot \left(\frac{C}{u}\right)^{1/\gamma} + 1 \right)^{\gamma/2} du.
\end{aligned} \tag{46}
$$

Після заміни $z = (\Delta_{ik}/2) \cdot (C/u)^{1/\gamma}$ останній інтеграл набуде вигляду

$$
\left(\frac{\Delta_{ik}}{2}\right)^{\gamma} \cdot C\gamma \cdot \int_{2^{(1-\gamma)/\gamma}}^{+\infty} (1+z)^{\gamma/2} z^{-\gamma-1}\, dz. \tag{47}
$$

Інтеграл (47) є збіжним, оскільки $\gamma/2 - \gamma - 1 < -1$, бо $\gamma > 0$. А отже, інтеграл (47) прямує до нуля при $\Delta_{ik} \to 0$, що й доводить умову (6) теореми 3.1.

Умова (4). Виконання цієї умови для ξ_n^1 та ξ_n^2 є очевидним. Доведемо її для ξ_n^3. Нехай $a_n = m_n/\delta_n + \frac{1}{2}\delta_n$. Як і в доведенні умови (6), отримаємо:

$$
\begin{aligned}
&E^n \sum_{i=1}^{l_k} \omega_{ik}\xi_n^3 \omega_{ik} B_n^3 \\
&\quad \le 2T \max_{i=1,\ldots,l_k} E^n \sup_{t\in[t_{i-1\,k},t_{ik}]} \left| \left(\xi_n^2(t) - a_n\right)^2 - \left(\xi_n^2(t_{i-1\,k}) - a_n\right)^2 \right| \\
&\quad \le 2T \max_{i=1,\ldots,l_k} E^n \sup_{t\in[t_{i-1\,k},t_{ik}]} \left|\xi_n^2(t) - \xi_n^2(t_{i-1\,k})\right| \cdot \left|\xi_n^2(t) + \xi_n^2(t_{i-1\,k}) - 2a_n\right| \\
&\quad \le 2T \max_{i=1,\ldots,l_k} \Bigg(E^n \sup_{t\in[t_{i-1\,k},t_{ik}]} \left|\xi_n^2(t) - \xi_n^2(t_{i-1\,k})\right|^2 \\
&\qquad\qquad + E^n \sup_{t\in[t_{i-1\,k},t_{ik}]} \left|\xi_n^2(t) - \xi_n^2(t_{i-1\,k})\right| \cdot \left|2\xi_n^2(t_{i-1\,k}) - 2a_n\right| \Bigg).
\end{aligned}
\tag{48}
$$

При доведенні умови (6) показано, що $E^n \sup_{t\in[t_{i-1\,k},t_{ik}]} \left|\xi_n^2(t) - \xi_n^2(t_{i-1\,k})\right|^2 \to 0$ при $\Delta_{ik} \to 0$.

Оскільки за нерівністю Коші–Буняковського

$$
\begin{aligned}
&E^n \sup_{t\in[t_{i-1\,k},t_{ik}]} \left|\xi_n^2(t) - \xi_n^2(t_{i-1\,k})\right| \cdot \left|2\xi_n^2(t_{i-1\,k}) - 2a_n\right| \\
&\quad \le \left(E^n \sup_{t\in[t_{i-1\,k},t_{ik}]} \left|\xi_n^2(t) - \xi_n^2(t_{i-1\,k})\right|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(E^n \left|2\xi_n^2(t_{i-1\,k}) - 2a_n\right|^2 \right)^{1/2}.
\end{aligned}
\tag{49}
$$

Зауважимо, що другий множник в останній частині нерівності (49) не залежить від t, тому не містить знака супремуму. Покажемо, що послідовність

$$\left(E^n \left|2\xi_n^2(t_{i-1\,k}) - 2a_n\right|^2 \right)^{1/2}$$

є обмеженою. Справді,

$$E^n \left|2\xi_n^2(t_{i-1\,k}) - 2a_n\right|^2 = 4\int_0^{t_{i-1\,k}} r_{\sigma_n}^2\,(t_{i-1\,k}, u)\,du + 4a_n^2.$$

Враховуючи (42) та лему 2.2 з [7], які забезпечують обмеженість інтеграла

$$\int_0^{t_{i-1\,k}} r_{\sigma_n}^2\,(t_{i-1\,k}, u)\,du,$$

та збіжність послідовності $\{a_n\}$, отримаємо, що послідовність у правій частині останньої рівності є обмеженою.

Отже, вираз в останній частині нерівності (49) прямує до нуля при $\Delta_{ik} \to 0$, що й доводить умову (4) теореми 3.1. Умова (7) очевидна. □

4. Висновок

Для моделі процесу ціни акції, заданої за допомогою броунівського та дробово-броунівського рухів доведено збіжність за ймовірністю множин максимальної ймовірності успіху в задачі квантильного хеджування. Досліджено деякі властивості ядра Вольтерра $r_\sigma(t,s)$, за допомогою якого задається dP^*/dP.

Література

1. M. Bratyk and Y. Mishura, *Quantile hedging with rediscounting on complete financial market*, Prykladna statystyka. Aktuarna i finansova matematyka (2007), №2, 46–57.
2. P. Cheridito, *Regularizing Fractional Brownian Motion with a View towards Stock Price Modeling*, PhD thesis, Zurich, 2001, pp. 157–173.
3. M. Hitsuda, *Representation of Gaussian processes equivalent to Wiener process*, Osaka Journal of Mathematics (1968), №5, 299–312.
4. H. Föllmer and P. Leukert, *Quantile hedging*, Finance Stochast. (1999), №3, 251–273.
5. V. V. Buldygin and Yu. V. Kozachenko, *Metric Characterization of Random Variables and Random Processes*, American Mathematical Society, Providence RI, 2000.
6. M. A. Лифшиц, *Гауссовские случайные функции*, "ТВіМС", Киев, 1995.
7. A. Melnikov and Y. Mishura, *Efficient hedging, comparison theorems and different interest rates on the financial market with long-range dependence*, Stochastic Processes and Applications. (to appear)
8. Ю. С. Мішура, Г. М. Шевченко, Ю. В. Юхновський, *Функціональні граничні теореми для стохастичних інтегралів із застосуваннями до процесів ризику та до капіталів самофінансовних стратегій на багатовимірному ринку. I*, Теорія ймовір. та метем. статист. **81** (2009), 114–127.
9. Ю. В. Козаченко, Ю. С. Мішура, *Максимальні верхні оцінки моментів стохастичних інтегралів і розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь, що містять дробовий броунів рух з індексом Хюрста $H < \frac{1}{2}$. I*, Теорія ймовір. та метем. статист. **75** (2006).

Кафедра математики, факультет інформатики, Національний університет "Києво-Могилянська академія", вул. Г. Сковороди, 2, Київ 04070, Україна

Адреса електронної пошти: mbratyk@ukr.net

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики механіко-математичний факультет, Київський Національний університет ім. Тараса Шевченка, проспект Глушкова, 6, Київ 03127, Україна

Адреса електронної пошти: ykoz@univ.kiev.ua

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики механіко-математичний факультет, Київський Національний університет ім. Тараса Шевченка, проспект Глушкова, 6, Київ 03127, Україна

Адреса електронної пошти: myus@univ.kiev.ua

Надійшла 24.12.2010