Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 84, 2011, стор. 34–42

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 84, 2011, pp. 34–42

МІНІМАЛЬНА МАРТИНГАЛЬНА МІРА НА СКІНЧЕННОМУ ЙМОВІРНІСНОМУ ПРОСТОРІ

УДК 519.21

ВАДИМ ДОРОШЕНКО

Анотація. Наведено необхідні та достатні умови існування мінімальної мартингальної міри на фінансовому ринку з дискретним часом заданому на скінченному ймовірнісному просторі.

Аннотация. Приведены необходимые и достаточные условия существования минимальной мартингальной меры на финансовом рынке с дискретным временем заданом на конечном вероятностном пространстве.

Abstract. Necessary and sufficient conditions of existence of minimal martingale measure on a discrete time financial market with a finite probability space are established.

Вступ

Поняття мінімальної мартингальної міри з'явилося в роботах [1] та [2], де вона використовувалася як допоміжний технічний засіб в задачі локальної мінімізації ризику. Таке визначення мінімальної мартингальної міри, що використовуються в даній статті вперше було використано в статті [3].

Мінімальну мартингальну міру використовують здебільшого в моделях з неперервним часом. Властивості мінімальної мартингальної міри розглядаються в роботах [4]–[7], в статтях [1, 8] вона застосовується для хеджування, в роботах [9, 10] мінімальна мартингальна міра використана для обчислення вартості опціонів.

В даній статті розглядається питання існування та знаходження мінімальної мартингальної міри на фінансовому ринку заданому на скінченному ймовірнісному просторі. Побудовано алгоритм знаходження мінімальної мартингальної міри. Наведено приклади обчислення мінімальних мартингальних мір.

Стаття побудована наступним чином.

В першому розділі вводяться необхідні означення.

В другому розділі розглядається однокрокова модель фінансового ринку. В теоремі 2.1 даються необхідні та достатні умови існування мінімальної мартингальної міри.

В третьому розділі розглядається багатокрокова модель фінансового ринку. Наводиться алгоритм, який визначає чи існує мінімальна мартингальна міра, та дозволяє знайти її у випадку, коли вона існує.

Четвертий розділ містить приклади обчислення мінімальної мартингальної міри з використанням побудованого алгоритму.

1. Означення

Розглянемо модель фінансового ринку з дискретним часом, з $d+1$ активами, 1 з яких є безризиковим та d — ризиковими. Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ ймовірнісний простір,

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 91G99; Secondary 60G42, 15A06.

Ключові слова і фрази. Мінімальна мартингальна міра, фінансовий ринок з дискретним часом.

$\{\varnothing, X\} = \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_T = \mathcal{F}$ — фільтрація σ-алгебр на ньому. Ціни активів в момент $t = 0, \ldots, T$ дорівнюють

$$S_t = (S_t^0, S_t^1, \ldots, S_t^d)$$

де $S_t^0 > 0$ — невипадкова, S_t^k є $\mathcal{F}_t$-вимірними функціями. Позначимо символом $\mathbb{T}$ множину $\{0, \ldots, T\}$.

Означення 1.1. Дисконтованими цінами будемо називати

$$X_t^i = \frac{S_t^i}{S_t^0}, t \in \mathbb{T},\ i = 1, \ldots, d.$$

Позначимо $X^k = \{X_t^k, t \in \mathbb{T}\}$ — ціновий процес k-го актива.

Означення 1.2. Процес $(U_t)_{t\in\mathbb{T}}$ на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ називається узгодженим відносно фільтрації $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_T$, якщо для всіх $t = 0, \ldots, T$ випадкова величина U_t є $\mathcal{F}_t$-вимірною.

Означення 1.3. Міра $\widetilde{\mathsf{P}}$, що еквівалентна мірі P, називається мартингальною, якщо всі цінові процеси X^k, $k = 1, \ldots, N$, є мартингалами відносно міри $\widetilde{\mathsf{P}}$.

Означення 1.4. Нехай $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_T$ фільтрація σ-алгебр на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Узгоджені відносно цієї фільтрації процеси $U = (U_t)_{t\in\mathbb{T}}$, $V = (V_t)_{t\in\mathbb{T}}$ називаються сильно ортогональними, якщо

$$cov((U_{t+1} - U_t)(V_{t+1} - V_t)|\mathcal{F}_t) = 0 \pmod{\mathsf{P}},\ t = 0, \ldots, T-1.$$

Будемо писати $U \perp V$ для ортогональних процесів.

Зауважимо, що у випадку, коли один з узгоджених процесів $(U_t)_{t\in\mathbb{T}}, (V_t)_{t\in\mathbb{T}}$ у означенні 1.4 є мартингалом, то

$$cov((U_{t+1} - U_t)(V_{t+1} - V_t)|\mathcal{F}_t) = E((U_{t+1} - U_t)(V_{t+1} - V_t)|\mathcal{F}_t).$$

У випадку, якщо з контексту не зрозуміло відносно якої міри рахуються математичні сподівання у означенні 1.4 будемо писати P-сильно ортогональні.

Означення 1.5. Міра Q на $(\Omega, \mathcal{F})$ називається мінімальною мартингальною, якщо

(1) Q — мартингальна ймовірнісна міра еквівалентна мірі P.
(2) $E\left(\frac{dQ}{dP}\right)^2 < \infty$.
(3) Довільний інтегрований з квадратом P-мартингал, який сильно ортогональний X^i, $i = 1, \ldots, d$, є Q-мартингалом.

Надалі будемо розглядати скінченний ймовірнісний простір

$$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}, \mathcal{F} = 2^\Omega,$$

де $N \geq 1$ фіксоване. Додатково припускаємо, що $\mathsf{P}(\{\omega_i\}) > 0$, $i = 1, \ldots, N$.

Питання, що розглядається в цій статті — знайти необхідні та достатні умови існування мінімальної мартингальної міри на фінансовому ринку зі скінченним ймовірнісним простором.

Оскільки ймовірнісний простір є скінченним, то ймовірності та випадкові величини на ньому можна природно отожнити з векторами з $\mathbb{R}^N$. Будемо розглядати стандартний скалярний добуток на $\mathbb{R}^N$:

$$(a, b) = \sum_{k=1}^{N} a_k b_k,$$

де $a = (a_1, \ldots, a_N)$, $b = (b_1, \ldots, b_N) \in \mathbb{R}^N$.

Нехай $a = (a_1, \ldots, a_N)$, $b = (b_1, \ldots, b_N) \in \mathbb{R}^N$, позначимо через ab вектор виду

$$ab = (a_1 b_1, \ldots, a_N b_N).$$

2. Однокрокова модель фінансового ринку

Розглянемо спочатку однокрокову модель фінансового ринку, тобто випадок $T = 1$. Позначимо $Y^i = X_1^i - X_0^i$, $i = 1, \ldots, d$, — чисті прибутки. Позначимо $p_i = \mathsf{P}(\{\omega_i\})$, $q_i = \mathsf{Q}(\{\omega_i\})$, $y_{ji} = Y^j(\omega_i)$, $i = 1, \ldots, N$, $j = 1, \ldots, d$.

Лема 2.1. *Мінімальна мартингальна міра* Q *є лінійною комбінацією* P, $\mathsf{P}Y^1$, *…*, $\mathsf{P}Y^d$.

Доведення. Нехай $M = (M_0, M_1)$ — P-мартингал, ортогональний ціновим процесам $X^i = (X_0^i, X_1^i)$, $i = 1, \ldots, d$. Позначимо $m_k = M_1(\omega_k)$, $k = 1, \ldots, N$, $m = M_0$.

Те, що M є P-мартингалом, еквівалентно

$$E_{\mathsf{P}}(M_1 - M_0) = \sum_{k=1}^{N} p_k(m_k - m) = (\mathsf{P}, M_1 - M_0) = 0.$$

Отже, $\mathsf{P} \perp (M_1 - M_0)$.

З того, що M — сильно ортогональний до (X_0^i, X_1^i), $i = 1, \ldots, N$, маємо, що

$$E_{\mathsf{P}}(M_1 - M_0)(X_1^i - X_0^i) = E_{\mathsf{P}}(M_1 - M_0)Y^i = \sum_{k=1}^{N} p_k y_{ik}(m_k - m) = 0,$$

тобто $\mathsf{P}Y^i \perp (M_1 - M_0)$. Те, що M є Q мартингалом, означає, що $\mathsf{Q} \perp (M_1 - M_0)$.

Для довільного вектора $M_1 \in (< \mathsf{P}, \mathsf{P}Y^1, \ldots, \mathsf{P}Y^d >)^{\perp}$ випадковий процес $M = (0, M_1)$ — є P-мартингалом, отже

$$\mathsf{Q} \in (< \mathsf{P}, \mathsf{P}Y^1, \ldots, \mathsf{P}Y^d >)^{\perp\perp} = < \mathsf{P}, \mathsf{P}Y^1, \ldots, \mathsf{P}Y^d > .$$

□

Таким чином, існують $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$, $\beta \in \mathbb{R}$, такі що

$$\mathsf{Q} = \sum_{k=1}^{d} \alpha_k \mathsf{P}Y^k - \beta \mathsf{P}. \tag{1}$$

Якщо система векторів Y^i, $i = 1, \ldots, d$, є лінійно залежною, то перейдемо до деякої максимальної лінійно незалежної підсистеми. Далі вважаємо, що система векторів Y^i, $i = 1, \ldots, d$, — лінійно незалежна.

Міра Q є мартингальною, тому $(\mathsf{Q}, Y^i) = 0$, $i = 1, \ldots, d$. Отже, маємо систему з d рівнянь та $d + 1$ невідомих.

$$\begin{aligned} \alpha_1(\mathsf{P}Y^1, Y^1) + \ldots + \alpha_d(\mathsf{P}Y^d, Y^1) &= \beta(\mathsf{P}, Y^1) \\ &\ldots \\ \alpha_1(\mathsf{P}Y^1, Y^d) + \ldots + \alpha_d(\mathsf{P}Y^d, Y^d) &= \beta(\mathsf{P}, Y^d). \end{aligned} \tag{2}$$

Визначимо скалярний добуток на $\mathbb{R}^N$ за правилом $[U, V] = (\mathsf{P}U, V)$, де $U = (u_1, \ldots, u_N)$, $V = (v_1, \ldots, v_N)$. Неважко перевірити, що це дійсно буде скалярним добутком.

Тоді ліва частина системи (2) буде матрицею Грама відносно скалярного добутку $[,]$. Оскільки система векторів $Y^1, \ldots, Y^d$ є лінійно незалежною, то матриця системи (2) буде невиродженою. Отже, якщо ми фіксуємо β то йому відповідає єдиний розв'язок системи (2). Всі розв'язки системи (2) є пропорційними. Оскільки $\mathsf{Q} = (q_1, \ldots, q_N)$ — ймовірність, то $\sum_{k=1}^{N} q_k = 1$. Отже, лише один з пропорційних розв'язків може задавати ймовірність. Має місце наступне твердження відоме з загальної теорії мінімальних мартингальних мір [11].

Твердження 1. *В однокроковій моделі фінансового ринку існує не більше однієї мінімальної мартингальної міри.*

Доведення. Якщо б існувало 2 мартингальні міри, то для довільної максимальної лінійно незалежної підсистеми системи векторів Y^i, $i = 1, \ldots, d$, система рівнянь (2) мала б не менше 2 розв'зків, що неможливо. □

Сформулюємо необхідні та достатні умови існування мінімальної мартингальної міри.

Використовуючи те, що $(\mathsf{P}Y^i, Y^j) = E_{\mathsf{P}} Y_i Y_j$ та $(\mathsf{P}, Y^i) = E_{\mathsf{P}} Y_i$, $i, j = 1, \ldots, d$, можемо переписати систему (2) наступним чином

$$\begin{aligned} \alpha_1 E_{\mathsf{P}}(Y_1)^2 + \ldots + \alpha_d E_{\mathsf{P}} Y_d Y_1 = \beta E_{\mathsf{P}} Y_1 \\ \ldots \\ \alpha_1 E_{\mathsf{P}} Y_d Y_1 + \ldots + \alpha_d E_{\mathsf{P}}(Y_d)^2 = \beta E_{\mathsf{P}} Y^d. \end{aligned} \tag{3}$$

Мінімальна мартингальна міра буде існувати тоді і тільки тоді, коли система (3) має розв'язок $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta)$ такий, що вектор $\mathsf{Q} = \sum_{k=1}^d \alpha_k \mathsf{P} Y^k - \beta \mathsf{P}$ є ймовірнісним вектором з ненульовими координатами.

Позначимо через

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} E_{\mathsf{P}}(Y^1)^2 & \ldots & E_{\mathsf{P}} Y^1 Y^d \\ \ldots & & \\ E_{\mathsf{P}} Y^d Y^1 & \ldots & E_{\mathsf{P}}(Y^d)^2) \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$\Delta_i = \det \begin{pmatrix} E_{\mathsf{P}}(Y^1)^2 & \ldots & E_{\mathsf{P}} Y^1 & \ldots & E_{\mathsf{P}} Y^1 Y^d \\ \ldots & & & & \\ E_{\mathsf{P}} Y^d Y^1 & \ldots & E_{\mathsf{P}} Y^d & \ldots & E_{\mathsf{P}}(Y^d)^2 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

де в Δ_i стовпчик з $E_{\mathsf{P}} Y^j$, $j = 1, \ldots, d$, стоїть в i-ому стовпчику.

За правилом Крамера маємо

$$\alpha_i = \beta \frac{\Delta_i}{\Delta}, i = 1, \ldots, d.$$

Отже,

$$\mathsf{Q} = \beta \sum_{k=1}^d \frac{\Delta_k}{\Delta} \mathsf{P} Y^k - \beta \mathsf{P} = -\beta(\mathsf{P} - \sum_{k=1}^d \frac{\Delta_k}{\Delta} \mathsf{P} Y^k). \tag{6}$$

Враховуючи, те що для того щоб вектор Q був ймовірнісною мірою необхідно щоб всі $q_i > 0$, $i = 1, \ldots, N$, тому отримуємо.

Теорема 2.1. *Мінімальна мартингальна міра існує тоді і тільки тоді, коли всі числа*

$$r_i = 1 - \sum_{k=1}^d \frac{\Delta_k}{\Delta} y_{ki}, \ i = 1, \ldots, d \tag{7}$$

одного знаку.

Лема 2.2. *Нехай $d = 1$. Мінімальна мартингальна міра існує тоді і тільки тоді, коли*

$$y_{1i} E_{\mathsf{P}} Y^1 < E_{\mathsf{P}}(Y^1)^2, i = 1, \ldots, N.$$

Доведення. Враховуючи, що $d = 1$, маємо $\Delta = (\mathsf{P}Y^1, Y^1) = E_{\mathsf{P}}(Y^1)^2$, $\Delta_1 = (\mathsf{P}, Y^1) = E_{\mathsf{P}} Y^1$. З теореми 2.1 випливає, що мінімальна мартингальна міра існує тоді і тільки тоді, коли всі числа $r_i = E_{\mathsf{P}}(Y^1)^2 - E_{\mathsf{P}} Y^1 y_{1i}$, $i = 1, \ldots, N$, одного знаку. Оскільки $\sum_{i=1}^N p_i a_i = E_{\mathsf{P}}(Y^1)^2 - (E_{\mathsf{P}} Y^1)^2 > 0$, отримуємо, що всі a_i не можуть бути від'ємними одночасно. Отже, мінімальна мартингальна міра існує тоді і тільки тоді, коли всі числа r_i додатні. Це доводить лему. □

3. Багатокрокова модель фінансового ринку

Розглянемо випадок $T > 1$.

Нехай Q — деяка ймовірнісна міра на просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ з фільтрацією $\{\varnothing, \Omega\} = \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_T = \mathcal{F}$, яка еквівалентна мірі P. Знайдемо умови на міру Q за яких вона є мінімальною мартингальною мірою.

Нехай R — довільна ймовірнісна міра на $(\Omega, \mathcal{F})$, що є еквівалентною мірі P. Для кожного $t \in \mathbb{T}$ позначимо через R_t звуження міри R на σ алгебру $\mathcal{F}_t$. Тоді $R_0(\varnothing) = 0$, $R_0(\Omega) = 1$ та міра R_T співпадає з мірою R.

Очевидно, що для $\mathcal{F}$-вимірної випадкової величини ξ має місце рівність

$$E_{R_t}(\xi|\mathcal{F}_s) = E_R(\xi|\mathcal{F}_s), \ 0 \le s \le t \le T. \tag{8}$$

Позначимо через FM_t — t-крокову модель фінансового ринку з фільтрованим ймовірнісним простором $(\Omega, \mathcal{F}_0 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_t, \mathsf{P}_t)$ та цінами $(X_0^k, \ldots, X_t^k)$, $k = 1, \ldots, d$.

Нехай $t = 0, \ldots, T-1$. Для довільного атому A σ-алгебри $\mathcal{F}_t$ визначимо σ-алгебру $\mathcal{F}_{t+1}(A) = \{B \in \mathcal{F}_{t+1} | B \subset A\}$. Для довільного $B \in \mathcal{F}_{t+1}(A)$ покладемо

$$R_{t+1}^A(B) = \frac{R(B)}{R(A)}.$$

Лема 3.1. *Нехай $t = 0, \ldots, T-1$, $A_1, \ldots, A_k$ — всі атоми алгебри $\mathcal{F}_t$, $B \in \mathcal{F}_{t+1}$. Тоді*

$$R_{t+1}(B) = \sum_{i=1}^{k} R_t(A_i) R_{t+1}^{A_i}(A_i \cap B).$$

Доведення. Випливає з означення ймовірнісних мір R_t, R_{t+1}^A. □

Лема 3.2. *1) Міра Q є мартингальною мірою тоді і тільки тоді коли для кожного $t = 1, \ldots, T$ міра Q_t є мартингальною на t-кроковій моделі фінансового ринку FM_t.*

2) Міра Q є мінімальною мартингальною мірою тоді і тільки тоді коли для кожного $t = 1, \ldots, T$ міра Q_t є мінімальною мартингальною на t-кроковій моделі фінансового ринку FM_t.

Доведення. 1) Достатність. Випливає з того, що $\mathsf{Q}_T = \mathsf{Q}$.

Необхідність. Нехай міра Q є мартингальною на T-кроковій моделі фінансового ринку FM_T. Для $t = 1, \ldots, T$ розглянемо міру Q_t на t-кроковій моделі фінансового ринку FM_t. Перевіримо за означенням, що міра Q_t буде мартингальною на FM_t. Покладемо $Y^k = (X_0^k, \ldots, X_t^k)$, $k = 1, \ldots, d$, — ціни до моменту t. За означенням міри Q_t та того, що міра Q еквівалентна мірі P маємо, що Q_t еквівалентна мірі P_t. З формули (8) випливає, що Y^k буде Q_t-мартингалом.

2)Достатність. Випливає з того, що $\mathsf{Q}_T = \mathsf{Q}$.

Необхідність. Нехай міра Q є мінімальною мартингальною на T-кроковій моделі фінансового ринку FM_T. Для $t = 1, \ldots, T$ розглянемо міру Q_t на t-кроковій моделі фінансового ринку FM_t. З пункту 1) випливає, що Q_t — мартингальна міра.

Перевіримо за означенням, що міра Q_t буде мінімальною мартингальною на FM_t. Нехай $M = (M_0, \ldots, M_t)$ — P_t-мартингал на фільтрованому просторі $(\Omega, \mathcal{F}_0 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_t, \mathsf{P}_t)$, який сильно P_t-ортогональний до Y^k, $k = 1, \ldots, d$. Продовжимо випадковий процес на множину $\{t+1, \ldots, T\}$, для чого покладемо $M_{t+1} = \ldots = M_T = M_t$. Тоді випадковий процес $N = (M_0, \ldots, M_T)$ буде P-мартингалом. Доведемо, що процес N є P-сильно ортогональним до процесів цін X^k, $k = 1, \ldots, d$. Нехай $k = 1, \ldots, d$. Тоді

$$\begin{aligned} &E_{\mathsf{P}}((M_{s+1} - M_s)(X_{s+1}^k - X_s^k)|\mathcal{F}_s) \\ &\quad = \begin{cases} E_{\mathsf{P}_t}((M_{s+1} - M_s)(X_{s+1}^k - X_s^k)|\mathcal{F}_s) = 0, & \\ \qquad\qquad \text{при } s < t, \text{ бо } M \perp Y^k, \ k = 1, \ldots, d. & \\ 0, \qquad\qquad \text{при } s \ge t, \text{ бо за означенням } M_s = M_{s+1}. & \end{cases} \end{aligned}$$

Отже, N — P-мартингал P-сильно ортогональний до цінових процесів $X_1, \ldots, X_d$. Оскільки міра Q — мінімальна мартингальна, то N є Q-мартингалом. З леми 3.3 отримуємо, що M є Q_t-мартингалом.

Таким чином, за означенням отримали, що Q_t є мінімальною мартингальною мірою. $\square$

Отже, ймовірнісна міра Q_{t+1}, $t = 0, \ldots, T-1$, однозначно визначається мірою Q_t та множиною умовних ймовірнісних мір

$$\{\mathsf{Q}_{t+1}^A | A \text{ — атом } \sigma\text{-алгебри } \mathcal{F}_t\}.$$

Для довільного атому A σ-алгебри $\mathcal{F}_t$ розглянемо ймовірнісний простір

$$\mathsf{P}S_{t+1}^A = (A, \mathcal{F}_{t+1}(A), \mathsf{P}_{t+1}^A),$$

Визначимо $Y_t^{iA} = (X_{t+1}^i - X_t^i)|_A$, $i = 1, \ldots, d$, — чисті прибутки.

Тоді для кожного атому σ-алгебри $\mathcal{F}_t$ ми маємо однокрокову модель фінансового ринку з ймовірнісним простором $(A, \mathcal{F}_t(A), \mathsf{P}_A)$ та векторами чистих прибутків $Y_t^{1A}, \ldots, Y_t^{dA}$. Позначимо ці однокрокові моделі фінансових ринків через FM_t^A.

Для довільної множини $A \in \mathcal{F}$ позначимо через χ_A індикаторну функцію множини A.

Лема 3.3. *Нехай $t = 0, \ldots, T-1$. Міра Q_{t+1} буде мартингальною мірою на $t+1$-кроковій моделі фінансового ринку FM_{t+1} тоді і тільки тоді, коли міра Q_t буде мартингальною мірою на t-кроковій моделі фінансового ринку FM_t та міри Q_{t+1}^A для всіх атомів A σ-алгебри $\mathcal{F}_t$ будуть мартингальними на однокрокових моделях фінансових ринків FM_t^A відповідно.*

Доведення. Оскільки P, Q еквівалентні ймовірнісні міри, то ймовірнісні міри P_t, Q_t є еквівалентними для кожного $t \in \mathbb{T}$.

Необхідність. Нехай Q_{t+1} — мартингальна міра. Тоді з леми 3.2 для моделі фінансового ринку FM_{t+1} отримуємо, що Q_t — мартингальна міра. Нехай A — атом σ-алгебри $\mathcal{F}_t$. Доведемо, що Q_{t+1}^A — мартингальна міра. Для довільного $k = 1, \ldots, d$.

$$E_{\mathsf{Q}_{t+1}^A} X_{t+1}^k = \frac{E_{\mathsf{Q}_{t+1}}(X_{t+1}^k \chi_A)}{\mathsf{Q}_t(A)} = \frac{E_{\mathsf{Q}_{t+1}}(X_t^k \chi_A)}{\mathsf{Q}_t(A)} = \frac{E_{\mathsf{Q}_t}(X_t^k \chi_A)}{\mathsf{Q}_t(A)} = X_t^k|_A.$$

Тут в другій рівності було враховано мартингальність міри Q_{t+1}, а в останній те, що випадкова величина X_t^k стала на будь-якому атомі σ-алгебри $\mathcal{F}_t$.

Достатність. Нехай ймовірнісна міра Q_t — мартингальна на моделі фінансового ринку FM_t та для всіх атомів σ-алгебри $\mathcal{F}_t$ міри Q_t — мартингальні на моделі фінансового ринку FM_t^A. Оскільки Q_t мартингальна міра на FM_t, то з формули (8) маємо, що для довільних $k = 0, \ldots, d$, $s = 0, \ldots, t-1$ виконується

$$E_{\mathsf{Q}_{t+1}}(X_{s+1}^k | \mathcal{F}_s) = X_s^k.$$

Залишилось довести, що $E_{\mathsf{Q}_{t+1}}(X_{t+1} | \mathcal{F}_t) = X_t$. Для довільного атому A σ-алгебри F_t маємо

$$E_{\mathsf{Q}_{t+1}}(X_{t+1}^k - X_t^k)\chi_A = \mathsf{Q}_t(A) E_{\mathsf{Q}_{t+1}^A} Y_t^{kA} = 0,$$

остання рівність виконується оскільки міра Q_t^A є мартингальною на FM_t^A. $\square$

Лема 3.4. *Нехай $t = 0, \ldots, T-1$. Міра Q_{t+1} буде мінімальною мартингальною мірою на $t+1$-кроковій моделі фінансового ринку FM_{t+1} тоді і тільки тоді, коли міра Q_t буде мінімальною мартингальною мірою на t-кроковій моделі фінансового ринку FM_t та міри Q_{t+1}^A для всіх атомів A σ-алгебри $\mathcal{F}_t$ будуть мінімальними мартингальними на однокрокових моделях фінансових ринків FM_t^A відповідно.*

Доведення. Необхідність. Нехай Q_{t+1} — мінімальна мартингальна міра на моделі фінансового ринку FM_{t+1}. З леми 3.3 випливає, що Q_t — мартингальна міра на моделі фінансового ринку FM_t, міри Q_t^A — мартингальні на FM_t^A для кожного атому $\mathcal{F}_t$.

Для довільного P_t-мартингалу $M = (M_0, \dots, M_t)$, що P_t-сильно ортогональний ціновим процесам $(X_0^k, \dots, X_t^k)$, $k = 1, \dots, d$, продовжимо його поклавши $M_{t+1} = M_t$. Отримаємо процес $\widetilde{M} = (M_0, \dots, M_{t+1})$ який є P_{t+1}-мартингалом. Процес $\widetilde{M}$ P_{t+1}-сильно ортогональний до $(X_0^k, \dots, X_{t+1}^k)$, $k = 1, \dots, d$. З мінімальної мартингальності Q_{t+1} маємо, що $\widetilde{M}$ є Q_{t+1}-мартингалом. Тоді з формули 8 випливає, що M є Q_t-мартингалом. Таким чином, Q_t — мінімальна мартингальна міра на фінансовому ринку FM_t.

Для довільного P_{t+1}^A-мартингалу $M = (M_0, M_1)$ на FM_{t+1}^A, що ортогональний ціновим процесам, визначимо випадковий процес $N = (N_0, \dots, N_{t+1})$, де $N_0 = \dots = N_t = 0$, $N_{t+1} = M_1 - M_0$. Тоді N — P_{t+1}-мартингал, що ортогональний ціновим процесам, отже він є Q_{t+1}-мартингалом. Тому M є Q_{t+1}^A-мартингалом на FM_{t+1}^A. Таким чином, Q_{t+1}^A є мінімальною мартингальною мірою на фінансовому ринку FM_{t+1}^A.

Достатність. Нехай Q_t — мінімальна мартингальна міра на FM_t, та для всіх атомів $A_1, \dots, A_k$, $k > 0$, σ-алгебри $\mathcal{F}_t$ міра Q_{t+1}^A є мінімальною мартингальною мірою на FM_t^A. Доведемо, що Q_{t+1} — мінімальна мартингальна міра на FM_{t+1}. Мартингальність міри Q_{t+1} випливає з леми 3.3.

Для довільного P_{t+1}-мартингалу $M = (M_0, \dots, M_{t+1})$, що P_{t+1}-сильно ортогональний ціновим процесам $(X_0^k, \dots, X_{t+1}^k)$, $k = 1, \dots, d$, розглянемо процес $N = (M_0, \dots, M_t)$. Процес N є P_t-мартингалом, що P_t-сильно ортогональний ціновим процесам $(X_0^k, \dots, X_t^k)$, $k = 1, \dots, d$. Оскільки міра Q_t — мінімальна ортогональна на FM_t, то N є Q_t-мартингалом. Використовуючи формулу (8), для всіх $s = 0, \dots, t-1$ маємо

$$0 = E_{\mathsf{Q}_t}(M_{s+1} - M_s | \mathcal{F}_s) = E_{\mathsf{Q}_{t+1}}(M_{s+1} - M_s | \mathcal{F}_s). \tag{9}$$

Нехай A — довільний атом σ-алгебри $\mathcal{F}_t$. Процес $N_A = (M_t|_A, M_{t+1}|_A)$ є P_t^A-мартингалом на FM_t^A, що сильно P_t^A-ортогональний ціновим процесам, тому з мінімальності P_t^A на FM_t^A маємо, що N_A є Q_t^A-мартингалом на $\mathsf{P}S_t^A$. Тоді

$$E_{\mathsf{Q}_{t+1}}(M_{t+1} - M_t)\chi_A = \frac{E_{\mathsf{Q}_{t+1}^A}(M_{t+1} - M_t)}{\mathsf{Q}_t(A)} = 0. \tag{10}$$

З рівностей (9), (10) отримуємо, що M — Q_{t+1}-мартингал. Отже, Q_{t+1} — мінімальна мартингальна міра на фінансовому ринку FM_{t+1}.

□

Теорема 3.1. *1. Існує не більше однієї мінімальної мартингальної міри.*

2. Мінімальна мартингальна міра існує тоді і тільки тоді, коли для довільного $t = 0, \dots, T-1$, для довільного атому алгебри $\mathcal{F}_t$ існує мінімальна мартингальна міра на однокроковій моделі ринку FM_t^A.

Доведення. 1. Випливає з того, що на однокрокових моделях фінансових ринків FM_t^A для довільного $t = 0, \dots, T-1$ та для довільного атому алгебри $\mathcal{F}_t$ існує не більше однієї мінімальної мартингальної міри.

2. Випливає з лем 3.1-3.4. □

Наслідок 3.1. *(Алгоритм для побудови мінімальної мартингальної міри)*

(1) *Визначаємо міру Q_0 наступним чином $\mathsf{Q}_0(\varnothing) = 0$, $\mathsf{Q}_0(\Omega) = 1$. Покладемо $t = 0$.*

(2) *Міра Q_t вже визначена. Для кожного атома A σ-алгебри $\mathcal{F}_t$ розглянемо однокроковий фінансовий ринок FM_t^A. З формул (4), (5), (7) обчислюємо числа $r_1, \dots, r_d$. Якщо вони всі одного знаку, то мінімальна мартингальна міра на FM_t^A існує та знаходиться за формулами*

$$\mathsf{Q}_{t+1}^A(\{\omega_i\}) = \frac{r_i}{\sum_{k=1}^d r_i},\ i = 1, \dots, N.$$

Якщо числа $r_1, \dots, r_d$ не всі одного знаку, то мінімальної мартингальної міра на FM_t^A не існує.

(3) *Якщо хоча б для одного атома A σ-алгебри $\mathcal{F}_t$ на однокроковому фінансовому ринку FM_t^A не існує мінімальної мартингальної міри, то мінімальна мартингальна міра не існує, алгоритм завершується.*

(4) *Використовуючи лему 3.1 знаходимо міру Q_{t+1}: Нехай $t = 0, \dots, T-1$, $A_1, \dots, A_k$ — всі атоми алгебри $\mathcal{F}_t$, $B \in \mathcal{F}_{t+1}$. Тоді*

$$\mathsf{Q}_{t+1}(B) := \sum_{i=1}^{k} \mathsf{Q}_t(A_i)\mathsf{Q}_{t+1}^A(A_i \cap B).$$

(5) *Збільшуємо t на одиницю. Якщо $t = T$, то ми знайшли мінімальну мартингальну міру $\mathsf{Q} = \mathsf{Q}_T$, алгоритм завершується, інакше переходимо до кроку 2.*

4. Приклади обчислення мінімальної мартингальної міри

1. Розглянемо однокрокову модель фінансового ринку з двома ризиковими активами. Нехай $N > 0$, $\Omega = (\omega_1, \dots, \omega_N)$, $\mathsf{P}(\omega_i) = p_i$, $i = 1, \dots, N$, $Y^i(\omega_j) = y_{ij}$, $i = 1, 2$, $j = 1, \dots, N$. Позначимо через Q — шукану мінімальну мартингальну міру, $\mathsf{Q}(\omega_i) = q_i$, $i = 1, \dots, N$.

Обчислимо числа $r_1, \dots, r_N$ з теореми 2.1.

$$\Delta = \begin{vmatrix} E(Y^1)^2 & EY^1Y^2 \\ EY^1Y^2 & E(Y^2)^2 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} EY^1 & EY^1Y^2 \\ EY^2 & E(Y^2)^2 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} E(Y^1)^2 & EY^1 \\ EY^1Y^2 & EY^2 \end{vmatrix}.$$

Тоді маємо

$$r_i = \Delta - \Delta_1 y_{1i} - \Delta_2 y_{2i}, i = 1, \dots, N. \tag{11}$$

За теоремою 2.1 якщо всі r_i мають однакові знаки, то мінімальна мартингальна міра існує, та q_i є пропорційними r_i. Інакше мінімальна мартингальна міра не існує.

Покажемо на числових прикладах обчислення мінімальної мартингальної міри.

1a. Нехай $N = 3$,

$$\mathsf{P}(\omega_1) = \frac{1}{6}, \mathsf{P}(\omega_2) = \frac{1}{3}, \mathsf{P}(\omega_3) = \frac{1}{2},$$
$$Y^1(\omega_1) = Y^1(\omega_2) = 1, Y^1(\omega_3) = -1,$$
$$Y^2(\omega_1) = 1, Y^2(\omega_2) = -2, Y^2(\omega_3) = 1.$$

Обчислюючи r_1, r_2, r_3 за формулами (11) маємо $r_1 = r_2 = r_3 = 1$. Оскільки числа r_1, r_2, r_3 одного знаку, то мінімальна мартингальна міри існує і пропорційна числам r_1, r_2, r_3. Отже,

$$q_1 = q_2 = q_2 = \frac{1}{3}.$$

1b. Нехай $N = 3$,

$$\mathsf{P}(\omega_1) = \frac{1}{6}, \mathsf{P}(\omega_2) = \frac{1}{3}, \mathsf{P}(\omega_3) = \frac{1}{2},$$
$$Y^1(\omega_1) = Y^1(\omega_2) = 1, Y^1(\omega_3) = -1,$$
$$Y^2(\omega_1) = -3, Y^2(\omega_2) = -2, Y^2(\omega_3) = 1.$$

Обчислюючи r_1, r_2, r_3 за формулами (11) маємо $r_1 = -\frac{1}{3}$, $r_2 = \frac{1}{3}$, $r_3 = \frac{1}{9}$. Оскільки числа r_1, r_2, r_3 не всі одного знаку, то мінімальної мартингальної міри не існує.

2. Розглянемо двокрокову модель фінансового ринку з двома ризиковими активами.

Нехай $\Omega = \{\omega_{ij} | i, j = 1, 2, 3\}$, $p_1 = \frac{1}{6}$, $p_2 = \frac{1}{3}$, $p_3 = \frac{1}{2}$,

$$\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}, \mathcal{F}_1 = \sigma a(\{\ A_i | i = 1, 2, 3\}), \mathcal{F}_2 = 2^\Omega,$$

де $A_i = \{\omega_{ij} | j = 1, 2, 3\}$, $i = 1, 2, 3$, $\mathsf{P}(\omega_{ij}) = p_i p_j$, $i, j = 1, 2, 3$.

Нехай $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = -1$, $b_1 = 1$, $b_2 = -2$, $b_3 = 1$. Покладемо

$$X_1^1(w_{ij}) = 1 + a_i, X_2^1(w_{ij}) = 1 + a_i + a_j, i, j = 1, 2, 3$$

та

$$X_1^2(w_{ij}) = 1 + b_i, X_2^2(w_{ij}) = 1 + b_i + b_j, i, j = 1, 2, 3.$$

Використовуючи алгоритм знаходження мінімальної мартингальної міри для багато крокового ринку з розділу 3, спочатку знаходимо Q_1. Задача знаходження Q_1 є задачею з прикладу 1a. Отже, маємо $\mathsf{Q}_1(A_1) = \mathsf{Q}_1(A_2) = \mathsf{Q}_1(A_3) = \frac{1}{3}$.

Далі знаходимо Q_2, для цього знаходимо міри $\mathsf{Q}_2^{A_1}$, $\mathsf{Q}_2^{A_2}$, $\mathsf{Q}_2^{A_3}$. Задачі для знаходження мір $\mathsf{Q}_2^{A_1}$, $\mathsf{Q}_2^{A_2}$, $\mathsf{Q}_2^{A_3}$ співпадають з задачею з прикладу 1a. Отже, маємо $\mathsf{Q}^{A_i}(\omega_{ij}) = \frac{1}{3}$, $i, j = 1, 2, 3$. З леми 3.1 знаходимо, що $\mathsf{Q}_2(\omega_{ij}) = \frac{1}{27}$, $i, j = 1, 2, 3$.

Література

1. M. Schweizer, *Hedging of Options in a General Semimartingale Model*, Diss. ETH Zurich 8615, 1988.
2. M. Schweizer, *Option hedging for semimartingales*, Stochastic Processes and their Applications **37** (1991), 339–363.
3. H. Follmer and M. Schweizer, *Hedging of contingent claims under incomplete information*, Applied Stochastic Analysis (M. H. A. Davis and R. J. Elliott, eds.), Stochastics Monographs, vol. 5, Gordon and Breach, London, 1991, pp. 389–414.
4. M. Schweizer, *On the minimal martingale measure and the Follmer–Schweizer decomposition*, Stochastic Analysis and Applications **13** (1995), 573–599.
5. T. Arai, *The relations between minimal martingale measure and minimal entropy martingale measure*, Asia-Pacific Financial Markets **8** (2001), 137–177.
6. F. Biagini and M. Pratelli, *Local risk minimization and numeraire*, Journal of Applied Probability **36** (1999), 1126–1139.
7. T. Choulli and C. Stricker, *Minimal entropy-Hellinger martingale measure in incomplete markets*, Mathematical Finance **15** (2005), 465–490.
8. A. Cerny and J. Kallsen, *On the structure of general mean-variance hedging strategies*, Annals of Probability **35** (2007), 1479–1531.
9. T. Chan, *Pricing contingent claims on stocks driven by Levy processes*, Annals of Applied Probability **9** (1999), 504–528.
10. D. B. Colwell and R. J. Elliott, *Discontinuous asset prices and non-attainable contingent claims*, Mathematical Finance **3** (1993), 295–308.
11. H. Follmer and A. Schied, *Stochastic Finance: An Introduction in Discrete Time*, Walter de Gruyter, 2004.

Механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 64 Володимирська, 01033 Київ, Україна

Адреса електронної пошти: `vadym.doroshenko@gmail.com`

Надійшла 22/01/11