Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 84, 2011, стор. 64–76

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 84, 2011, pp. 64–76

УТОЧНЕННЯ СТІЙКОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕОДНОРІДНОГО ЗБУРЕННЯ РІВНЯННЯ ВІДНОВЛЕННЯ НА ПІВОСІ

УДК 519.21

М. В. КАРТАШОВ

Анотація. Розглядається неоднорідне за часом збурення класичного рівняння відновлення на півосі з неперервним часом, що зводиться до інтегрального рівняння Вольтерра з невід'ємним обмеженим (чи навіть субстохастичним) ядром. Гранична схема полягає у тому, що для великих відтинків часу це ядро апроксимується ядром згортки, яке породжується стохастичним розподілом. За певних припущень на малість відповідного збурення для розв'язків збуреного рівняння знайдено уточнену умову обмеженості, за цієї умови доведено існування границі розв'язку збуреного рівняння та знайдено оцінки відхилення від розв'язку незбуреного рівняння.

Наведено ряд прикладів.

Abstract. We consider a generalized inhomogeneous continuous time renewal equation on the halfline, that is the Volterra integral equation with a nonnegative bounded (or substochastic) kernel. It is assumed that this kernel on the large time scale can be approximated by a convolution kernel, generated by a stochastic distribution. Under some asymptotic conditions on the perturbation we find the improved conditions of boundness, under which is proved the existence of limits and the numerical estimations of the stability of the solution of the perturbed equation.

Some applications are considered.

Аннотация. Рассматривается неоднородное по времени возмущение классического уравнения восстановления на полуоси с непрерывным временем, которое сводится к интегральному уравнению Вольтерра с неотрицательным ограниченным (или даже субстохастическим) ядром. Предельная схема состоит в том, что для больших промежутков времени это ядро аппроксимируется ядром свертки, которое порождается стохастическим распределением. При определенных предположениях на малость соответствующего возмущения для решений возмущенного уравнения найдено уточненное условие ограниченности, при выполнени этого условия доказано существование предела для решения возмущенного уравнения и найдены оценки отклонения от решения невозмущенного уравнения.

Приведен ряд примеров.

1. Вступ

Процеси ризику з неоднорідним середовищем вивчались у роботах [2]–[11].

Ми розглядаємо неоднорідне за часом узагальнення класичного рівняння відновлення на півосі з неперервним часом, що зводиться до інтегрального рівняння Вольтерра з невід'ємним обмеженим (чи навіть субстохастичним) ядром. Граничне припущення полягає у тому, що для великих відтинків часу це ядро апроксимується за варіацією ядром згортки, яке породжується стохастичним розподілом на додатній півосі.

Постановка задачі ініційована проблемою дослідження асимптотики функції банкрутства для процесу ризику зі змінною інтенсивністю премій, яка розглядалася, зокрема, у [7].

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60J45; Secondary 60A05, 60K05.

Ключові слова і фрази. Volterra equation, renewal theory, transition kernel,regularity, minimal solution, stability, Рівняння Вольтерра, теорема відновлення, перехідне ядро, мінімальний розв'язок, стійкість.

Доведення у статті використовують ідеї робіт [12, 13] та роботи H. Schmidli [5], а основні результати узагальнюють та дещо підсилюють відповідні твердження [10].

2. Збурене рівняння відновлення

Розглянемо піввісь $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$ з борелівською сигма-алгеброю $\mathfrak{B}_+ = \mathfrak{B}(\mathbb{R}_+)$. Визначимо такі класи функцій:

$$B_0 \equiv \left\{x\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x \text{ — борелєва, } \sup_{s\le t}|x(s)| < \infty, \forall t \ge 0\right\},$$

$$B_0^+ \equiv B_0 \cap \{x\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+\},$$

$$L_1^0 \equiv \left\{y \in B_0\colon \lim_{t\to\infty} y(t) = 0, \int_{[0,\infty)} |y(s)|\, ds < \infty\right\}.$$

Простір L_1^0 є банаховим з нормою

$$\|y\|_{01} = \|y\|_0 + \|y\|_1, \qquad \|y\|_0 = \sup_{s\ge 0}|y(s)|, \qquad \|y\|_1 = \int_{[0,\infty)} |y(s)|\, ds. \tag{1}$$

Нехай G — стохастична міра на $\mathfrak{B}_+$ з моментами

$$m \equiv \int_{[0,\infty)} s\, G(ds) < \infty, \qquad m_2 \equiv \int_{[0,\infty)} s^2\, G(ds). \tag{2}$$

Рівнянням відновлення на $\mathbb{R}_+$, що породжене розподілом G, називається інтегральне рівняння

$$x_0(t) = y(t) + \int_{[0,t)} x_0(t-s)\, G(ds), \qquad t \ge 0, \tag{3}$$

для невідомої функції x_0 з класу B_0.

Зауважимо [13]–[16], що для кожної функції $y \in B_0$ рівняння (3) має єдиний розв'язок $x_0 \in B_0$, що дорівнює *згортці*

$$x_0(t) = y * U(t) \equiv \int_{[0,t)} y(t-s)\, U(ds), \tag{4}$$

де сигма-скінчена *міра відновлення* U визначається як

$$U(B) = \sum_{n\ge 0} G^{*n}(B). \tag{5}$$

Нагадаємо [14, 17], що міра G має *абсолютно неперервний тип*, якщо згортка G^{*m} при деякому $m \ge 1$ має абсолютно неперервну компоненту, тобто має місце нерівність: $G^{*m}(B) \ge \nu(B)$ для всіх борелєвих B та деякої невід'ємної ненульової абсолютно неперервної міри ν.

У роботі C. Stone [18] за умови абсолютно неперервного типу G доведено зображення

$$U = m^{-1}L + V, \tag{6}$$

де L — міра Лебега на $\mathfrak{B}_+$, а V — знакозмінна міра, скінченна при $m_2 < \infty$.

Нехай $(F(t,B), t \ge 0, B \in \mathfrak{B}_+)$ — обмежене ядро на $(\mathbb{R}_+, \mathfrak{B}_+)$, а функція $x \in B_0$. Визначимо лінійний оператор Вольтерра з B_0 у B_0:

$$F[x](t) \equiv \int_0^t F(t,ds)x(t-s), \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

Означення 1. Неоднорідним збуренням рівняння відновлення (3) називається узагальнене інтегральне рівняння Вольтерра

$$x(t) = y(t) + F[x](t), t \in \mathbb{R}_+, \tag{7}$$

для невідомої функції $x \in B_0$, та заданої функції $y \in B_0$.

Тут ядро F наближається до міри G за варіацією, тобто рівномірно за $B \in \mathfrak{B}_+ \cap [0,t]$ "малим" у схемі серій та при $t \to \infty$ є збурення:

$$\Delta(t, B) \equiv F(t, B) - G(B), \tag{8}$$

тобто в нормах (1) малою є функція збурення

$$\delta(t) \equiv |\Delta|\,(t, [0,t)) = \sup_{|x(\cdot)|\le 1} \left| \int_0^t \Delta(t, ds) x(s) \right| \to 0, \qquad t \to \infty. \tag{9}$$

Для більш точної оцінки стійкості (7) визначимо замість (9) показники

$$\varepsilon_L^{\pm} = m^{-1} \sup_{t\ge 0} \sup_{x(\cdot)\in[0,1]} \left(\int_0^t ds \int_0^s \Delta(s, du) x(s-u) \right)^{\pm}, \tag{10}$$

$$\varepsilon_L = m^{-1} \sup_{t\ge 0} \sup_{x(\cdot)\in[-1,1]} \left| \int_0^t ds \int_0^s \Delta(s, du) x(s-u) \right| \le \varepsilon_L^{+} + \varepsilon_L^{-}, \tag{11}$$

$$\delta_V(t) \equiv |V| * \delta(t), \qquad \varepsilon_V = \sup_{t\ge 0} \delta_V(t), \tag{12}$$

тут та надалі $|V|$ означає повну варіацію міри V.

Зауваження 1. З означень (11), (12) і (1), (9) виводимо, що $\varepsilon_L \le m^{-1} \|\delta\|_1$ та $\varepsilon_V = O(\|\delta\|_0)$ при $m_2 < \infty$, причому перша нерівність може бути суттєвою для знакозмінного збурення Δ. Крім того, для показника стійкості $\|\delta\|_G$ [10, рівність (17)], внаслідок (6) виконується нерівність

$$\varepsilon_V + \varepsilon_L \le \|\delta\|_G \equiv \sup_{t\ge 0} U * \delta(t). \tag{13}$$

Теорема 1. *Нехай стохастична міра G має абсолютно неперервний тип та $m < \infty$, її збурення* (8) *задовольняє умову*

$$\varepsilon_V + \varepsilon_L < 1, \tag{14}$$

а функція $y \in L_1^0$.

(a) Рівняння (7) *має єдиний розв'язок $x \in B_0$, що разом із розв'язком $x_0 \in B_0$ рівняння* (3) *задовольняє нерівності*

$$\sup_{t\ge 0} |x(t)| \le (1 - \varepsilon_V - \varepsilon_L)^{-1} \sup_{t\ge 0} |x_0(t)| < \infty, \tag{15}$$

$$\sup_{t\ge 0} |x(t) - x_0(t)| \le (\varepsilon_V + \varepsilon_L) \sup_{t\ge 0} |x(t)|, \tag{16}$$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, |x(t) - x_0(t)| \le \left(\overline{\lim_{t\to\infty}}\, \delta_V(t) + \varepsilon_L \right) \sup_{t\ge 0} |x(t)|. \tag{17}$$

(b) Якщо x та x_0 невід'ємні, то оцінки (15)–(17) *виконуються після заміни у них і* (14) *показника ε_L на ε_L^+ та знака модуля $|\cdot|$ на $(\cdot)^+$.*

(c) За умов невід'ємності ядра F та $\delta \in L_1^0$ існує границя $\lim_{t\to\infty} x(t)$.

Нехай наступні сигма-скінченні міри на $\mathfrak{B}_+$ мажоруються деякими невід'ємними мірами $\Lambda_\pm$ для всіх $B \in \mathfrak{B}_+$:

$$\Lambda_{0\pm}(B) \equiv m^{-1} \sup_{t\geq 0} \sup_{A \in B\cap\mathfrak{B}_+} \left(\int_0^t \Delta(s, s - A \cap [0,s])\, ds \right)^{\pm} \leq \Lambda_\pm(B),$$
$$\Lambda(B) = \max(\Lambda^+, \Lambda^-)(B). \tag{18}$$

Зауважимо, що між (10) та (18) є зв'язок:

$$\Lambda_{0\pm}(\mathbb{R}_+) = \varepsilon_L^{\pm}. \tag{19}$$

Визначимо функцію та показники

$$\delta_V(t) \equiv |V| * \delta(t), \qquad \varepsilon_V = \sup_{t\geq 0} \delta_V(t),$$
$$\varepsilon_\Lambda^{\pm} \equiv \int_0^\infty \delta_V(t)\, \Lambda_\pm(dt), \qquad \varepsilon_\Lambda = \max\left(\varepsilon_\Lambda^+, \varepsilon_\Lambda^-\right). \tag{20}$$

Для скінченності ε_Λ достатньо, щоб $\|\delta\|_0 < \infty$, $m_2 < \infty$ та $\Lambda(\mathbb{R}_+) = O(\|\delta\|_1) < \infty$. Однак при $\Lambda(\mathbb{R}_+) = \infty$ за відповідної інтегровності δ також можна очікувати на скінченність (та навіть малість) ε_Λ.

Теорема 2. *Нехай стохастична міра G має абсолютно неперервний тип та $m_2 < \infty$, її збурення* (8) *задовольняє умову*

$$\varepsilon_V + \varepsilon_\Lambda < 1, \tag{21}$$

а функція $y \in L_1^0$.

(a) Рівняння (7) *має єдиний розв'язок $x \in B_0$, що разом із розв'язком $x_0 \in B_0$ рівняння* (3) *задовольняє нерівності*

$$\sup_{t\geq 0} \exp(-\Lambda(t))|x(t)| \leq (1 - \varepsilon_V - \varepsilon_\Lambda)^{-1} \sup_{t\geq 0} |x_0(t)| < \infty, \tag{22}$$

$$\sup_{t\geq 0} \exp(-\Lambda(t))\, |x(t) - x_0(t)| \leq \varepsilon_V \sup_{t\geq 0} |x(t)| + \int_0^\infty |x_0(s)| \exp(-\Lambda(s))\, d\Lambda(s), \tag{23}$$

$$\sup_{t\geq 0} |x(t) - x_0(t)| \leq (1 - \varepsilon_V - \varepsilon_\Lambda)^{-1} \sup_{t\geq 0} |U * \Delta[x_0](t)|, \tag{24}$$

$$\varlimsup_{t\to\infty} |x(t) - x_0(t)| \leq \varepsilon_L \exp(\varepsilon_L)(1 - \varepsilon_V - \varepsilon_\Lambda)^{-1} \sup_{t\geq 0} |x_0(t)|. \tag{25}$$

(b) Якщо x та x_0 невід'ємні, то оцінки (22), (23), (25) *виконуються після заміни у них і* (21) *функції $\Lambda(t)$ на $\Lambda_+(t)$, показників ε_Λ, ε_L на ε_Λ^+, ε_L^+ відповідно, та знака модуля $|\cdot|$ на $(\cdot)^+$.*

(c) За умов невід'ємності ядра F та $\delta \in L_1^0$ існує границя $\lim_{t\to\infty} x(t)$.

Зауваження 2. На відміну від (15), для асимптотичної обмеженості (22) при $m_2 < \infty$ достатньо, щоб у схемі серій $\|\delta\|_0 = o(1)$ та $\|\delta\|_1 = O(1)$ (замість $\|\delta\|_1 = o(1)$), оскільки

$$\varepsilon_V \leq \operatorname{var} V \, \|\delta\|_0, \qquad \varepsilon_\Lambda \leq \operatorname{var} V \, \|\delta\|_0 (1 + \|\delta\|_1). \tag{26}$$

3. Підпорядковане збурення

Розглянемо випадок, коли збурення (8) абсолютно неперервне відносно незбуреного розподілу:

$$\Delta(t, B) = \int_B \gamma(t,s)\, G(ds), \qquad B \in \mathfrak{B}_+, \tag{27}$$

з локально обмеженою щільністю $\gamma(t,s)$.

Визначимо борелеві локально обмежені функції та показники

$$\lambda_t(s) \equiv m^{-1} \int_0^{t-s} \gamma(s+u,u)\, G(du), \quad 0 \le s \le t, \qquad \delta(t) = \int_0^t |\gamma(t,s)|\, G(ds), \tag{28}$$

$$\lambda_\pm(s) \ge \sup_{t \ge s} (\lambda_t(s))^\pm, \qquad \lambda(s) = \max(\lambda_+(s), \lambda_-(s)), s \ge 0,$$

$$\Lambda_\pm(t) \equiv \int_0^t \lambda_\pm(s)\, ds, \qquad \Lambda(t) \equiv \int_0^t \lambda(s)\, ds, \tag{29}$$

$$\delta_V(t) \equiv |V| * \delta(t), \qquad \varepsilon_V \equiv \sup_{t \ge 0} \delta_V(t), \tag{30}$$

$$\varepsilon_\Lambda^\pm \equiv \int_0^\infty \delta_V(t) \lambda_\pm(t)\, dt, \qquad \varepsilon_\Lambda = \max(\varepsilon_\Lambda^+, \varepsilon_\Lambda^-). \tag{31}$$

Теорема 3. *Нехай стохастична міра G має абсолютно неперервний тип та $m_2 < \infty$, має місце зображення (27), функція збурення (28) задовольняє умову*

$$\varepsilon_V + \varepsilon_\Lambda < 1,$$

а функція $y \in L_1^0$.

(a) Тоді рівняння (7) має єдиний розв'язок $x \in B_0$, для якого разом із розв'язком $x_0 \in B_0$ рівняння (3) виконуються нерівності (22), (23), (24) і (25) Теореми 2 з показниками (28), (29), (31) та (10).

(b) Якщо x та x_0 невід'ємні, то оцінки (22), (23), (25) виконуються після заміни у них і (21) функції $\Lambda(t)$ на $\Lambda_+(t)$, показників ε_Λ, ε_L на ε_Λ^+, ε_L^+ відповідно, та знака модуля $|\cdot|$ на $(\cdot)^+$.

(c) За умов невід'ємності ядра F (тобто при $\gamma(t,s) \ge -1$) і $\delta \in L_1^0$ існує границя $\lim_{t\to\infty} x(t)$.

Приклад 1. Розглянемо незбурений рівномірний розподіл

$$G(ds) = a^{-1} 1_{s \in [0,a)}\, ds,$$

та його підпорядковане збурення (27) зі щільністю

$$\gamma(t,s) = \varepsilon(1+t)^{-1/2}(-1)^{[s(t-s+1)]} 1_{0 \le s \le \min(t,a)}\, ds, \tag{32}$$

де $[x]$ — ціла частина числа x. Зауважимо, що $|\gamma| \le 1$ при $\varepsilon \in (0,1)$, тобто відповідне збурене ядро F — невід'ємне.

З означення (32) виводимо, що функція збурення

$$\delta(t) = \varepsilon \min(1, t/a)(1+t)^{-1/2}$$

не належить $L_1(\mathbb{R}_+)$, тому $\|\delta\|_1 = \infty$, $\|\delta\|_G = \infty$ і для такого збурення оцінку стійкості з [10] застосувати не можна, хоча у схемі серій $\|\delta\|_0 = \varepsilon \to 0$.

Водночас за означенням (28) функції

$$\lambda_t(s) = 2a^{-2} \int_0^{\min(t-s,a)} \varepsilon(1+u+s)^{-1/2}(-1)^{[u(s+1)]}\, du$$

збігаються з частинними сумами знакозмінних рядів з монотонними доданками, внаслідок монотонності модуля підінтегральної функції та рівновіддаленості точок зміни знаків. Оскільки вказані суми не перевищують першого доданка, то

$$|\lambda_t(s)| \le \lambda(s) \equiv 2\varepsilon a^{-2}(1+s)^{-3/2} \in L_1(\mathbb{R}_+), \qquad \forall t \ge s.$$

Отже, для даного прикладу оцінка стійкості [10] на відміну від Теореми 1 не може бути застосована.

Далі, в умовах теорем 1 та 2

$$\varepsilon_L = \|\lambda\|_1 = O(\varepsilon), \qquad \varepsilon_V \le \mathrm{var} V\, \|\delta\|_0 = O(\varepsilon), \qquad \varepsilon_\Lambda \le \|\lambda\|_1 \varepsilon_V = O\left(\varepsilon^2\right), \qquad \varepsilon \to 0.$$

Останнє вказує на перевагу у даному випадку оцінки стійкості Теореми 2.

4. Застосування до ризикового процесу виплат

Розглянемо застосування теореми 3 до аналізу однієї моделі процесу ризику. Певна нестандартність цієї моделі пояснюється тим, що вона грунтується саме на процесі відновлення як послідовності незалежних виплат, в той час як явище розорення не пов'язується з поступленням премій і їх балансом з виплатами, а моделюється заданням ймовірностей розорення у послідовні моменти виплат. Останні залежать від залишкового фонду та поточної виплати на такі моменти.

Розглянемо страховий фонд з початковим капіталом $t > 0$, і незалежними сумами виплат $(\xi_k, k \geq 1)$ зі спільним розподілом G абсолютно неперервного типу, моментами (2), та визначимо $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$, $S_0 = 0$.

Припустимо, що після k-ої виплати при $S_k \geq t$ настає планове банкрутство, а при $S_k < t$ з імовірністю $\pi(t - S_k, \xi_k)$, що залежить від наявного капіталу на цей момент та суми поточної виплати, фонд достроково банкрутує, у протилежному випадку продовжує виплати.

Підкреслимо, що подія дострокового банкрутства вважається незалежною від послідовності сум виплат, при заданих залишковій суми фонду та поточній виплаті на відповідний момент виплати.

Позначимо через $\nu(t)$ кількість виплат до дострокового вичерпання фонду. Тоді при $S_n < t$

$$\mathsf{P}(\nu(t) = n \mid S_1, \ldots, S_n) = \left[\prod_{k=1}^{n-1} (1 - \pi(t - S_k, \xi_k))\right] \pi(t - S_n, \xi_n), \qquad n \geq 1.$$

Визначимо функцію розподілу залишкового капіталу на момент дострокового банкрутства з сумою b та ймовірність планового банкрутства

$$x_b(t) = \mathsf{P}(t - b \leq S_{\nu(t)} < t) = \mathsf{P}(0 < t - S_{\nu(t)} \leq b),$$

$$z(t) = \mathsf{P}\left(\bigcup_{n<\nu(t)} \{S_n \geq t\}\right).$$

Вони є розв'язками неоднорідних рівнянь відновлення

$$x_b(t) = \int_{(t-b)^+}^{t} \pi(t-s,s)\, G(ds) + \int_0^t (1 - \pi(t-s,s)) x_b(t-s)\, G(ds), \tag{33}$$

$$z(t) = 1 - G(t) + \int_0^t (1 - \pi(t-s,s)) z(t-s)\, G(ds). \tag{34}$$

Відповідне рівнянням (33) та (34) ядро відновлення у (7) дорівнює

$$F(t, ds) = (1 - \pi(t-s,s))\, G(ds) 1_{s<t}. \tag{35}$$

Припустимо, що існує границя

$$\theta(s) \equiv \lim_{t\to\infty} \pi(t-s,s) \in (0,1), \quad \text{та} \quad \sup_{s\geq 0} \theta(s) < 1. \tag{36}$$

Отже, ядро (35) задовольняє умову малості збурення (8) з граничною при $t \to \infty$ мірою $\int_B (1 - \theta(s))\, G(ds)$.

Припустимо, що виконується умова Крамера

$$\exists \delta > 0\colon \quad \widehat{G}(\delta) \equiv \mathsf{E} \exp(\delta \xi_1) < \infty, \tag{37}$$

та існує показник Крамера-Лундберга $\alpha > 0$ як єдиний розв'язок рівняння

$$\int_0^\infty \exp(\alpha s)(1 - \theta(s))\, G(ds) = 1. \tag{38}$$

Визначимо ймовірнісну міру та припустимо скінченність сталих

$$G_\alpha(B) \equiv \int_B \exp(\alpha s)(1-\theta(s))\, G(ds),$$

$$m_\alpha \equiv \int_0^\infty s\, G_\alpha(ds), \qquad m_{2\alpha} \equiv \int_0^\infty s^2\, G_\alpha(ds) < \infty. \tag{39}$$

Для виконання (38), (39) достатньо, наприклад, існування $\delta > 0$ такого, що

$$(1 - \sup \theta(s))\widehat{G}(\delta) \in (1, \infty).$$

Розглянемо функцію збурення

$$\delta_\alpha(t) \equiv \int_0^t |\theta(s) - \pi(t-s,s)| \exp(\alpha s)\, G(ds), \tag{40}$$

та борелеві функції

$$\begin{gathered} \lambda_{\alpha\pm}(s) = m_\alpha^{-1} \int_0^\infty (\theta(u) - \pi(s,u))^\pm \exp(\alpha u)\, G(du), \\ \lambda_\alpha(s) = \max(\lambda_{\alpha+}(s), \lambda_{\alpha-}(s)). \end{gathered} \tag{41}$$

Теорема 4. *Нехай стохастична міра G має абсолютно неперервний тип, виконуються умови* (36) *та* (37), *стала $\alpha > 0$ визначається з* (38), *а x_b і z є розв'язками* (33), (34) *відповідно.*

(a) Якщо $\lambda_\alpha \in L_1(\mathbb{R}_+)$, то існують сталі $C_i = C_i(\pi, G)$, $i = 0, 1$, такі, що при $C_0 \|\delta_\alpha\|_0 < 1$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} |\exp(\alpha t) x_b(t) - l_{b\alpha}| \le C_1 \|\lambda_\alpha\|_1 , \tag{42}$$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} |\exp(\alpha t) z(t) - l_\alpha| \le C_1 \|\lambda_\alpha\|_1 . \tag{43}$$

(b) Якщо $\lambda_{\alpha+} \in L_1(\mathbb{R}_+)$, то існують сталі $C_i = C_i(\pi, G)$, $i = 0, 1$, такі, що при $C_0 \|\delta_\alpha\|_0 < 1$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} (\exp(\alpha t) x_b(t) - l_{b\alpha}) \le C_1 \|\lambda_{\alpha+}\|_1 , \tag{44}$$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} (\exp(\alpha t) z(t) - l_\alpha) \le C_1 \|\lambda_{\alpha+}\|_1 . \tag{45}$$

(c) За умви $\lambda_\alpha \in L_1(\mathbb{R}_+)$ існують скінченні границі

$$\lim_{t\to\infty} \exp(\alpha t) x_b(t), \qquad \lim_{t\to\infty} \exp(\alpha t) z(t).$$

Тут граничні сталі дорівнюють

$$l_{b\alpha} \equiv m_\alpha^{-1} \int_0^\infty \exp(\alpha t) \int_{(t-b)^+}^t \pi(t-s,s)\, G(ds)\, dt, \tag{46}$$

$$l_\alpha \equiv m_\alpha^{-1} \int_0^\infty \exp(\alpha t)(1 - G(t))\, dt. \tag{47}$$

Зауваження 3. Якщо $\theta(s) \le \pi(t,s)$ при $t \ge s \ge 0$, то праві частини (44), (45) дорівнюють нулю.

Приклад 2. Нехай $\pi(t,s) \equiv \pi(s)$. Тоді $\theta(s) = \pi(s)$, $\delta_\alpha = \lambda_\alpha = 0$ і виконуються твердження про існування границі та її обчислення: $\lim_{t\to\infty} \exp(\alpha t) x_b(t) = l_{b\alpha}$.

Приклад 3. Нехай $\pi(t,s) \equiv \pi(t)$. Тоді $\theta(s) \equiv \theta = \lim_{t\to\infty} \pi(t)$, показник $\alpha > 0$ збігається з класичним показником Лундберга. Умова існування границі

$$\lim_{t\to\infty} \exp(\alpha t) x_b(t)$$

зводиться до включення $\pi(t) - \theta \in L_1^0$ (як і у [10]), а у нерівності (44) (на відміну від [10]) права частина має порядок $O(\|(\theta - \pi)^+\|_1)$.

5. Доведення

Нагадаємо, що з умови $m_2 < \infty$ випливає [17]–[19] скінченність міри $V = U - m^{-1}L$.

Для обгрунтування (13) на підставі (6) достатньо перевірити, що для показників (10), (11) мають місце оцінки

$$\sup_{s\le t} m^{-1}L*\Delta[x](t) \le \varepsilon_L^+ \sup_{s\le t} x(s) \quad \text{при } x\ge 0,$$
$$\sup_{s\le t} \left|m^{-1}L*\Delta[x](t)\right| \le \varepsilon_L \sup_{s\le t} |x(s)|\,, \tag{48}$$

та врахувати за означенням (9) нерівності

$$|\Delta[x](t)| \le \delta(t)\sup_{s\le t}|x(s)|, \tag{49}$$

$$|V*\Delta[x](t)| \le \sup_{s\le t}|V|*\delta(s)\sup_{s\le t}|x(s)| \le \varepsilon_V \sup_{s\le t}|x(s)|\,. \tag{50}$$

Нерівності (48) випливають з тотожності $L*\Delta[x](t) = \int_0^t \Delta[x](s)\,ds$ та однорідності лівої частини за x.

Доведення теореми 1. Нехай $x\in B_0$ — розв'язок рівняння (7).

Як у [10], перепишемо рівняння (7), з урахуванням означення (8), у вигляді збуреного рівняння відновлення

$$x(t) = y(t) + \Delta[x](t) + x*G(t). \tag{51}$$

Тут перші дві функції у правій частині належать класу B_0. Тому внаслідок (4) та (6) виконуються рівняння

$$x(t) = U*(y(t)+\Delta[x](t)),$$
$$x(t) = x_0(t) + V*\Delta[x](t) + m^{-1}L*\Delta[x](t). \tag{52}$$

Отже, з урахуванням (48), (50), (10), (12) та підстановки у (52) $t=s$:

$$\sup_{s\le t}|x(s)| \le \sup_{s\le t}|x_0(s)| + (\varepsilon_V+\varepsilon_L)\sup_{s\le t}|x(s)|, \tag{53}$$

звідки $\sup_{s\le t}|x(s)| \le (1-\varepsilon_V-\varepsilon_L)^{-1}\sup_{s\le t}|x_0(s)|$, що доводить (15).

Для доведення єдиності розв'язку $x\in B_0$ рівняння (7) зауважимо, що різниця z таких рівнянь задовольняє (7) з функцією $y=0$, тому внаслідок єдиності розв'язку (3) відповідне $x_0=0$. Тоді з (15) виводимо, що $z=0$.

У випадку невід'ємності x, x_0 застосуванням у (52) оцінок вигляду (53) з усуненим знаком модуля, та (48), (50) отримуємо нерівність

$$\sup_{s\le t} x(s) \le \sup_{s\le t} x_0(s) + \left(\varepsilon_V+\varepsilon_L^+\right)\sup_{s\le t} x(s),$$

звідки виводимо необхідний варіант (15).

Далі, з (52) отримуємо

$$x - x_0 = V*\Delta[x] + m^{-1}L*\Delta[x], \tag{54}$$

звідки аналогічно (53) виводимо (16).

Застосуванням до рівняння (54) напівадитивного перетворення $()^+$:

$$(x-x_0)^+ \le |V*\Delta[x]| + \left(m^{-1}L*\Delta[x]\right)^+$$

та відповідного варіанту нерівності (48) виводимо нерівність (16) для невід'ємних x.

Нарешті, з (54), (49) та (48) граничним переходом при $t\to\infty$ виводимо нерівність

$$\varlimsup_{t\to\infty}|x(t)-x_0(t)| \le \varlimsup_{t\to\infty}(\delta_V(t)+\varepsilon_L)\sup_{s\le t}|x(s)|, \tag{55}$$

звідки отримуємо (17). Для невід'ємних x доведення аналогічне.

З першого твердження теореми виводимо обмеженість x, оскільки за означенням функція $x_0 \in B_0$ має скінченну границю за теоремою відновлення внаслідок включення $y \in L_1^0$. Тому існування границі xвипливає з Теореми 1 [10]. $\square$

Лема 1 (Гронуол)**.** *Нехай функції $z, w \in B_0$, а Λ — неспадна функція на $\mathbb{R}_+$. Якщо виконуються нерівності*

$$z(t) \le w(t) + \int_0^t z(s)\, d\Lambda(s), \qquad t \ge 0, \tag{56}$$

то для всіх $t \ge 0$

$$\exp(-\Lambda(t))z(t) \le \exp(-\Lambda(t))w(t) + \int_0^t \exp(-\Lambda(s))w(s)\, d\Lambda(s) \le \sup_{s\le t} w(s). \tag{57}$$

Доведення леми. Позначимо $\Psi(t) \equiv \exp(-\Lambda(t)) \int_0^t z(s)\, d\Lambda(s)$. Тоді

$$d\Psi(t) = \left(z(t) - \int_0^t z(s)\, d\Lambda(s)\right) \exp(-\Lambda(t))\, d\Lambda(t) \equiv W(t) \exp(-\Lambda(t))\, d\Lambda(t),$$

де функція $W(t) \le w(t)$, $t \ge 0$. Звідси та з означення Ψ інтегруванням та множенням на $\exp(\Lambda(t))$ отримуємо

$$\int_0^t z(s)\, d\Lambda(s) = \exp(\Lambda(t))\Psi(t) = \exp(\Lambda(t)) \int_0^t W(s) \exp(-\Lambda(s))\, d\Lambda(s),$$

Підстановка останньої рівності у (56) та врахування оцінки $W \le w$ призводить до першої нерівності у (57). Друга нерівність отримується з першої шляхом заміни у правій частині значень w на відповідну верхню межу та обчисленням інтегралу. $\square$

Доведення теореми 2. Доведення (19) зводиться до застосування при $x \in [0,1]$ нерівностей $0 \le x \le 1_A$ з множиною $A = \{x > 0\}$ у тотожності

$$L * \Delta[1_A](t) = \int_0^t ds \int_0^s \Delta(s, du) 1_A(s-u) = \int_0^t \Delta(s, s - A \cap [0,s])\, ds. \tag{58}$$

З означень (18), опуклості форм у (18) та з (58) виводимо, що для всіх $t \ge 0$ та всіх $x \in B_0$

$$\left(m^{-1} L * \Delta[x](t)\right)^{\pm} \le \int_0^t x(s)\, \Lambda_{\pm}(ds) \quad \text{при } x \ge 0,$$

$$\left|m^{-1} L * \Delta[x](t)\right| \le \int_0^t |x(s)|\, \Lambda(ds). \tag{59}$$

Враховуючи нерівність (59), з рівності (52) виводимо, що

$$|x(t)| \le |x_0(t)| + |V * \Delta[x](t)| + \int_0^t |x(s)|\, d\Lambda(s). \tag{60}$$

Звідси з другої та першої нерівності (57) Леми отримуємо

$$\begin{aligned} \exp(-\Lambda(t))|x(t)| &\le \sup_{s\le t} |x_0(s)| + \exp(-\Lambda(t))\, |V * \Delta[x](t)| \\ &\quad + \int_0^t \exp(-\Lambda(s))\, |V * \Delta[x](s)|\; d\Lambda(s). \end{aligned}$$

Оскільки внаслідок монотонності $\Lambda(t)$ та (50)

$$\exp(-\Lambda(t))\, |V * \Delta[x](t)| \le |V| * \delta(t) \sup_{s\le t} \exp(-\Lambda(s))|x(s)|,$$

то з попередньої нерівності та (20) виводимо, що

$$\exp(-\Lambda(t))|x(t)| \le \sup_{s\le t}|x_0(s)| + (\varepsilon_V + \varepsilon_\Lambda)\sup_{s\le t}\exp(-\Lambda(s))\,|x(s)|\,. \tag{61}$$

Переходячи до верхньої межі за $t \le T$ у (61), виводимо нерівність (22) граничним переходом $T \to \infty$. Єдиність $x \in B_0$ виводиться з (22) так само, як у Теоремі 1.

Для невід'ємних x, x_0 нерівність (22) доводиться аналогічно з оцінки

$$x^+(t) \le x_0^+(t) + \varepsilon_V \sup_{s\le t}\exp(-\Lambda(s))x^+(s) + \int_0^t x^+(s)\,d\Lambda_+(s),$$

що отримується шляхом заміни у (60) знака модуля $|\cdot|$ на знак додатної частини $(\cdot)^+$ та враховує означення (18).

Для доведення (23), (24), (25) позначимо

$$h(t) = x(t) - x_0(t), \qquad h_0(t) = U * \Delta[x_0](t). \tag{62}$$

З лінійності (52) отримуємо рівняння

$$h(t) = V * \Delta[x](t) + m^{-1}L * \Delta[x_0](t) + m^{-1}L * \Delta[h](t), \tag{63}$$

звідки за (49) та (59)

$$|h(t)| \le \delta_V(t)\sup_{s\le t}|x(s)| + \int_0^t |x_0(s)|\,d\Lambda(s) + \int_0^t |h(s)|\,\,d\Lambda(s)). \tag{64}$$

Звідси застосуванням другої нерівності (57) леми виводимо (23).

Доведення (23) для невід'ємних x, x_0 проводиться аналогічно з урахуванням (18).

Далі, з лінійності (52) отримуємо також

$$h(t) = h_0(t) + V * \Delta[h](t) + m^{-1}L * \Delta[h](t), \tag{65}$$

а з (49) та (59) виводимо нерівність

$$|h(t)| \le |h_0(t)| + |V * \Delta[h](t)| + \int_0^t |h(s)|\,d\Lambda(s). \tag{66}$$

Звідси (24) виводиться застосуванням леми так само, як (61) з (60) (формальною заміною x, x_0 на h, h_0).

Для доведення (25) скористаємось нерівністю (55), де $\overline{\lim}_{t\to\infty}\delta_V(t) = 0$, внаслідок умови (9) та скінченності міри V (оскільки $m_2 < \infty$). Тому з урахуванням (22),

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\,|x(t) - x_0(t)| \le \varepsilon_L \sup_{s\le t}|x(s)| \le \varepsilon_L \exp(\Lambda(\infty))(1 - \varepsilon_V - \varepsilon_\Lambda)^{-1}\sup_{s\le t}|x_0(s)|, \tag{67}$$

що доводить шукане внаслідок (18), (19). Для невід'ємних x, x_0 тут за означенням (10) та за відповідним варіантом нерівності (22) величини ε_L, $\Lambda(\infty)$ та ε_Λ слід відповідно замінити на ε_L^+, $\Lambda_+(\infty)$ та ε_Λ^+.

З першого твердження теореми виводимо обмеженість x, оскільки за означенням функція $x_0 \in B_0$ має скінченну границю за теоремою відновлення внаслідок включення $y \in L_1^0$. Тому існування границі x випливає з теореми 1 [10]. □

Доведення теореми 3. Розглянемо функцію з означення (18) з урахуванням (27)

$$\begin{aligned} L * \Delta[x](t) &= \int_0^t \int_0^{t-s} \Delta(t-s, du) x(t-s-u)\, ds = \int_0^t \int_0^s \Delta(s, du) x(s-u)\, ds \\ &= \int_0^t \int_0^s \gamma(s,u) G(du) x(s-u)\, ds = \int_0^t G(du) \int_u^t \gamma(s,u) x(s-u)\, ds \\ &= \int_0^t G(du) \int_0^{t-u} \gamma(s+u,u) x(s)\, ds \\ &= \int_0^t \int_0^{t-s} \gamma(s+u,u) G(du) x(s)\, ds = m \int_0^t \lambda_t(s) x(s)\, ds. \end{aligned} \tag{68}$$

Звідси та з (58) підстановкою $x = 1_A$ внаслідок рівності (29) отримуємо оцінку для мір (18) у Теоремі 2:

$$\Lambda_{0\pm}(B) = \sup_{t\geq 0} \sup_{A \in B \cap \mathfrak{B}_+} \left(\int_0^t \lambda_t(s) 1_A(s) ds \right)^{\pm} \leq \int_B \lambda_\pm(s) ds = \Lambda_\pm(B),$$

$$\Lambda(B) = \max(\Lambda_+, \Lambda_-)(B) = \int_B \lambda(s) ds. \tag{69}$$

Для невід'ємних x при обчисленні верхньої межі за t правої частини (68) достатньо оцінити $\lambda_t(s)$ через її верхню межу, що обгрунтовує друге твердження теореми.

Визначення решти параметрів та умов Теорем 3 та 2 збігаються. Тому теорема 3 випливає з теореми 2. □

Доведення теореми 4. Позначимо функції

$$x_{b\alpha}(t) \equiv \exp(\alpha t) x_b(t), \qquad y_{b\alpha}(t) \equiv \exp(\alpha t) \int_{(t-b)^+}^t \pi(t-s,s)\, G(ds),$$

$$z_\alpha(t) \equiv \exp(\alpha t) z(t), \qquad y_\alpha(t) \equiv \exp(\alpha t)(1 - G(t). \tag{70}$$

З означення G_α у (39), Зауваження 1 [10], рівняннь (33), (34) та перетворення (51) множенням на $\exp(\alpha t)$ виводимо рівняння

$$x_{b\alpha}(t) = y_{b\alpha}(t) + \Delta_\alpha[x_{b\alpha}](t) + G_\alpha * x_{b\alpha}(t),$$

$$z_\alpha(t) = y_\alpha(t) + \Delta_\alpha[z_\alpha](t) + G_\alpha * z_\alpha(t), \tag{71}$$

де ядро Δ_α має вигляд підпорядкованого збурення (27) зі щільністю $\gamma_\alpha(t,s)$ відносно ймовірнісної міри G_α (39):

$$\Delta_\alpha(t, ds) = \exp(\alpha s)(\theta(s) - \pi(t-s,s)) 1_{s\leq t}\, G(ds) = \gamma_\alpha(t,s) 1_{s \leq t}\, G_\alpha(ds), \tag{72}$$

$$\gamma_\alpha(t,s) \equiv (\theta(s) - \pi(t-s,s))/(1-\theta(s)). \tag{73}$$

Відповідно показники (28) - (31) мають з урахуванням (41) вигляд (40) та

$$\lambda_t(s) = m_\alpha^{-1} \int_0^{t-s} (\theta(u) - \pi(s,u)) \exp(\alpha u)\, G(du),$$

$$\lambda(s) = \max(\lambda_{\alpha+}(s), \lambda_{\alpha-}(s)) = \lambda_\alpha(s),$$

$$\delta_{V\alpha}(t) = V_\alpha * \delta_\alpha(t), \qquad \varepsilon_{V\alpha} = \sup_{t\geq 0} \delta_{V\alpha}(t),$$

$$\varepsilon_{\Lambda\alpha}^{\pm} = \int_0^\infty \delta_{V\alpha}(s) \lambda_{\alpha\pm}(s)\, ds, \qquad \varepsilon_{\Lambda\alpha} = \int_0^\infty \delta_{V\alpha}(s) \lambda_\alpha(s)\, ds. \tag{74}$$

де V_α — обмежений заряд у розкладі Стоуна (6) для міри відновлення

$$U_\alpha \equiv \sum_{n\geq 0} G_\alpha^{*n}$$

з розподілом стрибків G_α (39).

З означення і умови (36) виводимо скінченність $\int_0^\infty \exp(\alpha s)\, G(ds)$, тому за теоремою про мажоровану збіжність у (40) $\delta_\alpha(t) \to 0$, $t \to \infty$. Далі, за теоремою Фубіні

$$\|\delta_\alpha\|_1 = \int_0^\infty \delta_\alpha(s)\, ds \le 2 \int_0^\infty \lambda_\alpha(s)\, ds = O(\|\lambda_\alpha\|_1) < \infty. \tag{75}$$

Отже, в умовах теореми $\delta_\alpha \in L_1^0$. З тієї ж скінченності та (70) виводимо включення $y_{b\alpha} \in L_1^0$ для кожного b.

Внаслідок нерівності $(G_\alpha)^{*m} \ge (1 - \sup_{s\ge 0} \theta(s))^m G^{*m}$ міра G_α має абсолютно неперервний тип.

Далі, з (74) та обмеженості міри V_α виводимо, що

$$\varepsilon_{V\alpha} = O(\|\delta_\alpha\|_0), \qquad \varepsilon_{\Lambda\alpha} \le \varepsilon_{V\alpha} \int_0^\infty \lambda_\alpha(s)\, ds = O(\|\delta_\alpha\|_0), \qquad \|\delta_\alpha\|_0 \to 0. \tag{76}$$

Тому для досить малих $\|\delta_\alpha\|_0$ виконується нерівність та ключова умова $\varepsilon_V + \varepsilon_\Lambda \equiv \varepsilon_{V\alpha} + \varepsilon_{\Lambda\alpha} \le 1/2 < 1$ теореми 3. Одночасно функція $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda_\alpha(s)\, ds$ є обмеженою внаслідок включення $\lambda_\alpha \in L_1(\mathbb{R}_+)$.

Для виводу нерівностей (42), (43) застосуємо в умовах частини (a) теореми 3 оцінку (25). Внаслідок (69), (19) показник

$$\varepsilon_L \le \Lambda_+(\mathbb{R}_+) + \Lambda_-(\mathbb{R}_+) \le 2 \int_0^\infty \lambda_\alpha(s)\, ds = O(\|\lambda_\alpha\|_1), \qquad \|\lambda_\alpha\|_1 \to 0,$$

а знаменник у (25) не менший за $1/2$, як показано вище. Скінченість останнього множника у (25) випливає з обмеженості $\exp(\alpha t) x_{0b\alpha}(t)$, що випливає з теореми Крамера–Лундберга для функції $x_{0b\alpha}$ для незбуреного рівняння відновлення щодо (71).

Доведення нерівностей (44), (45) проводиться аналогічно застосуванням нерівності (25) в умовах частини (b) теореми 3. Невід'ємність функцій $x_{b\alpha}$, $x_{0b\alpha}$, z_α, $z_{0\alpha}$ очевидна.

Граничні значення (46), (47) обчислюємо з тотожностей

$$\lim_{t\to\infty} x_{0b\alpha}(t) = m_\alpha^{-1} \int_0^\infty y_{b\alpha}(t)\, dt = l_{b\alpha}, \qquad \lim_{t\to\infty} z_{0\alpha}(t) = m_\alpha^{-1} \int_0^\infty y_\alpha(t)\, dt = l_\alpha.$$

З нерівності (22) в умовах теореми 3, що застосована до рівняння (71), виводимо обмеженість $\sup_{t\ge 0} x_{b\alpha}(t) = O(\|y_{b\alpha}\|_{01}) < \infty$.

Тому існування границі $x_{b\alpha}$ випливає з теореми 1 [10]. □

Література

1. N. V. Kartashov, *Strong Stable Markov Chains*, VSP, Utrecht, The Netherlands, 1996.
2. D. C. M. Dickson, *The probability of ultimate ruin with a variable premium rate*, Scand. Actuarial J. (1991), 75–86.
3. H. Gerber, *On the probability of ruin in the presence of a linear dividend barrier*, Scand. Actuarial J. (1981), 105–115.
4. H. Gerber and E. S. W. Shiu, *On the time value of ruin*, Proc. of the 31 Actuarial Research Conference, Ball Statte Univ., Aug. 1996, pp. 145–199.
5. H. Schmidli, *An extension to the renewal theorem and an application to risk theory*, The Annals of the Applied Probability **7** (1997), no. 1, 121–133.
6. G. C. Tailor, *Probability of ruin with variable premium rate*, Scand. Actuarial J. (1980), 57–76.
7. N. V. Kartashov, *On ruin probabilities for a risk processes with bounded reserves*, Theor. Probab. Math. Stat. **60** (2000), 53–65.
8. M. V. Kartashov and O. M. Stroyev, *The Lundberg approximation for the ruin function in the almost homogeneous environment* Theor. Probab. Math. Stat. **73** (2005), 64–72. (Ukrainian)
9. М. В. Карташов, *Неоднорідне збурення рівняння відновлення та теорема Крамера–Лундберга для процесу ризику зі змінними інтенсивностями премій*, Теорія ймовір. та матем. статист. **78** (2008), 55–66.

10. М. В. Карташов, *Обмеженість, границі та стійкість розв'язків неоднорідного збурення рівняння відновлення на півосі*, Теорія ймовір. та матем. статист. **81** (2009), 65–75.
11. М. В. Карташов, *Мінімальна рівномірна теорема відновлення та перехідні явища для неоднорідного збурення рівняння відновлення*, Теорія ймовір. та матем. статист. **82** (2010), 43–55.
12. Н. В. Карташов, *Равномерные предельные теоремы для эргодических случайных процессов и их применения в теории массового обслуживания*, Дисс. на соиск. уч. степ. доктора физ.-мат. наук, Киев, КГУ, 1985.
13. Н. В. Карташов, *Степенные оценки скорости сходимости в теореме восстановления*, Teor. Probab. Appl. **24** (1979) no. 3, 600–607. (Russian)
14. N. V. Kartashov, *A Generalization of the Stone representation and necessary conditions for uniform convergence in the renewal theorem*, Theor. Probab. Math. Stat. **26** (1983), 53–67.
15. N. V. Kartashov, *Equivalence of uniform renewal theorems and criteria for their validity*, Theor. Probab. Math. Stat. **27** (1983), 55–64.
16. W. Feller, *An Intoduction to Probability Theory and its Applications*, vol. 2, John Wiley & Sons, New York, 1966.
17. А. А. Боровков, *Вероятностне процессы в теории массового обслуживания*, "Наука", Москва, 1972.
18. C. Stone, *On absolutely continuous components and renewal theory*, Ann. Math. Stat. **37** (1966), 271–275.
19. D. J. Daley, *Tight bounds for the renewal function of a random walk*, Ann. Probab. **8** (1980), no. 3, 615–621.
20. В. М. Шуренков, *Ергодические процессы Маркова*, "Наука", Москва, 1989.

Кафедра теорії ймовірностей, математичної статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Національний університет ім. Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, 01033, Київ, Україна

Адреса електронної пошти: `email: nkartashov@skif.com.ua`

Надійшла 03/09/2010