Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 84, 2011, стор. 57–63

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 84, 2011, pp. 57–63

О МАРКОВСКОМ АНАЛОГЕ Q-ПРОЦЕССОВ С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

УДК 519.21

АЗАМ А. ИМОМОВ

Посвящается светлой памяти профессора Бадалбаева И. С.

Анотація. У роботі розглядаються марківські Q-процеси, які є поширенням на випадок неперервного часу визначення Q-процесів. Досліджуються асимптотичні властивості перехідних ймовірностей марковських Q-процесів.

Аннотация. В работе рассматриваются марковские Q-процессы, которые являются распространением на случай непрерывного времени определения Q-процессов. Исследуются асимптотические свойства переходных вероятностей марковских Q-процессов.

Abstract. The paper deals with Markov Q-processes, which are extensions of the definition of Q-processes in case of continuous time. The asymptotic properties of transition probabilities of Markov Q-processes are investigated.

1. Введение

Пусть величина $Z(t)$, $t \geq 0$, представляет численность популяции частиц в момент t в однородном марковском ветвящемся процессе с непрерывным временем (МВП) с начальным состоянием $Z(0) = 1$. Обозначим

$$P_{ij}(t) := \mathsf{P}\left\{Z(t+\tau) = j \mid Z(\tau) = i\right\},$$

для любых $t, \tau \geq 0$ и $i, j \in \mathbf{N}_0 = \{0\} \cup \{\mathbf{N} = 1, 2, \dots\}$, переходные вероятности МВП. Согласно условию ветвления, для изучения изменения состояний МВП достаточно определить переходные вероятности $P_{1j}(t)$. Эти вероятности, в свою очередь, вычисляются с помощью локальных плотностей $\{a_j, j \in \mathbf{N}_0\}$ соотношением

$$P_{1j}(\Delta) = \delta_{1j} + a_j\Delta + o(\Delta), \qquad \Delta \to 0, \tag{1}$$

где δ_{1j} — знак Кронекера; плотности вероятностей перехода $a_j \geq 0$ для $j \in \mathbf{N}_0 \setminus \{1\}$ и $0 < a_0 < -a_1$, причем $\sum_{j\in\mathbf{N}_0} a_j = 0$. Смысл этих вероятностей заключается в следующем. Имеются частицы одного типа, каждая из которых за промежуток времени $(t; t+\Delta)$ с вероятностью $a_k\Delta + o(\Delta)$ превращается в $k \in \mathbf{N}_0 \setminus \{1\}$ частиц; с вероятностью $a_1\Delta + o(\Delta)$ численность частиц в популяции не изменяется.

Как у всех схем ветвящихся процессов, для МВП первым и главным является свойство превращения частиц, которое характеризуется значением регулирующего параметра $a := \sum_{j\in\mathbf{N}_0} ja_j$. Когда $a = 0$, МВП называется критическим, если $a < 0$ или $a > 0$, он называется докритическим или надкритическим, соответственно.

В дальнейшем мы используем производящие функции (п.ф.)

$$\Phi(t; x) := \sum_{j\in\mathbf{N}_0} P_{1j}(t)x^j \quad \text{и} \quad f(x) := \sum_{j\in\mathbf{N}_0} a_j x^j, \qquad |x| < 1.$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60J05.

Ключевые слова и фразы. Марковские Q-процессы, переходные вероятности, стационарные меры.

Они связаны дифференциальными уравнениями

$$\frac{\partial\Phi(t;x)}{\partial t} = f\left(\Phi(t;x)\right), \tag{2}$$

и

$$\frac{\partial\Phi(t;x)}{\partial t} = f(x)\frac{\partial\Phi(t;x)}{\partial x}, \tag{3}$$

с начальным условием $\Phi(0;x) = x$. Кроме того, п.ф. $\Phi(t;x)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$\Phi(t+\tau;x) = \Phi\left(t;\Phi(\tau;x)\right), \tag{4}$$

при любых $t, \tau \geq 0$, с вышеупомянутым начальным условием (см. [1]).

Известно, что вероятность вырождения q МВП равна наименьшему неотрицательному корню уравнения $f(x) = 0$. Она равна 1, если $a \leq 0$ и меньше 1, если $a > 0$. Более того, в критическом случае $1 - \Phi(t;x) = O(1/t)$ и в некритическом случае $q - \Phi(t;x) = O(\beta^t)$, для всех $|x| < 1$, при $t \to \infty$. В последнем равенстве $0 < \beta := \exp\{f'(q)\} < 1$. В частности, в случаях $a \leq 0$ вероятность продолжения $\mathsf{P}\{Z(t) > 0\} = 1 - \Phi(t;0) \to 0$, то есть распределение $Z(t)$ сходится к вырожденному в нуле распределению. Поэтому в этих случаях почти все предельные свойства МВП исследованы при условии $Z(t) > 0$. Вышесказанные относятся и к процессам Гальтона–Ватсона с дискретным временем (ГВП) (см. [1]).

Однако, как показали исследования в работах [2], [3, с. 56–60], [4]–[6], можно получить другие предельные теоремы, сильно отличающихся от классических, если предположить, что траектория процесса не вырождается в далеком будущем. Модель ГВП с не вырождающейся в далеком будущем траекторией была названа авторами монографии [3] как Q-процессы.

В настоящей заметке мы исследуем процессы, которые являются распространением на случай непрерывного времени определения Q-процессов. В соответствие с аналогий дискретного времени мы будем называть их *Марковскими Q-процессами* (МQП). Некоторые обсуждения относительно МQП имеются в работе автора [7].

2. Определение и предварительные замечания

Для определения МQП мы ограничиваемся лишь формальностью, так как его определение повторяет рассуждения в определении Q-процесса. Предположим, что траектория МВП не вырождается в далеком будущем, и определим стохастическую матрицу $\{Q_{ij}(t), i,j \in \mathbf{N}_0\}$ предельным переходом

$$Q_{ij}(t) = \lim_{r\to\infty} \mathsf{P}\left\{Z(t+\tau) = j \mid Z(\tau) = i, Z(t+\tau+r) > 0\right\},$$

для любых $t, \tau \geq 0$. После вычисления находим

$$Q_{ij}(t) = \frac{jq^{j-i}}{i\beta^t} P_{ij}(t). \tag{5}$$

Теперь рассмотрим семейство случайных величин $\{W(t), t \geq 0\}$ с переходными вероятностями $\mathsf{P}\{W(t+\tau) = j \mid W(\tau) = i\} = Q_{ij}(t)$. Тогда величина $W(t)$ означает численность популяции в момент $t \geq 0$ в МQП с переходными вероятностями $Q_{ij}(t)$.

Поскольку в определении МQП фигурирует переходные вероятности $P_{ij}(t)$, то для изучения изменения МQП достаточно задавать вероятности $Q_{1j}(t)$. Эти вероятности при $\Delta \to 0$, согласно (1), представимы в виде

$$Q_{11}(\Delta) = 1 + q_1\Delta + o(\Delta), \tag{6}$$

$$Q_{1j}(\Delta) = q_j\Delta + o(\Delta), \qquad j \neq 1. \tag{7}$$

Здесь плотности вероятностей перехода

$$q_0 = 0, \qquad q_1 = a_1 - f'(q) < 0, \qquad q_k = kq^{k-1}a_k \geq 0, \qquad k \in \mathbf{N}\setminus\{1\}.$$

Введем в рассмотрение п.ф.

$$G_i(t;x) := \sum_{j\in\mathbf{N}} Q_{ij}(t)x^j \quad \text{и} \quad g(x) := \sum_{k\in\mathbf{N}} q_k x^k.$$

Легко заметим, что п.ф. $g(x) = x\left[f'(qx) - f'(q)\right]$ и она является инфинитезимальной. Таким образом, МQП полностью определяются заданием п.ф. $g(x)$. В дальнейшем предположим, что первый момент $b := \sum_{k\in\mathbf{N}} kq_k = g'(1)$ конечен.

В силу определения МВП и с помощью (5) имеем

$$G_i(t;x) = \frac{\frac{qx}{i\beta^t}}{\partial\partial s}\left[\left(\frac{\Phi(t;s)}{q}\right)^i\right]_{s=qx}, \tag{8}$$

для всех $t > 0$. Формулу (8) можно записать в виде

$$G_i(t;x) = \left[\frac{\Phi(t;qx)}{q}\right]^{i-1} G(t;x), \tag{9}$$

при любом $i \in \mathbf{N}$. Здесь п.ф. $G(t;x) := G_1(t;x) = \mathsf{E}\left[x^{W(t)} \mid W(0) = 1\right]$.

Поскольку $q - \Phi(t;x) \to 0$, $t \to \infty$ для всех $|x| < 1$, то ввиду (9) достаточно исследовать п.ф. $G(t;x)$ при $t \to \infty$. Это указывает на то, что основная масса распределения будет уходить к $Q_{1j}(t)$ при бесконечном росте числа поколений.

Далее, как было показано в работе [7],

$$\frac{\partial\Phi(t;qx)}{\partial x} = \exp\left\{\int_0^t f'\left(\Phi(\tau;qx)\right)d\tau\right\}. \tag{10}$$

Используя (10) в (8), при $i = 1$ имеем

$$G(t;x) = x\exp\left\{\int_0^t \left[f'\left(q\frac{\Phi(\tau;qx)}{q}\right) - f'(q)\right]d\tau\right\}. \tag{11}$$

Теперь вспомним, что п.ф. $F(t;x)$ МВП с однородной иммиграцией (МВПИ), для которого п.ф. плотностей превращения частиц есть $f(x)$ и п.ф. интенсивностей поступления иммиграционных частиц есть $b(x)$ имеет представление (см. [8])

$$F(t;x) = \exp\left\{\int_0^t b\left(\Phi(\tau;qx)\right)d\tau\right\}. \tag{12}$$

Положим $b(x) = f'(qx) - f'(q) = \sum_{k\in\mathbf{N}} b_k x^k$. Поскольку $b(x) = g(x)/x$, то $b(x)$ является некоторой инфинитезимальной п.ф.. В этих обозначениях равенство (11) может быть записано в виде

$$G(t;x) = x\exp\left\{\int_0^t b\left(\frac{\Phi(\tau;qx)}{q}\right)d\tau\right\}. \tag{13}$$

Судя по виду (12) и полученную формулу (13), делаем вывод о том, что МQП можно заменить с следующим ветвящимся процессом с непрерывным временем. В начале имеется одна частица. Эволюция процесса начинается за счет потока иммигрирующих частиц, закон которого порождается п.ф.

$$b(x) = f'(qx) - f'(q).$$

Поступившие в популяции частицы-иммигранты в дальнейшем претерпевают превращения по закону, заданному п.ф. $f(qx)$. Причем начальная частица не исчезает и не размножается. Эта “вечная частица” участвует на протяжении всей эволюции процесса.

Таким образом, исследование асимптотических свойств МQП можно свести к изучению соответствующих свойств МВПИ.

Математическое ожидание $\mathsf{E}\,W(t)$ и дисперсию $\operatorname{Var} W(t)$ можно вычислить дифференцированием (13):

$$\mathsf{E}\,W(t) = \begin{cases} bt+1, & a=1, \\ 1+\gamma(1-\beta^t), & a\neq 1, \end{cases} \tag{14}$$

$$\operatorname{Var} W(t) = \begin{cases} bt, & a=1, \\ \gamma(1-\beta^t), & a\neq 1, \end{cases} \tag{15}$$

где $b = g'(1) = f''(1)$ в случае $a = 0$ и $\gamma := qf''(q)/|f'(q)|$ в случае $a \neq 0$. Формулы (14) и (15) свидетельствуют о том, что параметр $a = f'(1)$ остается главной характеристикой эволюции MQП.

Наконец, с помощью (4) и (9) убедимся в справедливости следующего основного функционального уравнения:

$$G_i(t+\tau;x) = \frac{G(\tau;x)}{G\Big(0;\dfrac{\Phi(\tau;qx)}{q}\Big)} G_i\left(t;\frac{\Phi(\tau;qx)}{q}\right), \tag{16}$$

где $G(0;x) = \lim_{t\to 0} G(t;x) = x$.

3. Стационарность $W(t)$

В этом пункте мы исследуем асимптотические поведения п.ф. $G_i(t;x)$. Как уже было замечено, достаточно рассмотреть п.ф. $G(t;x)$. Обозначив $R(t;x) := q-\Phi(t;x)$, из формулы (8) получим

$$G(t;x) = -\frac{x}{\beta^t}\frac{\partial R(t;qx)}{\partial x}\cdot \tag{17}$$

3.1. **Случай** $a \leq 0$. В этом случае $q = 1$ и $R(t;x) \to 0$, $t \to \infty$. Далее используя результаты из работы [7] для асимптотического представления функции $\partial R(t;x)/\partial x$, непосредственно получим следующую лемму.

Лемма 1. *Имеют места следующие представления:*

1) *если $a < 0$, то*

$$G(t;x) = e^{|a|t}\frac{|a|x}{f(x)}R(t;x)\left(1+o(1)\right), \qquad t\to\infty; \tag{18}$$

2) *если $a = 0$, то*

$$G(t;x) = \frac{bx}{2f(x)}R^2(t;x)\left(1+o(1)\right), \qquad t\to\infty. \tag{19}$$

Значение функции $G(t;x)/x$ в точке $x = 0$ представляет собой вероятность возврата $Q_{11}(t)$ к начальному состоянию $\{W(0) = 1\}$ за время t. Запишем п.ф. $G(t;x)$ в виде $x\sum_{j\in\mathbf{N}} Q_{1j}(t)x^{j-1}$ и полагая $x = 0$ в (18) и (19), используя при этом разложения $R(t;x)$ (см. [1]), получим следующие локальные предельные теоремы.

Теорема 1. *Пусть $a < 0$. Тогда*

$$Q_{11}(t) = \frac{|a|K}{a_0}\left(1+o(1)\right), \qquad t\to\infty,$$

здесь и всюду K– константа Севастьянова, которая определяется равенством

$$\ln K = -\int_0^1 \frac{au+f(1-u)}{uf(1-u)}\,du.$$

Теорема 2. *Пусть* $a = 0$. *Тогда*

$$t^2 Q_{11}(t) = \frac{2}{ba_0}\left(1 + o(1)\right), \qquad t \to \infty.$$

Следующие две теоремы являются следствиями работы [7] и Леммы 1.

Теорема 3. *Пусть* $a < 0$. *Тогда*

$$G_i(t;x) = \pi(x)\left(1 + o(1)\right), \qquad t \to \infty,$$

где

$$\pi(x) = K|a|\frac{x}{f(x)}\exp\left\{a\int_0^x \frac{du}{f(u)}\right\}.$$

П.ф. $\pi(x)$ *имеет представление в виде степенного ряда* $\pi(x) = \sum_{k\in\mathbf{N}} \pi_k x^k$ *и неотрицательные коэффициенты* $\{\pi_n, n \in \mathbf{N}\}$ *образуют стационарное распределение для МQП. Переходные вероятности* $\{Q_{ij}(t), n \in \mathbf{N}\}$ *представимы в виде*

$$Q_{ij}(t) = \pi_j\left(1 + o(1)\right), \qquad t \to \infty.$$

Теорема 4. *Пусть* $a = 0$ *и* $\{Q_{ij}(t), n \in \mathbf{N}\}$ *— переходные вероятности МQП. Тогда*

$$t^2 G_i(t;x) = \mu(x)\left(1 + o(1)\right), \qquad t \to \infty,$$

где предельная п.ф. $\mu(x) = \sum_{j\in\mathbf{N}} \mu_j x^j$ *имеет вид*

$$\mu(x) = \frac{2x}{bf(x)}\cdot$$

Неотрицательные коэффициенты $\{\mu_j, j \in \mathbf{N}\}$ *удовлетворяют уравнениям*

$$\mu_i = \sum_{j\in\mathbf{N}} \mu_j Q_{ji}(t).$$

Переходные вероятности МQП представимы в виде

$$t^2 Q_{ij}(t) = \mu_j\left(1 + o(1)\right), \qquad t \to \infty.$$

Следующая теорема является следствием Теоремы 4.

Теорема 5. *Пусть* $a = 0$. *Тогда для стационарной меры* $\{\mu_j, j \in \mathbf{N}\}$ *МQП с конечным моментом* $b := g'(1)$ *справедливо асимптотическое соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\left[\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n\right] = \frac{2}{b^2}\cdot \tag{20}$$

Соотношение (20) свидетельствует о том, что $\sum_{j\in\mathbf{N}} \mu_j = \infty$. Таким образом, в случае $a = 0$ для МQП существует, причем единственная, стационарная мера.

3.2. **Случай** $a > 0$**.** Теперь рассмотрим случай $a > 0$, при котором вероятность вырождения исходного МВП $q < 1$. В [3, с. 115] доказано, что

$$R(t;x) = \beta^t A(x)(1 + o(1)), \qquad t \to \infty. \tag{21}$$

Здесь предельная функция $A(x)$ есть единственное решение уравнения

$$A\left(\Phi(t;x)\right) = \beta^t A(x)$$

с $A(q) = 0$ и $A'(q) = -1$. Далее нас интересует вид функции $A(x)$. Сохраняя обозначения, представим уравнение (2) в виде

$$R(t;x) = (q - x)\beta^t \exp\left\{\int_x^{\Phi(t;x)}\left[\frac{1}{s - q} - \frac{f'(q)}{f(s)}\right]ds\right\}. \tag{22}$$

Сопоставляя (21) и (22), мы находим $A(x)$ в виде

$$A(x) = (q - x) \exp\left\{ \int_x^q \left[\frac{1}{s-q} - \frac{f'(q)}{f(s)} \right] ds \right\}. \tag{23}$$

Полагая в (23) $x = 0$, и легко убедимся в том, что

$$A := A(0) = q \exp\left\{ \int_0^q \left[\frac{1}{s-q} - \frac{f'(q)}{f(s)} \right] ds \right\} < \infty. \tag{24}$$

Комбинируя уравнения (2) и (3), используя при этом формулу Тейлора, обнаружим

$$\frac{\partial R(t;x)}{\partial x} = \frac{f'(q)}{f(x)} R(t;x)(1 + o(1)), \qquad t \to \infty. \tag{25}$$

Рассмотрев вместе (17), (21) и (25), получим следующую лемму.

Лемма 2. *Если $a > 0$, то справедливо представление*

$$G(t;x) = -x \frac{f'(q)}{f(qx)} A(qx)(1 + o(1)), \qquad t \to \infty,$$

где функция $A(x)$ задано равенством (23).

Теперь с помощью утверждения Леммы 2 и равенства (23), мы немедленно получим предел $U(x) = \lim_{n\to\infty} G_i(t;x)$ в виде

$$U(x) = \frac{q|f'(q)|}{f(qx)} x(1 - x) \exp\left\{ \int_{qx}^q \left[\frac{1}{s-q} - \frac{f'(q)}{f(s)} \right] ds \right\}. \tag{26}$$

Следующую локальную предельную теорему мы непосредственно получим из Леммы 2 и равенства (26), полагая $x = 0$.

Теорема 6. *Пусть $a > 0$. Тогда*

$$Q_{11}(t) = \frac{|f'(q)|A}{a_0} \left(1 + o(1)\right), \qquad t \to \infty,$$

где положительная постоянная A определена в равенстве (24).

Как уже заметили, что МQП можно исследовать и с помощью МВПИ. К утверждению этому мы получим другой эквивалентный вид предельной п.ф. $U(x)$, используя ранее известный результат из теории МВПИ. В работе [8, Теорема 5] имеется следующий результат.

Теорема A ([8]). *Пусть $a > 0$. Тогда для МВПИ заданного п.ф. (12) справедливо*

$$F(t;x) = e^{b(q)t} C(x) \left(1 + o(1)\right), \qquad t \to \infty,$$

при $|x| \le q$, где

$$C(x) = \exp\left\{ \int_x^q \frac{b(s) - b(q)}{f(s)} ds \right\}.$$

Непосредственно используя утверждение Теоремы A и, следуя ходу рассуждения его доказательства, с учетом (9) и (13), мы получим следующую теорему.

Теорема 7. *Пусть $a > 0$. Тогда*

$$G_i(t;x) = U(x) \left(1 + o(1)\right), \qquad t \to \infty,$$

где

$$U(x) = x \exp\left\{ \int_{qx}^q \frac{f'(s) - f'(q)}{f(s)} ds \right\}.$$

Предельная п.ф. $U(x)$ имеет представление $U(x) = \sum_{k\in\mathbf{N}} u_k x^k$ и переходные вероятности $\{Q_{ij}(t), n \in \mathbf{N}\}$ представимы в виде

$$Q_{ij}(t) = u_j \left(1 + o(1)\right), \qquad t \to \infty.$$

Дальнейшие рассуждения показывают, что вид предельной п.ф. $U(x)$ заданного в равенстве (26) и полученный в Теореме 7 равносильны.

Замечание 1. Предельная производящая функция $U(x)$ образует стационарное распределение для МQП.

Действительно, в силу основного функционального уравнения (16), мы убе-димся в том, что неотрицательные коэффициенты $\{u_n, n \in \mathbf{N}\}$ удовлетворяют урав-нениям

$$u_i = \sum_{j \in \mathbf{N}} u_j Q_{ji}(t).$$

Более того, поскольку

$$\lim_{s \to q} \frac{f'(s) - f'(q)}{f(s)} = -\frac{\gamma}{q}$$

конечен, то $U(1) = \sum_{k \in \mathbf{N}} u_k = 1$.

Замечание 2. Используя формулы (14) и (15) можно заключить о том, что $W(t)$ сходится в среднем квадратическом и с вероятностью 1 при $t \to \infty$ к случайной величине W, для которой

$$\mathsf{E}\,W = 1 + \gamma \quad \text{и} \quad \operatorname{Var} W = \gamma.$$

4. Предельная теорема в случае $a = 0$

В случае $a = 0$, как и в дискретном случае (см. [3, с. 59]), мы убедимся в справедливости аналога известной классической предельной теоремы Яглома о предельном законе распределения величины $W(t)/\mathsf{E}W(t)$. Она является переформулировкой теоремы 7 из [7].

Теорема 8. *Пусть $a = 0$. Тогда для любого $x > 0$*

$$\mathsf{P}\left\{\frac{W(t)}{\mathsf{E}W(t)} \le x\right\} \to 1 - e^{-2x} - 2xe^{-2x}, \qquad t \to \infty.$$

Список литературы

1. Б. А. Севастьянов, *Ветвящиеся процессы*, “Наука”, Москва, 1971.
2. J. Lamperti and P. E. Ney, *Conditioned branching processes and their limiting diffusions*, Theory of Probability and its Appl. **13** (1968), 128–139.
3. K. B. Athreya and P. E. Ney, *Branching Processes*, Springer, New York, 1972.
4. A. G. Pakes, *Some limit theorems for the total progeny of a branching process*, Advances in Applied Probability **3** (1971), № 1, 176–192.
5. A. G. Pakes, *Some new limit theorems for the critical branching process allowing immigration*, Stoch. Process. and Appl. **3** (1975), 175–185.
6. А. А. Имомов, *Об одном виде условия невырождения ветвящихся процессов*, Узбекский математический журнал (2001), № 2, 46–51.
7. A. A. Imomov, *A differential analog of the main lemma of the theory of Markov branching processes and its applications*, Ukrainian Mathematical Journal **57** (2005), no. 2, 307–315.
8. A. G. Pakes, *On Markov branching processes with immigration*, Sankhyā: The Indian Journal of Statistics **37(A)** (1975), no. 1, 129–138.

Отдел теории вероятностей и математической статистики, Институт Математики и Информационных Технологий АН РУз, 29, ул. Дурмон йули, 100125 Ташкент; Каршинский государственный университет, 17, ул. Кучабаг, 180103 Карши; Узбекистан

Текущий адрес: Кафедра математического анализа и алгебры, Каршинский государственный университет, 17, ул. Кучабаг, 180103 Карши, Узбекистан

Адрес электронной почты: imomov_azam@mail.ru

Поступила 09/11/2009