Теорія ймовір. та матем. статист. Вип. 84, 2011, стор. 43–56

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst. No. 84, 2011, pp. 43–56

ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ПЕРІОДИЧНО КОРЕЛЬОВАНИХ СТОХАСТИЧНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

УДК 519.21

І. І. ДУБОВЕЦЬКА, О. Ю. МАСЮТКА І М. П. МОКЛЯЧУК

Анотація. Досліджується задача оптимального оцінювання лінійного функціонала від невідомих значень періодично корельованої послідовності за спостереженнями послідовності з адитивним шумом. Знайдені формули для обчислення середньоквадратичної похибки та спектральної характеристики оптимальної оцінки функціонала. Для заданого класу допустимих спектральних щільностей визначені найменш сприятливі спектральні щільності та мінімаксна спектральна характеристика оптимальної оцінки функціонала.

Abstract. The problem of optimal estimation of a linear functional depending on the unknown values of periodically correlated stochastic sequence from observations of the sequence with additive noise is considered. Formulas for calculating mean square error and spectral characteristic of optimal linear estimation of the functional are proposed in the case where spectral densities are exactly known. Formulas that determine the least favorable spectral density and the minimax spectral characteristic are proposed for the given class of admissible spectral densities.

Аннотация. Исследуется задача оптимального оценивания линейного функционала от неизвестных значений периодически коррелированной последовательности по наблюдениям последовательности с аддитивным шумом. Найдены формулы для вычисления среднеквадратической ошибки и спектральной характеристики оптимальной оценки функционала. Для заданного класса допустимых спектральных плотностей определены наимение благоприятные спектральные плотности и минимаксная спектральная характеристика оптимальной линейной оценки функционала.

1. Вступ

У статті Е. Г. Гладишева [1] проведено аналіз спектральних властивостей та зображень періодично корельованих процесів, який базується на зв'язку періодично корельованих та векторних стаціонарних послідовностей. Завдяки результатам Е. Г. Гладишева задача оцінювання періодично корельованих послідовностей зводиться до відповідної задачі для векторних стаціонарних послідовностей. Основні ідеї зображення періодично корельованих процесів через простіші випадкові послідовності досліджуються Л. Хердом та А. Міамі [2].

Класичні методи розв'язування задач екстраполяції, інтерполяції та фільтрації стаціонарних процесів із відомими спектральними щільностями запропоновані А. М. Колмогоровим [3], Н. Вінером [4], А. М. Ягломом [5, 6]. Задача прогнозу векторних стаціонарних послідовностей досліджена Ю. А. Розановим [7]. У тому

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60G10, 60G25, 60G35; Secondary 62M20, 93E10, 93E11.

Ключові слова і фрази. Періодично корельована послідовність, робастна оцінка, середньоквадратична похибка, найменш сприятлива спектральна щільність, мінімаксна спектральна характеристика.

випадку, коли повна інформація про точні значення спектральних щільностей відсутня, але задана множина допустимих спектральних щільностей, застосовують мінімаксний метод розв'язування задачі оцінювання. Тобто шукають оцінку, яка мінімізує значення похибки одночасно для всіх щільностей із заданого класу. У. Гренандер [8] вперше застосував мінімаксний підхід до задачі екстраполяції стаціонарних процесів. У роботах Ю. Франке [9, 10], Ю. Франке та Х. Пура [11] досліджуються задачі мініміксної екстраполяції та фільтрації стаціонарних послідовностей за допомогою методів опуклої оптимізації. М. П. Моклячук [12]–[18], М. П. Моклячук та А. Ю. Масютка [19]–[21] досліджували задачі екстраполяції, інтерполяції та фільтрації для стаціонарних процесів і послідовностей.

У даній роботі вивчається задача оптимального лінійного оцінювання функціонала $A_N\zeta = \sum_{j=0}^{N} a(j)\zeta(j)$ від невідомих значень періодично корельованої послідовності $\zeta(j)$ за спостереженнями послідовності $\zeta(j)+\theta(j)$ при $j \in \mathbb{Z}\setminus\{0,1,\dots,N\}$, де $\theta(j)$ — некорельована з $\zeta(j)$ періодично корельована послідовність. Виведено формули для обчислення спектральної характеристики та середньоквадратичної похибки оцінки функціонала у тому випадку, коли відомі спектральні щільності послідовності $\zeta(j)$ та шуму $\theta(j)$. Якщо ж спектральні щільності невідомі, але задана множина допустимих спектральних щільностей, то вказано формули для визначення найменш сприятливих спектральних щільностей та мінімаксної спектральної характеристики оптимальної лінійної оцінки функціонала.

2. Періодично корельовані послідовності, які породжуються векторними стаціонарними

Періодично корельовані послідовності є стохастичними послідовностями з періодичною структурою [1, 2].

Означення 2.1. Послідовність комплекснозначних випадкових величин $\zeta(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, зі скінченним другим моментом, $\mathsf{E}\,|\zeta(n)|^2 < +\infty$, називається періодично корельованою з періодом T (T-ПК), якщо

$$\mathsf{E}\,\zeta(n+T) = E\zeta(n), \tag{1}$$

$$\mathsf{E}\,\zeta(n+T)\overline{\zeta(m+T)} = R(n+T,m+T) = R(n,m), \tag{2}$$

і не існує меншого за $T>0$ числа такого, що виконуються рівності (1) та (2).

Дослідження властивостей періодично корельованих стохастичних послідовностей було розпочате Е. Г. Гладишевим [1]. Зауважимо, що випадкові періодичні процеси В. Р. Беннет [22] назвав циклостаціонарними.

Означення 2.2 ([7])**.** Комплекснозначна T-вимірна випадкова послідовність $\vec{\xi}(n) = \{\xi_k(n)\}_{k=0}^{T-1}$, $n \in \mathbb{Z}$, зі скінченним другим моментом, $\mathsf{E}\,\|\vec{\xi}(n)\|^2 < \infty$, називається стаціонарною, якщо для всіх $n,m \in \mathbb{Z}$ та $j,k \in \{0,1,\dots,T-1\}$

$$\mathsf{E}\,\xi_k(n) = m_k,$$

$$\mathsf{E}\,\xi_k(n)\overline{\xi_j(m)} = R_{kj}(n,m) = R_{kj}(n-m).$$

В цьому випадку матрицю $R(n) = \{R_{kj}(n)\}_{k,j=0}^{T-1}$, $n \in \mathbb{Z}$, називають коваріаційною матрицею T-вимірної стаціонарної послідовності $\vec{\xi}(n)$.

Теорема 2.1 (Е. Г. Гладишев [1])**.** *Послідовність $\zeta(n)$ є періодично корельованою стохастичною послідовністю з періодом T тоді і лише тоді, коли існує T-вимірна* *стаціонарна послідовність* $\vec{\xi}(n) = \{\xi_k(n)\}_{k=0}^{T-1}$ *така, що* $\zeta(n)$ *має наступне зображення*

$$\zeta(n) = \sum_{k=0}^{T-1} e^{2\pi ink/T}\xi_k(n), \qquad n \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

Послідовність $\vec{\xi}(n)$ *називають такою, що породжує послідовність* $\zeta(n)$.

Позначимо через $f^{\vec{\xi}}(\lambda)$ матрицю спектральної щільності T-вимірної стаціонарної послідовності $\vec{\xi}(n) = \{\xi_k(n)\}_{k=0}^{T-1}$. Через $f^{\vec{\zeta}}(\lambda)$ позначимо матрицю спектральної щільності T-вимірної стаціонарної послідовності $\vec{\zeta}(n)$, яка будується розбиттям періодично корельованої послідовності $\zeta(n)$ на блоки довжини T. Тобто p-та координата вектора $\vec{\zeta}(n)$ дорівнює

$$[\vec{\zeta}(n)]^p = \zeta(nT+p), \qquad n \in \mathbb{Z},\ p = 0,1,\dots,T-1.$$

Якщо існує спектральна щільність $f^{\vec{\xi}}(\lambda)$, то існує спектральна щільність $f^{\vec{\zeta}}(\lambda)$ і для них виконується співвідношення

$$f^{\vec{\zeta}}(\lambda) = T\cdot V(\lambda) f^{\vec{\xi}}(\lambda/T) V^{-1}(\lambda), \tag{4}$$

де $V(\lambda)$ — унітарна матриця з елементами

$$v_{kj}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{2\pi ijk/T + ij\lambda/T}, \qquad k,j = 0,1,\dots,T-1.$$

Неперервність $V(\lambda)$ для $\lambda \in [-\pi,\pi)$ та існування оберненої до $V(\lambda)$ матриці дає можливість записати (4) у вигляді

$$f^{\vec{\xi}}(\lambda) = \frac{1}{T}\cdot V^{-1}(T\lambda) f^{\vec{\zeta}}(T\lambda) V(T\lambda). \tag{5}$$

3. Метод проекцій для лінійної інтерполяції

Нехай $\zeta(n)$, $\theta(n)$ — некорельовані між собою T-періодично корельовані стохастичні послідовності. Розглянемо задачу оптимального лінійного оцінювання функціонала $A_N\zeta = \sum_{j=0}^N a(j)\zeta(j)$, який залежить від невідомих значень $\zeta(n)$, за спостереженнями послідовності $\zeta(j)+\theta(j)$ при $j \in \mathbb{Z}\setminus\{0,1,\dots,N\}$.

Застосовуючи співвідношення (3) для ПК та векторних стаціонарних послідовностей, отримаємо наступне перетворення функціонала $A_N\zeta$

$$\begin{aligned} A_N\zeta &= \sum_{j=0}^N a(j)\zeta(j) = \sum_{j=0}^N a(j) \sum_{k=0}^{T-1} e^{2\pi ijk/T}\xi_k(j) \\ &= \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^{T-1} a(j) e^{2\pi ijk/T}\xi_k(j) = \sum_{j=0}^N \vec{a}^\top(j)\vec{\xi}(j) = A_N\vec{\xi}, \end{aligned}$$

де $\vec{a}(j) = (a_0(j),\dots,a_{T-1}(j))^\top$, $a_k(j) = a(j)e^{2\pi ijk/T}$, $k = 0,1,\dots,T-1$, $\vec{\xi}(j) = \{\xi_k(j)\}_{k=0}^{T-1}$ — T-вимірна стаціонарна послідовність, що породжує $\zeta(j)$.

Нехай $\vec{\xi}(j)$ та $\vec{\eta}(j)$ — некорельовані T-вимірні стаціонарні стохастичні послідовності з матрицями спектралних щільностей

$$f^{\vec{\xi}}(\lambda) = \left\{f_{kl}^{\vec{\xi}}(\lambda)\right\}_{k,l=0}^{T-1} \quad \text{та} \quad f^{\vec{\eta}}(\lambda) = \left\{f_{kl}^{\vec{\eta}}(\lambda)\right\}_{k,l=0}^{T-1},$$

відповідно. Розглянемо задачу оптимального лінійного оцінювання функціонала

$$A_N\vec{\xi} = \sum_{j=0}^N \vec{a}^\top(j)\vec{\xi}(j),$$

який залежить від невідомих значень $\vec{\xi}(j)$, за спостереженнями послідовності $\vec{\xi}(j)+\vec{\eta}(j)$ при $j\in\mathbb{Z}\setminus\{0,1,\ldots,N\}$.

Нехай спектральні щільності $f^{\vec{\xi}}(\lambda)$ та $f^{\vec{\eta}}(\lambda)$ задовольняють умову мінімальності [7]

$$\int_{-\pi}^{\pi} Tr\left[\left(f^{\vec{\xi}}(\lambda)+f^{\vec{\eta}}(\lambda)\right)^{-1}\right]d\lambda<+\infty. \tag{6}$$

Умова (6) є необхідною та достатньою для того, щоб безпомилкова інтерполяція невідомих значень послідовності $\vec{\xi}(j)+\vec{\eta}(j)$ була неможлива [7]. Позначимо через $L_2(f)$ гільбертів простір векторних комплекснозначних функцій $b(\lambda)=\{b_k(\lambda)\}_{k=0}^{T-1}$, інтегрованих в квадраті за мірою із щільністю $f(\lambda)=\{f_{kl}(\lambda)\}_{k,l=0}^{T-1}$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} b^{\top}(\lambda)f(\lambda)\overline{b(\lambda)}\,d\lambda=\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k,l=0}^{T-1} b_k(\lambda)\overline{b_l(\lambda)}f_{kl}(\lambda)\,d\lambda<+\infty.$$

Через $L_2^{N-}(f)$ позначимо підпростір в $L_2(f)$, породжений функціями $e^{ij\lambda}\delta_k$, $\delta_k=\{\delta_{kl}\}_{l=0}^{T-1}$, $k=0,1,\ldots,T-1$, $j\in\mathbb{Z}\setminus\{0,1,\ldots,N\}$, де $\delta_{kk}=1$, $\delta_{kl}=0$ для $k\neq l$.

Кожна лінійна оцінка $\hat{A}_N\vec{\xi}$ функціонала $A_N\vec{\xi}$ за спостереженнями послідовності $\vec{\xi}(j)+\vec{\eta}(j)$ для $j\in\mathbb{Z}\setminus\{0,1,\ldots,N\}$ має вигляд

$$\hat{A}_N\vec{\xi}=\int_{-\pi}^{\pi} h^{\top}\left(e^{i\lambda}\right)\left(Z^{\xi}(d\lambda)+Z^{\eta}(d\lambda)\right)=\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=0}^{T-1} h_k\left(e^{i\lambda}\right)\left(Z_k^{\xi}(d\lambda)+Z_k^{\eta}(d\lambda)\right),$$

де $Z^{\xi}(\Delta)=\left\{Z_k^{\xi}(\Delta)\right\}_{k=0}^{T-1}$ та $Z^{\eta}(\Delta)=\{Z_k^{\eta}(\Delta)\}_{k=0}^{T-1}$ — ортогональні випадкові міри послідовностей $\vec{\xi}(j)$ та $\vec{\eta}(j)$, $h(e^{i\lambda})=\left\{h_k(e^{i\lambda})\right\}_{k=0}^{T-1}$ — спектральна характеристика оцінки $\hat{A}_N\vec{\xi}$. Функція $h(e^{i\lambda})\in L_2^{N-}(f^{\vec{\xi}}+f^{\vec{\eta}})$.

Середньоквадратична похибка $\Delta(h;f^{\vec{\xi}},f^{\vec{\eta}})$ оцінки $\hat{A}_N\vec{\xi}$ обчислюється за формулою

$$\begin{aligned}\Delta\left(h;f^{\vec{\xi}},f^{\vec{\eta}}\right)&=\mathsf{E}\left|A_N\vec{\xi}-\hat{A}_N\vec{\xi}\right|^2\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\left[A_N(e^{i\lambda})-h(e^{i\lambda})\right]^{\top}f^{\vec{\xi}}(\lambda)\overline{\left[A_N(e^{i\lambda})-h(e^{i\lambda})\right]}\\&\qquad\qquad+h^{\top}(e^{i\lambda})f^{\vec{\eta}}(\lambda)\overline{h(e^{i\lambda})}\Big)\,d\lambda,\end{aligned}$$

$$A_N(e^{i\lambda})=\sum_{j=0}^{N}\vec{a}(j)e^{ij\lambda}.$$

Спектральна характеристика $h(f^{\vec{\xi}},f^{\vec{\eta}})$ оптимальної лінійної оцінки $A_N\vec{\xi}$ мінімізує значення середньоквадратичної похибки

$$\begin{aligned}\Delta\left(f^{\vec{\xi}},f^{\vec{\eta}}\right)&=\Delta\left(h\left(f^{\vec{\xi}},f^{\vec{\eta}}\right);f^{\vec{\xi}},f^{\vec{\eta}}\right)\\&=\min_{h\in L_2^{N-}\left(f^{\vec{\xi}}+f^{\vec{\eta}}\right)}\Delta\left(h;f^{\vec{\xi}},f^{\vec{\eta}}\right)=\min_{\hat{A}_N\vec{\xi}}\mathsf{E}\left|A_N\vec{\xi}-\hat{A}_N\vec{\xi}\right|^2.\end{aligned}\tag{7}$$

Оптимальна лінійна оцінка $\hat{A}_N\vec{\xi}$ є розв'язком оптимізаційної задачі (7). Використавши класичний метод проекцій А. М. Колмогорова [3], отримуємо

$$\begin{aligned}h^{\top}\left(f^{\vec{\xi}},f^{\vec{\eta}}\right)&=\left(A_N^{\top}\left(e^{i\lambda}\right)f^{\vec{\xi}}(\lambda)-C_N^{\top}\left(e^{i\lambda}\right)\right)\left[f^{\vec{\xi}}(\lambda)+f^{\vec{\eta}}(\lambda)\right]^{-1}\\&=A_N^{\top}\left(e^{i\lambda}\right)-\left(A_N^{\top}\left(e^{i\lambda}\right)f^{\vec{\eta}}(\lambda)+C_N^{\top}\left(e^{i\lambda}\right)\right)\left[f^{\vec{\xi}}(\lambda)+f^{\vec{\eta}}(\lambda)\right]^{-1},\end{aligned}\tag{8}$$

$$\Delta\left(f^{\vec{\xi}},f^{\vec{\eta}}\right)=\langle\vec{a}_N,R_N\vec{a}_N\rangle+\langle\vec{c}_N,B_N\vec{c}_N\rangle, \tag{9}$$

де

$$C_N(e^{i\lambda})=\sum_{j=0}^{N}\vec{c}(j)e^{ij\lambda},\qquad \vec{a}_N=\{\vec{a}(k)\}_{k=0}^{N},\qquad \vec{c}_N=\{\vec{c}(k)\}_{k=0}^{N}=B_N^{-1}D_N\vec{a}_N,$$

$\langle a,b\rangle$ — скалярний добуток, B_N, D_N, R_N — матриці, елементами яких є $T\times T$ блок-матриці:

$$B_N(j,k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\left(f^{\vec{\xi}}(\lambda)+f^{\vec{\eta}}(\lambda)\right)^{-1}\right]^{\top}e^{i(k-j)\lambda}\,d\lambda,$$

$$D_N(j,k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f^{\vec{\xi}}(\lambda)\left(f^{\vec{\xi}}(\lambda)+f^{\vec{\eta}}(\lambda)\right)^{-1}\right]^{\top}e^{i(k-j)\lambda}\,d\lambda,$$

$$R_N(j,k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f^{\vec{\xi}}(\lambda)\left(f^{\vec{\xi}}(\lambda)+f^{\vec{\eta}}(\lambda)\right)^{-1}f^{\vec{\eta}}(\lambda)\right]^{\top}e^{i(k-j)\lambda}d\lambda,\qquad k,j=0,1,\dots,N.$$

Отже, справедлива наступна теорема для інтерполяції T-вимірної стаціонарної послідовності [19].

Теорема 3.1. *Нехай $\vec{\xi}(j)=\{\xi_k(j)\}_{k=0}^{T-1}$ та $\vec{\eta}(j)=\{\eta_k(j)\}_{k=0}^{T-1}$ — некорельовані T-вимірні стаціонарні послідовності із матрицями спектральних щільностей*

$$f^{\vec{\xi}}(\lambda)=\left\{f^{\vec{\xi}}_{kj}(\lambda)\right\}_{k,j=0}^{T-1}\quad \text{та}\quad f^{\vec{\eta}}(\lambda)=\left\{f^{\vec{\eta}}_{kj}(\lambda)\right\}_{k,j=0}^{T-1},$$

відповідно. Припустимо, що матриці $f^{\vec{\xi}}(\lambda)$ та $f^{\vec{\eta}}(\lambda)$ задовольняють умову мінімальності (6). Тоді спектральна характеристика $h\big(f^{\vec{\xi}},f^{\vec{\eta}}\big)$ і середньоквадратична похибка $\Delta\big(f^{\vec{\xi}},f^{\vec{\eta}}\big)$ лінійної оптимальної оцінки функціонала $A_N\vec{\xi}$, побудована за спостереженнями послідовності $\vec{\xi}(j)+\vec{\eta}(j)$, $j\in\mathbb{Z}\setminus\{0,1,\dots,N\}$, обчислюються за формулами (8) та (9).

Наслідок 3.1. *Нехай $\vec{\xi}(j)=\{\xi_k(j)\}_{k=0}^{T-1}$ — T-вимірна стаціонарна послідовність із матрицею спектральної щільності $f^{\vec{\xi}}(\lambda)$, яка задовольняє умову мінімальності*

$$\int_{-\pi}^{\pi}Tr\left[\left(f^{\vec{\xi}}(\lambda)\right)^{-1}\right]d\lambda<+\infty. \tag{10}$$

Тоді спектральна характеристика $h(f^{\vec{\xi}})$ та середньоквадратична похибка $\Delta(f^{\vec{\xi}})$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A_N\vec{\xi}$ за спостереженнями послідовності $\vec{\xi}(j)$, $j\in\mathbb{Z}\setminus\{0,1,\dots,N\}$ обчислюються за формулами

$$h^{\top}(f^{\vec{\xi}})=A_N^{\top}\left(e^{i\lambda}\right)-C_N^{\top}\left(e^{i\lambda}\right)\left[f^{\vec{\xi}}(\lambda)\right]^{-1}, \tag{11}$$

$$\Delta\left(f^{\vec{\xi}}\right)=\langle\vec{c}_N,\vec{a}_N\rangle, \tag{12}$$

де $\vec{a}_N=\{\vec{a}(k)\}_{k=0}^{N}$, $\vec{c}_N=\{\vec{c}(k)\}_{k=0}^{N}=B_N^{-1}\vec{a}_N$, B_N — матриця, побудована із $T\times T$ блок-матриць:

$$B_N(j,k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\left(f^{\vec{\xi}}(\lambda)\right)^{-1}\right]^{\top}e^{i(k-j)\lambda}\,d\lambda,\qquad k,j=0,1,\dots,N.$$

Використовуючи останню теорему, можна розв'язати задачу оцінювання функціонала $A_N\zeta$ від Т-ПК послідовності. Справджується наступна теорема.

Теорема 3.2. *Нехай $\zeta(j)$ та $\theta(j)$ — некорельовані T-ПК стохастичні послідовності. Тоді оптимальна лінійна оцінка функціонала $A_N\zeta$, побудована за спостереженнями послідовності $\zeta(j)+\theta(j)$, $j \in \mathbb{Z}\setminus\{0,1,\dots,N\}$, задається формулою*

$$\hat{A}_N\zeta = \int_{-\pi}^{\pi} h^\top \left(f^{\vec{\xi}}, f^{\vec{\eta}}\right) \left(Z^{\xi}(d\lambda) + Z^{\eta}(d\lambda)\right) = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{T-1} h_k \left(f^{\vec{\xi}}, f^{\vec{\eta}}\right) \left(Z_k^{\xi}(d\lambda) + Z_k^{\eta}(d\lambda)\right),$$

де $\vec{\xi}(j)$ та $\vec{\eta}(j)$ — векторні послідовності, які породжують T-ПК стохастичні послідовності $\zeta(j)$ та $\theta(j)$, відповідно. Спектральна характеристика $h(f^{\vec{\xi}}, f^{\vec{\eta}})$ та середньоквадратична похибка $\Delta(f^{\vec{\xi}}, f^{\vec{\eta}})$ оцінки $\hat{A}_N\zeta$ обчислюються за формулами (8), (9), де $\vec{a}(j) = (a_0(j),\dots,a_{T-1}(j))^\top$, $a_k(j) = a(j)e^{2\pi ijk/T}$, $k = 0,1,\dots,T-1$. Матриці спектральних щільностей $f^{\vec{\zeta}}(\lambda)$ та $f^{\vec{\theta}}(\lambda)$ T-вимірних стаціонарних послідовностей $\vec{\zeta}(j)$ та $\vec{\theta}(j)$, які отримані поділом одновимірних ПК послідовностей $\zeta(j)$ і $\theta(j)$ на блоки довжини T, пов'язані із відповідними матрицями спектральних щільностей $f^{\vec{\xi}}(\lambda)$ та $f^{\vec{\eta}}(\lambda)$ послідовностей $\vec{\xi}$ та $\vec{\eta}$ співвідношенням (4).

Наслідок 3.2. *Нехай $\zeta(j)$ — T-ПК випадкова послідовність. Тоді оптимальна лінійна оцінка функціонала $A_N\zeta$, побудована за спостереженнями послідовності $\zeta(j)$, $j \in \mathbb{Z}\setminus\{0,1,\dots,N\}$, задається формулою*

$$\hat{A}_N\zeta = \int_{-\pi}^{\pi} h^\top \left(f^{\vec{\xi}}\right) Z^{\xi}(d\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{T-1} h_k \left(f^{\vec{\xi}}\right) Z_k^{\xi}(d\lambda), \tag{13}$$

де $\vec{\xi}(j)$ — стаціонарна послідовність, яка породжує T-ПК стохастичну послідовність $\zeta(j)$. Спектральна характеристика $h(f^{\vec{\xi}})$ та середньоквадратична похибка $\Delta(f^{\vec{\xi}})$ оцінки $\hat{A}_N\zeta$ обчислюються за формулами (11), (12), де

$$\vec{a}(j) = (a_0(j),\dots,a_{T-1}(j))^\top, \qquad a_k(j) = a(j)e^{2\pi ijk/T}, \quad k = 0,1,\dots,T-1.$$

Матриця спектральної щільності $f^{\vec{\zeta}}$ T-вимірної стаціонарної послідовності $\vec{\zeta}(j)$, яка отримана поділом одновимірної ПК послідовності $\zeta(j)$ на блоки довжини T, пов'язана із відповідною матрицею спектральної щільності $f^{\vec{\xi}}$ послідовності $\vec{\xi}$ співвідношенням (4).

Приклад 3.1. Роглянемо 2-ПК послідовність $\zeta(n) = \xi_0(n) + e^{\pi in}\xi_1(n)$, де $\vec{\xi}(n) = \begin{pmatrix}\xi_0(n)\\ \xi_1(n)\end{pmatrix}$ — 2-вимірна стаціонарна послідовність. Нехай $\xi_0(n) = \eta(n)$ — одновимірна стаціонарна послідовність із спектральною щільністю $f(\lambda) = (2\pi)^{-1}$ (білий шум), $\xi_1(n) = \gamma(n)$ — некорельована з $\eta(n)$ одновимірна стаціонарна послідовність із спектральною щільністю $g(\lambda) = (5+4\cos\lambda)/(2\pi) = \left|2+e^{i\lambda}\right|^2/(2\pi)$.

Оцінимо функціонал

$$A_1\zeta = 2\zeta(0) - 3\zeta(1) = (2,2)\begin{pmatrix}\xi_0(0)\\ \xi_1(0)\end{pmatrix} + (-3,3)\begin{pmatrix}\xi_0(1)\\ \xi_1(1)\end{pmatrix} = A_1\vec{\xi}$$

за спостереженнями $\zeta(n)$, $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0,1\}$. Тут $a(0) = 2$, $a(1) = -3$.

В цьому випадку матриця спектральної щільності $\vec{\xi}(n)$

$$f^{\vec{\xi}}(\lambda) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & 0\\ 0 & g(\lambda)\end{pmatrix}$$

і $[f^{\vec{\xi}}(\lambda)]^{-1}$ задовольняє умову мінімальності (10). Матриця B_1, обернена до неї матриця B_1^{-1}, та вектор невідомих коефіцієнтів $\vec{c}_1$ дорівнюють, відповідно,

$$B_1 = \frac{2\pi}{3}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 4\end{pmatrix}, \qquad B_1^{-1} = \frac{1}{4\pi}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 2\end{pmatrix}, \qquad \vec{c}_1 = \frac{1}{4\pi}\begin{pmatrix}4\\ 7\\ -6\\ 8\end{pmatrix}.$$

Тоді спектральна характеристика, що визначається за формулою (11), дорівнює

$$h^{\top}(f^{\vec{\xi}}) = \left(0, -\frac{2}{3}\sum_{\substack{j=-\infty,\\ j\neq 0,1}}^{\infty}(-1)^j\left(\frac{7}{2^{|j|}} - \frac{8}{2^{|j-1|}}\right)e^{ij\lambda}\right).$$

Оптимальна лінійна оцінка $A_1\zeta$, визначена рівністю (13), має вигляд

$$\hat{A}_1\zeta = -\frac{2}{3}\sum_{\substack{j=-\infty,\\ j\neq 0,1}}^{\infty}(-1)^j\left(\frac{7}{2^{|j|}} - \frac{8}{2^{|j-1|}}\right)\xi_1(j).$$

Середньоквадратична похибка оцінки значення $\hat{A}_1\zeta$, обчислена за (12), дорівнює $\Delta(f^{\vec{\xi}}) = \frac{16}{\pi} \approx 5.09$. Матриця спектральної щільності T-вимірної стаціонарної послідовності $\vec{\zeta}(j)$ за (4) дорівнює

$$f^{\vec{\zeta}}(\lambda) = \frac{1}{\pi}\begin{pmatrix}3+2\cos(\frac{\lambda}{2}) & -2e^{\frac{-i\lambda}{2}} - 1 - e^{-i\lambda}\\ -2e^{\frac{i\lambda}{2}} - 1 - e^{i\lambda} & 3+2\cos(\frac{\lambda}{2})\end{pmatrix}.$$

Приклад 3.2. Нехай $\zeta(n) = \xi_0(n) + e^{\pi i n}\xi_1(n)$, де $\xi_0(n) = \eta(n)$ — одновимірна стаціонарна послідовність Орнштейна-Уленбека із спектральною щільністю $f(\lambda) = \frac{q_1}{2\pi|1-be^{-i\lambda}|^2}$, $\xi_1(n) = \eta(n) + \gamma(n)$, де $\gamma(n)$ — некорельована з $\eta(n)$ одновимірна стаціонарна послідовність із спектральною щільністю $g(\lambda) = q_2/(2\pi)$, $q_1, q_2 \geq 0$, $|b| < 1$.

Оцінимо функціонал $A_1\zeta = a(0)\zeta(0) + a(1)\zeta(1)$ з $a(0) = \alpha$, $a(1) = \beta$.

В цьому випадку матриця спектральої щільності $\vec{\xi}(n)$

$$f^{\vec{\xi}}(\lambda) = \begin{pmatrix}f(\lambda) & f(\lambda)\\ f(\lambda) & f(\lambda)+g(\lambda)\end{pmatrix}$$

та $[f^{\vec{\xi}}(\lambda)]^{-1}$ задовольняє умову мінімальності (10). Спектральна характеристика лінійної оптимальної оцінки $A_1\zeta$, обчислена за (11), дорівнює

$$h^{\top}(f^{\vec{\xi}}) = \left(\frac{2\alpha b}{1+b^2+b^4}\left[\left(1+b^2\right)e^{-i\lambda} + be^{2i\lambda}\right], 0\right).$$

Оптимальна лінійна оцінка $A_1\zeta$, задана формулою (13), має вигляд

$$\hat{A}_1\zeta = \frac{2\alpha b}{1+b^2+b^4}\left(1+b^2\right)\xi_0(-1) + \frac{2\alpha b^2}{1+b^2+b^4}\xi_0(2).$$

Середньоквадратична похибка такої оцінки, обчислена за (12), приймає значення

$$\Delta(f^{\vec{\xi}}) = \frac{q_2}{2\pi}\left(\alpha^2+\beta^2\right) + \frac{4\alpha^2 q_1}{1\pi(1+b^2+b^4)}\left(1+b^2\right).$$

Матриця спектральної щільності T-вимірної стаціонарної послідовності $\vec{\zeta}(j)$ із співвідношення (4) дорівнює

$$f^{\vec{\zeta}}(\lambda) = \frac{q_2}{2\pi}\begin{pmatrix}\frac{4q_1}{q_2|1-be^{-i\lambda/2}|^2} + 1 & e^{-i\lambda/2}\\ e^{i\lambda/2} & 1\end{pmatrix}.$$

В термінах матриць спектральних щільностей $f^{\vec{\zeta}}(\lambda)$ та $f^{\vec{\theta}}(\lambda)$ T-вимірних стаціонарних послідовностей $\vec{\zeta}(j)$ та $\vec{\theta}(j)$, які отримані поділом одновимірних ПК послідовностей $\zeta(j)$ та $\theta(j)$ на блоки довжиною T, відповідно, ми отримаємо наступні результати.

Теорема 3.3. *Нехай $\zeta(j)$ та $\theta(j)$ — некорельовані T-ПК послідовності з матрицями спектральних щільностей $f^{\vec{\zeta}}(\lambda)$ та $f^{\vec{\theta}}(\lambda)$ T-вимірних стаціонарних послідовностей $\vec{\zeta}(j)$ та $\vec{\theta}(j)$, отриманих поділом одновимірних ПК послідовностей $\zeta(j)$ та $\theta(j)$ на блоки довжиною T, відповідно. Припустимо, що $f^{\vec{\zeta}}(\lambda)$ та $f^{\vec{\theta}}(\lambda)$ задовольняють умову мінімальності* (6)*. Тоді оптимальна лінійна оцінка функціонала $A_N\zeta$, побудована за спостереженнями $\zeta(j)+\theta(j)$, $j\in\mathbb{Z}\setminus\{0,1,\dots,N\}$, задається формулою*

$$\hat{A}_N\zeta=\int_{-\pi}^{\pi}h^{\top}\left(f^{\vec{\zeta}},f^{\vec{\theta}}\right)\left(Z^{\xi}(d\lambda)+Z^{\eta}(d\lambda)\right)=\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=0}^{T-1}h_k\left(f^{\vec{\zeta}},f^{\vec{\theta}}\right)\left(Z^{\xi}_k(d\lambda)+Z^{\eta}_k(d\lambda)\right),$$

де $\vec{\xi}(j)$ та $\vec{\eta}(j)$ — стаціонарні послідовності, які породжують $\zeta(j)$ та $\theta(j)$. Спектральна характеристика $h\big(f^{\vec{\zeta}},f^{\vec{\theta}}\big)$ та середньоквадратична похибка $\Delta\big(f^{\vec{\zeta}},f^{\vec{\theta}}\big)$ оцінки $\hat{A}_N\zeta$ обчислюються за формулами

$$\begin{aligned}h^{\top}\left(f^{\vec{\zeta}},f^{\vec{\theta}}\right)&=\left(A_N^{\top}\left(e^{i\lambda}\right)V^{-1}(T\lambda)f^{\vec{\zeta}}(T\lambda)-T\cdot C_N^{\top}(e^{i\lambda})V^{-1}(T\lambda)\right)\\&\quad\times\left[f^{\vec{\zeta}}(T\lambda)+f^{\vec{\theta}}(T\lambda)\right]^{-1}V(T\lambda)\\&=A_N^{\top}\left(e^{i\lambda}\right)\\&\quad-\left(A_N^{\top}\left(e^{i\lambda}\right)V^{-1}(T\lambda)f^{\vec{\theta}}(T\lambda)+T\cdot C_N^{\top}\left(e^{i\lambda}\right)V^{-1}(T\lambda)\right)\\&\quad\times\left[f^{\vec{\zeta}}(T\lambda)+f^{\vec{\theta}}(T\lambda)\right]^{-1}V(T\lambda),\end{aligned}\tag{14}$$

$$\Delta\left(f^{\vec{\zeta}},f^{\vec{\theta}}\right)=\left\langle\vec{a}_N,R^{\zeta}_N\vec{a}_N\right\rangle+\left\langle\vec{c}^{\zeta}_N,B^{\zeta}_N\vec{c}^{\zeta}_N\right\rangle,\tag{15}$$

де $\vec{c}^{\zeta}_N=\left\{\vec{c}^{\zeta}(k)\right\}_{k=0}^{N}=\left(B^{\zeta}_N\right)^{-1}D^{\zeta}_N\vec{a}_N$, B^{ζ}_N, D^{ζ}_N, R^{ζ}_N — матриці, елементами яких є $T\times T$ блок-матриці:

$$B^{\zeta}_N(j,k)=\frac{T}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}V^{\top}(T\lambda)\left[\left(f^{\vec{\zeta}}(T\lambda)+f^{\vec{\theta}}(T\lambda)\right)^{-1}\right]^{\top}\overline{V}(T\lambda)e^{i(k-j)\lambda}\,d\lambda,$$

$$D^{\zeta}_N(j,k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}V^{\top}(T\lambda)\left[f^{\vec{\zeta}}(T\lambda)\left(f^{\vec{\zeta}}(T\lambda)+f^{\vec{\theta}}(T\lambda)\right)^{-1}\right]^{\top}\overline{V}(T\lambda)e^{i(k-j)\lambda}\,d\lambda,$$

$$\begin{aligned}D^{\zeta}_N(j,k)&=\frac{1}{T\cdot2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}V^{\top}(T\lambda)\left[f^{\vec{\zeta}}(T\lambda)\left(f^{\vec{\zeta}}(T\lambda)+f^{\vec{\theta}}(T\lambda)\right)^{-1}f^{\vec{\theta}}(T\lambda)\right]^{\top}\\&\qquad\times\overline{V}(T\lambda)e^{i(k-j)\lambda}\,d\lambda,\end{aligned}$$

$$k,j=0,1,\dots,N.$$

Наслідок 3.3. *Нехай $\zeta(j)$ — T-ПК послідовність з матрицею спектральної щільності $f^{\vec{\zeta}}(\lambda)$ T-вимірної стаціонарної послідовності $\vec{\zeta}(j)$. Припустимо, що $f^{\vec{\zeta}}(\lambda)$ задовольняє умову мінімальності* (10)*. Тоді оптимальна лінійна оцінка $A_N\zeta$, побудована за спостереженнями послідовності $\zeta(j)$, $j\in\mathbb{Z}\setminus\{0,1,\dots,N\}$, задається формулою*

$$\hat{A}_N\zeta=\int_{-\pi}^{\pi}h^{\top}\left(f^{\vec{\zeta}}\right)Z^{\xi}(d\lambda)=\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=0}^{T-1}h_k\left(f^{\vec{\zeta}}\right)Z^{\xi}_k(d\lambda),$$

де $\vec{\xi}(j)$ — стаціонарна послідовність, що породжує $\zeta(j)$. Спектральна характеристика $h(f^{\vec{\zeta}})$ та середньоквадратична похибка $\Delta(f^{\vec{\zeta}})$ оцінки $\hat{A}_N\zeta$ обчислюються за формулами

$$h^\top\left(f^{\vec{\zeta}}\right) = A_N^\top\left(e^{i\lambda}\right) - T\cdot C_N^\top\left(e^{i\lambda}\right)V^{-1}(T\lambda)\left[f^{\vec{\zeta}}(T\lambda)\right]^{-1}V(T\lambda), \tag{16}$$

$$\Delta\left(f^{\vec{\zeta}}\right) = \left\langle \vec{c}_N^{\,\zeta}, \vec{a}_N\right\rangle, \tag{17}$$

де $\vec{c}_N^{\,\zeta} = \left\{\vec{c}^{\,\zeta}(k)\right\}_{k=0}^N = \left(B_N^\zeta\right)^{-1}\vec{a}_N$, B_N^ζ — матриця, побудована із $T\times T$ блок-матриць:

$$B_N^\zeta(j,k) = \frac{T}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} V^\top(T\lambda)\left[\left(f^{\vec{\zeta}}(T\lambda)\right)^{-1}\right]^\top \overline{V}(T\lambda)e^{i(k-j)\lambda}\,d\lambda,$$

$$k, j = 0, 1, \ldots, N.$$

Приклад 3.3. Нехай $\zeta(n)$ — 2-ПК послідовність. Нехай $\zeta(2n) = \eta(n)$ — одновимірна послідовність білого шуму з функцією спектральної щільності $f(\lambda) = a/(2\pi)$, $a \geq 0$, а $\zeta(2n+1) = \gamma(n)$ — некорельована з $\eta(n)$ одновимірна стаціонарна послідовність Орнштейна-Уленбека із спектральною щільністю $g(\lambda) = \frac{b}{2\pi|1-ce^{i\lambda}|^2}$, $b \geq 0$, $|c| < 1$.

Оцінимо функціонал $A_1\zeta$ з коефіцієнтами $a(0) = \alpha$, $a(1) = \beta$.

В цьому випадку матриця спектральної щільності $\vec{\zeta}(n)$

$$f^{\vec{\zeta}}(\lambda) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & 0 \\ 0 & g(\lambda) \end{pmatrix}$$

та $\left[f^{\vec{\zeta}}(\lambda)\right]^{-1}$ задовольняє умову мінімальності (6). Спектральна характеристика оптимальної оцінки $A_1\zeta$, обчислена за формулою (16), дорівнює

$$h^\top(f^{\vec{\zeta}}) = \left(\frac{c\beta}{1+c}\left[e^{-i\lambda} + e^{3i\lambda}\right], -\frac{c\beta}{1+c}\left[e^{-i\lambda} + e^{3i\lambda}\right]\right).$$

Оптимальна лінійна оцінка $A_1\zeta$ має вигляд

$$\hat{A}_1\zeta = \frac{c\beta}{1+c}\left(\xi_0(-1) + \xi_0(3)\right) - \frac{c\beta}{1+c}\left(\xi_1(-1) + \xi_1(3)\right).$$

Середньоквадратична похибка такої оцінки згідно (17) приймає значення

$$\Delta(f^{\vec{\xi}}) = \frac{1}{2\pi}\left(a\alpha^2 + \frac{\beta^2 b}{1+c}\right).$$

4. Мінімаксний (робастний) метод інтерполяції

Формулами (14)–(17) можна користуватись для обчислення спектральної характеристики та середньоквадратичної похибки оптимальної лінійної оцінки функціонала $A_N\zeta$, якщо відомі матриці спектральних щільностей $f(\lambda)$ та $g(\lambda)$ T-вимірних стаціонарних послідовностей, отриманих поділом одновимірної ПК послідовності на блоки довжини T. Якщо ж матриці щільностей точно не відомі, але задана множина $D = D_f \times D_g$ допустимих спектральних щільностей, застосовується мінімаксний підхід до задач оцінювання функціоналів від невідомих значень стаціонарної послідовності. Ми шукаємо оцінку, яка мінімізує значення середньоквадратичної похибки одночасно для всіх спектральних щільностей із заданого класу D.

Означення 4.1. Для заданої множини пар спектральних щільностей $D = D_f \times D_g$ матриці спектральних щільностей $f^0(\lambda) \in D_f$, $g^0(\lambda) \in D_g$ називаються найменш сприятливими у D для оптимальної лінійної інтерполяції функціонала $A_N\zeta$, якщо

$$\Delta(f^0, g^0) = \Delta\left(h(f^0, g^0); f^0, g^0\right) = \max_{(f,g)\in D} \Delta(h(f,g); f, g).$$

Означення 4.2. Для заданої множини пар спектральних щільностей $D = D_f \times D_g$ спектральна характеристика $h^0(\lambda)$ оптимальної лінійної інтерполяції функціонала $A_N\zeta$ називається мінімаксною (робастною), якщо

$$h^0(\lambda) \in H_D = \bigcap_{(f,g)\in D} L_2^{N-}(f+g), \qquad \min_{h\in H_D} \max_{(f,g)\in D} \Delta(h; f, g) = \max_{(f,g)\in D} \Delta\left(h^0; f, g\right).$$

Виходячи із цих означень та отриманих вище співвідношень (14)–(17), можна перевірити спаравеодливість наступних лем [19].

Лема 4.1. *Матриці спектральних щільнотсей $f^0(\lambda) \in D_f$, $g^0(\lambda) \in D_g$, які задовольняють умову* (6)*, будуть найменш сприятливими в класі D для оптимальної лінійної інтерполяції $A_N\zeta$, якщо коефіцієнти Фур'є матричних функцій*

$$T \cdot V^{-1}(T\lambda)\left(f^0(T\lambda) + g^0(T\lambda)\right)^{-1} V(T\lambda), V^{-1}(T\lambda) f^0(T\lambda)\left(f^0(T\lambda) + g^0(T\lambda)\right)^{-1} V(T\lambda),$$

$$\frac{1}{T} \cdot V^{-1}(T\lambda) f^0(T\lambda)\left(f^0(T\lambda) + g^0(T\lambda)\right)^{-1} g^0(T\lambda) V(T\lambda)$$

задають матриці B_N^0, D_N^0, R_N^0, які визначають розв'язок екстремальної задачі

$$\max_{(f,g)\in D} \left(\left\langle \vec{a}_N, R_N^\zeta \vec{a}_N \right\rangle + \left\langle (B_N^\zeta)^{-1} D_N^\zeta \vec{a}_N, D_N^\zeta \vec{a}_N \right\rangle\right)$$
$$= \left\langle \vec{a}_N, R_N^0 \vec{a}_N \right\rangle + \left\langle \left(B_N^0\right)^{-1} D_N^0 \vec{a}_N, D_N^0 \vec{a}_N \right\rangle.$$

Мінімаксна спектральна характеристика $h^0 = h(f^0, g^0)$ обчислюється за формулою (14) *при умові, що $h(f^0, g^0) \in H_D$.*

Лема 4.2. *Матриця спектральної щільності $f^0(\lambda) \in D_f$, яка задовольняє умову* (10)*, буде найменш сприятливою в класі D_f для оптимальної лінійної інтерполяції $A_N\zeta$, якщо коефіцієнти Фур'є матричної функції $T \cdot V^{-1}(T\lambda)(f^0(T\lambda))^{-1} V(T\lambda)$ задають матрицю B_N^0, яка визначає розв'язок екстремальної задачі*

$$\max_{f\in D_f} \left\langle \left(B_N^\zeta\right)^{-1} \vec{a}_N, \vec{a}_N \right\rangle = \left\langle \left(B_N^0\right)^{-1} \vec{a}_N, \vec{a}_N \right\rangle.$$

Мінімаксна спектральна характеристика $h^0 = h(f^0)$ обчислюється за формулою (16) *при умові, що $h(f^0) \in H_D$.*

Найменш сприятливі спектральні щільності $f^0(\lambda) \in D_f$, $g^0(\lambda) \in D_g$ та мінімаксна спектральна характеристика $h^0 = h(f^0, g^0)$ утворюють сідлову точку функції $\Delta(h; f, g)$ на множині $H_D \times D$. Нерівності сідлової точки

$$\Delta\left(h^0; f, g\right) \leq \Delta\left(h^0; f^0, g^0\right) \leq \Delta\left(h; f^0, g^0\right), \quad \forall h \in H_D,\ \forall f \in D_f,\ \forall g \in D_g$$

виконуються, якщо $h^0 = h(f^0, g^0)$, $h(f^0, g^0) \in H_D$ та (f^0, g^0) є розв'язком задачі на умовний екстремум

$$\begin{aligned}
&\Delta\left(h\left(f^0, g^0\right); f, g\right) \\
&\quad = \frac{1}{2\pi T}\int_{-\pi}^{\pi}\left(A\left(e^{i\lambda}\right)V^{-1}(T\lambda)g^0(T\lambda)V(T\lambda) + TC^0\left(e^{i\lambda}\right)\right)^{\top} \\
&\qquad\qquad \times V^{-1}(T\lambda)\left(f^0(T\lambda)+g^0(T\lambda)\right)^{-1} f(T\lambda)\left(f^0(T\lambda)+g^0(T\lambda)\right)^{-1} V(T\lambda) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \times \overline{\left(A(e^{i\lambda})V^{-1}(T\lambda)g^0(T\lambda)V(T\lambda)+TC^0(e^{i\lambda})\right)}\,d\lambda \\
&\qquad + \frac{1}{2\pi T}\int_{-\pi}^{\pi}\left(A\left(e^{i\lambda}\right)V^{-1}(T\lambda)f^0(T\lambda)V(T\lambda) - T\cdot C^0\left(e^{i\lambda}\right)\right)^{\top} \\
&\qquad\qquad \times V^{-1}(T\lambda)\left(f^0(T\lambda)+g^0(T\lambda)\right)^{-1} g(T\lambda)\left(f^0(T\lambda)+g^0(T\lambda)\right)^{-1} V(T\lambda) \\
&\qquad\qquad \times \left(\overline{A(e^{i\lambda})V^{-1}(T\lambda)f^0(T\lambda)V(T\lambda) - T\cdot C^0(e^{i\lambda})}\right)d\lambda \to \sup, \qquad (f,g)\in D.
\end{aligned}$$

Лема 4.3. *Нехай $f^0(\lambda)$ задовольняє умову мінімальності (10) та є розв'язком задачі на умовний екстремум*

$$\begin{aligned}
\Delta\left(h(f^0); f\right) = \frac{T}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(C_N^0\left(e^{i\lambda}\right)\right)^{\top} V^{-1}(T\lambda)\left(f^0(T\lambda)\right)^{-1} f(T\lambda)\left(f^0(T\lambda)\right)^{-1} V(T\lambda) \\
\times \overline{\left(C_N^0\left(e^{i\lambda}\right)\right)}\,d\lambda \to \sup, \qquad f(\lambda)\in D_f.
\end{aligned} \tag{18}$$

Тоді $f^0(\lambda)$ є найменш сприятливою матрицею спектральної щільності для оптимальної лінійної інтерполяціїї $A_N\zeta$, що побудована за спостереженнями послідовності $\zeta(j)$, $j \in \mathbb{Z}\backslash\{0,1,\ldots,N\}$. Спектральна характеристика $h^0 = h(f^0)$, обчислена за формулою (16), є мінімаксною, якщо $h(f^0) \in H_D$.

5. Найменш сприятливі спектральні щільності для множини D_0^-

Розглянемо задачу мінімаксного оцінювання функціонала $A_N\zeta$ за спостереженнями $\zeta(j)$, $j \in \mathbb{Z}\setminus\{0,1,\ldots,N\}$, матриця спектральної щільності якої $f(\lambda)$ належить множині

$$D_0^- = \left\{f(\lambda)\,\middle|\,\frac{1}{2\pi\cdot T}\int_{-\pi}^{\pi} V^{-1}(T\lambda)f^{-1}(T\lambda)V(T\lambda)\,d\lambda = P\right\},$$

де $P = \{p_{ij}\}_{i,j=0}^{T-1}$ — задана додатно визначена матриця з $\det P \neq 0$. Користуючись лемою 4.3 та методом невизначених множників Лагранжа знаходимо, що розв'язок $f^0(\lambda)$ задачі (18) на умовний екстремум задовольняє наступне рівняння:

$$\frac{1}{T}\cdot\overline{V(T\lambda)}\Big[\left(f^0(T\lambda)\right)^{-1}\Big]^{\top} V^{\top}(T\lambda)C_N^0\left(e^{i\lambda}\right) = \overline{V(T\lambda)}\Big[\left(f^0(T\lambda)\right)^{-1}\Big]^{\top} V^{\top}(T\lambda)\vec{\alpha}, \tag{19}$$

де $\vec{\alpha} = (\alpha_0,\ldots,\alpha_{T-1})^{\top}$ — вектор множників Лагранжа, $C_N^0(e^{i\lambda}) = \sum_{j=0}^{N}\vec{c^0}(j)e^{ij\lambda}$, $\vec{c^0}_N = \left\{\vec{c^0}(k)\right\}_{k=0}^{N} = (B_N^0)^{-1}\vec{a}_N$, матриця B_N^0 побудована із коефіцієнтів Фур'є матричної функції $\overline{V(T\lambda)}\left[(f^0(T\lambda))^{-1}\right]^{\top}V^{\top}(T\lambda)$:

$$B_N^0(k,j) = R^{\top}(k-j) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{V(T\lambda)}\Big[\left(f^0(T\lambda)\right)^{-1}\Big]^{\top} V^{\top}(T\lambda)e^{i(j-k)\lambda}\,d\lambda,$$

$$k,j = 0,1,\ldots,N.$$

Коефіцієнти Фур'є $R(k) = R^*(-k)$, $k = 0,1,\ldots,N$, знайдені з рівності

$$B_N^0\vec{\alpha}_N = \vec{a}_N,$$

для $\vec{\alpha}_N = (\vec{\alpha}, \vec{0}, \dots, \vec{0})^\top$, задовольняють співвідношення (19) та $B_N^0 \vec{c^0}_N = \vec{a}_N$. З виведених рівнянь отримуємо, що

$$R(k) = P(\vec{a}(0))^{-1} \vec{a}^\top(k), \qquad k = 0, 1, \dots, N,$$

де $\left[(\vec{a}(0))^{-1}\right]^\top \cdot \vec{a}(0) = 1$. Як наслідок маємо рівність $R(0) = P$.

Нехай векторна послідовність $\vec{a}(k)$, $k = 0, 1, \dots, N$, задана таким чином, що матрична функція $T \cdot V^{-1}(T\lambda)(f^0(T\lambda))^{-1} V(T\lambda) = \sum_{k=-N}^{N} R^\top(k) e^{ik\lambda}$ є додатно визначена та невироджена. Тоді $T \cdot V^{-1}(T\lambda)(f^0(T\lambda))^{-1} V(T\lambda)$ можна зобразити у вигляді [23]

$$T \cdot V^{-1}(T\lambda) \left(f^0(T\lambda)\right)^{-1} V(T\lambda) = \left(\sum_{k=0}^{N} A_k e^{-ik\lambda} \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{N} A_k e^{-ik\lambda} \right)^*.$$

Отже, $T \cdot V^{-1}(T\lambda)(f^0(T\lambda))^{-1} V(T\lambda)$ — спектральна щільність стохастичної векторної послідовності авторегресії порядку N, яка задається рівнянням

$$\sum_{k=0}^{N} A_k \vec{\xi}(n-k) = \vec{\varepsilon}(n), \tag{20}$$

де $\vec{\xi}(n)$ — послідовність, що породжує $\zeta(n)$, $\vec{\varepsilon}(n)$ -векторна послідовність білого шуму. Мінімаксна спектральна характеристика $h(f^0)$ обчислюється за формулою

$$h(f^0) = -\sum_{k=1}^{N} \overline{R(k)} \left(P^T\right)^{-1} \vec{a}(0) e^{-ik\lambda}. \tag{21}$$

Отже, справедлива наступна теорема.

Теорема 5.1. *Нехай послідовність коефіцієнтів* $\vec{a}(k) = (a_0(k), a_1(k), \dots, a_{T-1}(k))^\top$, $a_j(k) = a(k) e^{2\pi i j k/T}$, $j = 0, 1, \dots, T-1$, *що визначає лінійний функціонал* $A_N \zeta$ *від T-ПК послідовності який оцінюється, задана таким чином, що матрична функція* $\sum_{k=-N}^{N} R^\top(k) e^{ik\lambda}$, *де*

$$R(k) = R^*(-k) = P(\vec{a}(0))^{-1} \vec{a}^\top(k), \qquad k = 0, 1, \dots, N,$$

є додатно визначена та невироджена. Тоді найменш сприятлива спектральна щільність у класі D_0^- *оптимальної лінійної інтерполяції* $A_N \zeta$ *задається формулою*

$$f^0(T\lambda) = T \cdot V(T\lambda) \left(\sum_{k=-N}^{N} R(k)^\top e^{ik\lambda} \right)^{-1} V^{-1}(T\lambda). \tag{22}$$

Мінімальна спектральна характеристика $h(f^0)$ *визначається формулою* (21). *Найбільше значення середньоквадратичної похибки оцінки* $\hat{A}_N \zeta$ *обчислюється за формулою*

$$\Delta(f^0) = \left\langle \vec{c^0}_N, \vec{a}_N \right\rangle. \tag{23}$$

Приклад 5.1. Нехай $\zeta(n)$ — 2-ПК послідовність. Розглянемо задачу мінімаксної інтерполяції $A_0 \zeta = \kappa \zeta(0)$, $\kappa \in \mathbb{R}$ на множині D_0^- із $P = \begin{pmatrix} 17 & 11 \\ 11 & 13 \end{pmatrix}$. Матриця найменш сприятливої спектральної щільної з D_0^- для оцінки $A_0 \zeta$, обчислена за (22), має вигляд

$$f^0(\lambda) = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 1 & -e^{-i\lambda/2} \\ -e^{i\lambda/2} & 13 \end{pmatrix}.$$

Матриця найменш сприятливої спектральної щільності 2-вимірної стаціонарної послідовності $\vec{\xi}(n)$, яка породжує $\zeta(n)$, дорівнює

$$f^{\vec{\xi},0} = \frac{1}{100}\begin{pmatrix} 13 & -11 \\ -11 & 17 \end{pmatrix},$$

сама 2-вимірна стаціонарна послідовність має зображення $\vec{\xi}(n) = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\vec{\varepsilon}(n)$ (див. (20)). Найбільше значення середньоквадратичної похибки такої оцінки, обчислене за (23), дорівнює $\Delta(f^0) = \frac{2}{25}\kappa^2$.

6. Висновки

Запропоновано формули для обчислення середньоквадратичної похибки та спектральної характеристики у задачі оптимальної лінійної інтерполяції функціонала $A_N\zeta = \sum_{j=0}^{N} a(j)\zeta(j)$, який залежить від невідомих значень періодично корельованої стохастичної послідовності $\zeta(j)$, за спостереженнями послідовності $\zeta(j)+\theta(j)$, $j \in \mathbb{Z}\setminus\{0,1,\dots,N\}$, де $\theta(j)$ — некорельована із $\zeta(j)$ періодично корельована стохастична послідовність. Ця задача розглянута для двох випадків: матриці спектральних щільностей $f(\lambda)$ та $g(\lambda)$ послідовності сигналу $\zeta(n)$ та шуму $\theta(n)$ точно відомі, та матриці спектральних щільностей невідомі, але задана множина $D = D_f \times D_g$ допустимих спектральних щільностей. Результати отримані на основі співвідношень, що пов'язують періодично корельовані та векторні стаціонарні послідовності, та на основі методів оцінювання векторних стаціонарних послідовностей.

Література

1. Е. Г. Гладышев, *О периодически коррелированных последовательностях*, Доклады Академии наук СССР **137** (1961), №5, 1026–1029.
2. H. L. Hurd and A. Miamee, *Periodically Correlated Random Sequences: Spectral Theory and Practice*, John Wiley & Sons, Inc., 2007.
3. А. Н. Колмогоров, *Теория вероятностей и математическая статистика*, Сборник статей, "Наука", Москва, 1986.
4. N. Wiener, *Extrapolation, interpolation and somothing of stationary time series. With engineering applications*, The M. I. T. Press, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass., 1966.
5. A. M. Yaglom, *Correlation Theory of Stationary and Related Random Functions*, vol. 1, Basic Results, Springer Series in Statistics, Springer-Verlag, New York etc., 1987.
6. A. M. Yaglom, *Correlation Theory of Stationary and Related Random Functions*, vol. 2, Suplementary Notes and References, Springer Series in Statistics, Springer-Verlag, New York etc., 1987.
7. Ю. А. Розанов, *Стационарные случайные процессы*, 2-е изд. доп., "Наука", Москва, 1990.
8. U. Grenander, *A prediction problem in game theory*, Ark. Mat. **3** (1957), 371–379.
9. J. Franke, *On the robust prediction and interpolation of time series in the presence of correlated noise*, J. Time Series Analysis **5** (1984), 227–244.
10. J. Franke, *Minimax robust prediction of discrete time series*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete. **68** (1985), 337–364.
11. J. Franke and H. V. Poor, *Minimax–robust filtering and finite–length robust predictors*, Robust and Nonlinear Time Series Analysis. Lecture Notes in Statistics, vol. 26, Springer-Verlag, 1984, pp. 87–126.
12. М. П. Моклячук, *Стохастичні послідовності авторегресії та мінімаксна інтерполяція*, Теорія ймовір. та матем. статист. **48** (1993), 135–146.
13. M. P. Moklyachuk, *Estimates of stochastic processes from observations with noise*, Theory Stoch. Process. **3(19)** (1997), 330–338.
14. М. П. Моклячук, *Екстраполяція стаціонарних послідовностей, що спостерігаються з шумом*, Теорія ймовір. та матем. статист. **57** (1997), 125–133.
15. M. P. Moklyachuk, *Robust procedures in time series analysis*, Theory Stoch. Process. **6(22)** (2000), no. 3–4, 127–147.

16. M. P. Moklyachuk, *Game theory and convex optimization methods in robust estimation problems*, Theory Stoch. Process. **7(23)** (2001), no. 1–2, 253–264.
17. М. П. Моклячук, *Робастні оцінки функціоналів від стохастичних процесів*, Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", Київ, 2008.
18. M. P. Moklyachuk, *Robust prediction problem for periodically correlated stochastic sequences*, 5th Conference in Actuarial Science and Finance on Samos, Proceedings, 2009, pp. 51–65.
19. M. P. Moklyachuk and O. Yu. Masyutka, *Interpolation of multidimensional stationary sequences*, Theory Probab. Math. Stat. **73** (2006a), 125–133.
20. M. P. Moklyachuk and O. Yu. Masyutka, *Extrapolation of multidimensional stationary processes*, Random Operators and Stochastic Equations **14** (2006b), 233–244.
21. M. P. Moklyachuk and O. Yu. Masyutka, *Minimax prediction of stochastic sequences*, Theory of Stoch. Process. **14(30)** (2008), no. 3–4, 89–103.
22. W. R. Bennett, *Statistics of regenerative digital transmission*, Bell Syst Tech. **37** (1958), 1501–1542.
23. Э. Хеннан, *Многомерные временные ряды*, "Мир", Москва, 1974.

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, проспект Академіка Глушкова, 4Е, Київ 03022, Україна
Адреса електронної пошти: idubovetska@gmail.com

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, проспект Академіка Глушкова, 4Е, Київ 03022, Україна

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, проспект Академіка Глушкова, 4Е, Київ 03022, Україна
Адреса електронної пошти: mmp@univ.kiev.ua

Надійшла 28/11/2010