Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 85, 2011, стор. 117–130

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 85, 2011, pp. 117–130

ПОСТРОЕНИЕ И АНАЛИЗ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МОДЕЛЕЙ ЭВОЛЮЦИОННЫХ СИСТЕМ С УПРАВЛЕНИЕМ

УДК 519.21

М. А. ФЕДОТКИН

Аннотация. Построение адекватных вероятностных моделей эволюционных систем с управлением является первоначальной задачей их изучения. На сегодня построения моделей таких систем исчерпываются тремя подходами [1]. В работах [1, 2, 3] отмечаются недостатки указанных подходов, и в связи с этим предлагается кибернетический подход. В этой работе целесообразность кибернетического подхода показывается на решении известного парадокса независимости [4, 5].

Анотація. Побудова адекватних ймовірнісних моделей евлюційних систем з керуванням є початковою задачею їх вивчення. На сьогодні побудова моделей таких систем вичерпується трьома підходами [1]. В роботах [1, 2, 3] відмічаються недоліки вказаних підходів, і в звя'зку з цим пропонується кібернетичний підхід. В цій роботі доцільність кібернетичного підходу показується на розв'язанні відомого парадоксу незалежності [4, 5].

Abstract. Construction of adequate probabilistic models of evolutionary systems with control is the initial task in studying them. Today, three approaches are used for construction of models of such systems [1]. In [1, 2, 3] some disadvantages of these approaches are mentioned, and therefore the cybernetic approach is proposed. In this paper the feasibility of the cybernetic approach is demonstrated by solving the well-known independence paradox [4, 5].

1. Решение задачи Мостеллера классическим подходом

В первом разделе с целью иллюстрации построения вероятностной модели Колмогорова статистически устойчивых экспериментов с управлением с позиции «черного ящика» рассмотрим решение задачи Мостеллера [4].

Задача Мостеллера. Чтобы наградить сына, играющего в теннис, отец обещает ему приз, если он выиграет подряд, по крайней мере, две теннисные партии против своего отца и мастера. Мастер играет лучше отца. Сын выигрывает у мастера с вероятностью p и у отца — с вероятностью $q > p$. Выигрыши сына независимы в совокупности. Сын имеет право выбрать один из двух вариантов очерёдности игры: 1) мастер затем отец и снова мастер; 2) отец, затем мастер и снова отец. Какой вариант поведения следует выбрать сыну с точки зрения получения приза с наибольшей вероятностью?

Для проверки адекватности основных выводов решения задачи Мостеллера [4, 5] необходимо практически большое число раз реализовать теннисную игру сына с

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60K99, 93C99.

Ключевые слова и фразы. Эволюционные системы с управлением, вероятностная модель, кибернетический подход, парадокс независимости.

Работа выполнена в рамках госбюджетной НИР ННГУ им. Н. И. Лобачевского — национальном исследовательском университете по теме № 0120.0602598 «Анализ дискретных управляющих систем обслуживания и систем вычисления булевых функций».

Работа основана на докладе, представленном на международной конференции “Modern Stochastics: Theory and Applications II”, которая проходила 7–11 сентября 2010 г. в Киевском национальном университете имени Тараса Шевченко и была посвящена юбилеям трех выдающихся украинских ученых: Анатолия Скорохода, Владимира Королюка и Игоря Коваленко.

отцом и мастером. Этот эксперимент не представляется легко осуществимым. Поэтому вместо теннисной игры рассмотрим аналогичный эксперимент, который автор работы имел возможность многократно проводить при приёме экзаменов по теории вероятностей и математической статистике на различных факультетах Нижегородского госуниверситета им. Н. И. Лобачевского.

Задача об экзаменах. Студенты сдают экзамен по теории вероятностей, каждый из которых должен ответить по билету на три вопроса раздельно профессору и ассистенту. Студенты знают, что вопросы первый и третий являются теоретическими, а второй заключается в решении практической задачи. Студент сдаст экзамен, если он два раза подряд положительно отвечает на вопросы. Профессору студент отвечает положительно на любой вопрос с вероятностью p и ассистенту — с вероятностью $q > p$. Студенту предлагается выбрать один из двух вариантов поведения в последовательности ответов: 1) сначала студент отвечает профессору, затем — ассистенту и снова — профессору; 2) на первый вопрос студент отвечает ассистенту, на второй вопрос — профессору и на последний вопрос — ассистенту. Рассмотрим на содержательном уровне решение этой поучительной задачи, которое было предложено в работах [4, 5].

Пусть события A_1, A_2, A_3 и A означают, что студент положительно ответил на первый вопрос профессору, на второй вопрос — ассистенту, на третий вопрос — профессору и студент сдаст экзамен при первом варианте его поведения. Аналогичные события введём, если студент выбрал второй вариант поведения. Тогда случайные события B_1, B_2, B_3 и B заключаются в том, что на первый вопрос студент положительно ответил ассистенту, на второй вопрос — профессору, на третий вопрос — ассистенту и студент сдаст экзамен при втором варианте его поведения. Для событий A и B находим равенства:

$$A = (A_1 \cap A_2) \cup (A_2 \cap A_3), \qquad B = (B_1 \cap B_2) \cup (B_2 \cap B_3).$$

Обозначим через $\mathbf{P}_1(\cdot)$ вероятность для первого варианта поведения студента и через $\mathbf{P}_0(\cdot)$ вероятность второго варианта его поведения. При независимых ответах студента преподавателям имеем:

$$\mathbf{P}_1(A) = \mathbf{P}_1(A_1 \cap A_2) + \mathbf{P}_1(A_2 \cap A_3) - \mathbf{P}_1(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = pq + qp - pqp,$$

$$\mathbf{P}_0(B) = \mathbf{P}_0(B_1 \cap B_2) + \mathbf{P}_0(B_2 \cap B_3) - \mathbf{P}_0(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = qp + pq - qpq.$$

Отсюда получаем, что $\mathbf{P}_1(A) > \mathbf{P}_0(B)$ при $q > p$. Значит, студентам целесообразно пользоваться первым вариантом поведения.

Мостеллер в [4] этот вывод объясняет важностью для студента умение решать практические задачи. Другими словами, соотношение $\mathbf{P}_1(A_2) = q > \mathbf{P}_0(B_2) = p$ имеет большее значение для сдачи экзамена, чем трудности два раза отвечать профессору при первом варианте поведения. Напротив, Секей в [5] говорит о том, что полученное решение этой задачи и выводы существенно опирались на факт независимости ответов студента. Однако статистические наблюдения автора этой работы показывают, что студенты, которые с 1967 по 1992 год сдавали экзамены, в основном выбирали первый вариант поведения. После 1992 года студенты всё чаще выбирают более разумный на их взгляд второй вариант поведения. Чтобы объяснить такое поведение студентов, сначала приведём формальное решение этой задачи, используя первый классический способ на основе принципа «черного ящика», а затем нетрадиционный способ [1, 2, 3] в изучении случайных экспериментов с управлением.

Известно [1], что одним из основных предметов теории вероятностей является построение адекватной колмогоровской модели $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P}_r(\cdot))$ статистически устойчивого случайного эксперимента W_r с управлением r из некоторого множества R. Произвольный элемент ω из множества Ω определяет с помощью некоторого языка

описание так называемого элементарного исхода эксперимента W_r. Подмножество $\mathfrak{F}$ априори заданного множества всех допустимых исходов является σ-алгеброй и содержит все наблюдаемые исходы $D \subset \Omega$ эксперимента W_r. Наконец, вероятностная функция вида $\mathbf{P}_r(\cdot)\colon \mathfrak{F} \to [0,1]$ задается на σ-алгебре $\mathfrak{F}$ и зависит от выбранного управления $r \in R$.

Если используется подход «черного ящика», то статистически устойчивый случайный эксперимент W_r представляется в виде объекта управления E_r и системы управления C_r. В этом случае предполагается, что в результате проведения и наблюдения элементарного исхода каждого из экспериментов E_r и C_r однозначно по некоторому закону определяется элементарный исход эксперимента W_r. Поэтому эксперимент W_r есть упорядоченная пара (E_r, C_r), и будем это записывать таком виде $W_r = (E_r, C_r)$. Пусть отображения $\varphi_r(\omega)$ и $\psi_r(\omega)$ измеряют выход объекта управления E_r и выход системы управления C_r, а функционал $\Phi(\varphi_r(\omega), \psi_r(\omega))$ определяет доход эксперимента W_r от управления r. Если при управлении r математическое ожидание дохода равно $\mathrm{M}_r\Phi(\varphi_r(\omega), \psi_r(\omega))$, то цель эксперимента W_r состоит в использовании оптимального управления $r_0 \in R$, для которого выполняется следующее условие

$$\mathrm{M}_{r_0}\Phi(\varphi_{r_0}(\omega), \psi_{r_0}(\omega)) = \sup\{\mathrm{M}_r\Phi(\varphi_r(\omega), \psi_r(\omega))\colon r \in R\}.$$

Пусть теперь для задачи об экзаменах объект управления E_r есть последовательные ответы студента преподавателям на три вопроса, а система управления C_r означает выбор студентом одного из двух вариантов поведения (управления). Здесь соотношение $r = 1$ означает выбор первого варианта управления, и равенство $r = 0$ означает выбор второго варианта поведения. Отсюда следует, что множество $R = \{0, 1\}$. Заметим, что в этой задаче результаты объекта управления E_r не влияют на результаты системы управления C_r. Тогда приведенное ранее решение Мостеллером задачи об экзаменах на одержательном уровне фактически основано на представлении эксперимента W_r в виде управляющей системы (E_r, C_r) без канала обратной связи. Эта ситуация отображена на рис. 1.

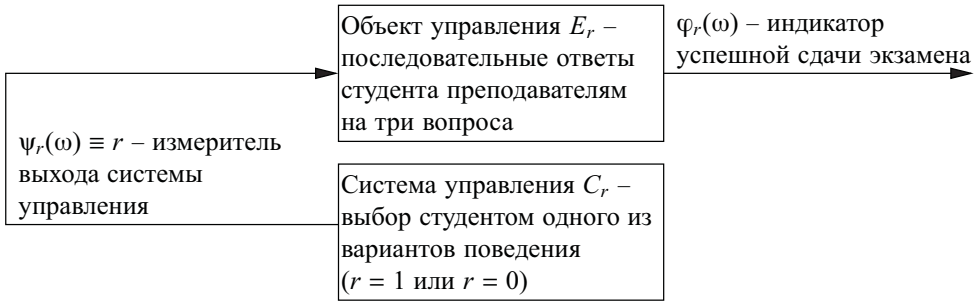

Рис. 1. Модель без канала обратной связи для эксперимента об экзаменах

На этом рисунке величины $\varphi_r(\omega)$ и $\psi_r(\omega)$ измеряют элементарный исход эксперимента W_r с точки зрения последовательности ответов студента преподавателям (объекта управления E_r) и соответственно с точки зрения его выбора стратегии поведения (системы управления C_r). При этом значение случайной величины $\varphi_r(\omega)$ равно единице, если студент сдал экзамен, и равно нулю в противном случае, а значение величины $\psi_r(\omega)$ тождественно равно выбранному управлению $r = 0, 1$. Для этого эксперимента $\Phi(\varphi_r(\omega), \psi_r(\omega)) \equiv \varphi_r(\omega)$. Имеет место утверждение.

Лемма 1. *Оптимальное управление $r_0 = 1$ и, следовательно, студентам целесообразно отвечать сначала профессору, затем — ассистенту и снова — профессору.*

Доказательство. В качестве модели эксперимента W_r можно предложить вероятностное пространство $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P}_r(\cdot))$. Здесь $\Omega = \{\omega = (u_1, u_2, u_3)\colon u_1, u_2, u_3 = 0, 1\}$ и $\mathfrak{F} = \{D\colon D \subset \Omega\}$. Для $i = 1, 2, 3$ полагаем $u_i = 1$, если студент положительно ответил на i-й вопрос. В противном случае принимаем $u_i = 0$. Например, событие вида $\{(1, 1, 1)\}$ означает, что студент положительно ответил на все три вопроса, а событие $\{(0, 0, 1)\}$ заключается в том, что студент положительно ответил только на третий вопрос. В силу независимости ответов студента вероятности

$$\mathbf{P}_r(\{(1,1,1)\}) = pqp, \qquad \mathbf{P}_r(\{(0,0,1)\}) = (1-p)(1-q)p$$

при $r = 1$ и вероятности

$$\mathbf{P}_r(\{(1,1,1)\}) = qpq, \qquad \mathbf{P}_r(\{(0,0,1)\}) = (1-q)(1-p)q$$

при $r = 0$. Если событие A означает, что студент сдаст экзамен, то

$$A = \{(1,1,0), (0,1,1), (1,1,1)\}$$

и вероятность

$$\mathbf{P}_r(A) = \mathbf{P}_r(\{(1,1,0)\}) + \mathbf{P}_r(\{(0,1,1)\}) + \mathbf{P}_r(\{(1,1,1)\}) = rpq(q-p) + pq(2-q).$$

Так как $\varphi_r(\omega)$ — индикатор случайного события A, то математическое ожидание $M_r\Phi(\varphi_r(\omega), \psi_r(\omega)) = \mathbf{P}_r(A)$. Из неравенства $q > p$ и условия оптимальности

$$\mathrm{M}_{r_0}\Phi(\varphi_{r_0}(\omega), \psi_{r_0}(\omega)) = \sup\{\mathrm{M}_r\Phi(\varphi_r(\omega), \psi_r(\omega))\colon r = 0, 1\}$$

получим, что оптимальное управление $r_0 = 1$. Другими словами, студент должен выбирать первый вариант стратегии поведения с точки зрения наиболее успешной сдачи экзамена асситенту и профессору. □

2. Задача Мостеллера как управляющая кибернетическая система

Приведенный в первом разделе подход фактически основан на формальном описании связи между входом $\psi_r(\omega)$ и выходом $\varphi_r(\omega)$ объекта управления E_r. Эта связь задается формулой $\mathbf{P}_r(\{\omega\colon \varphi_r(\omega) = 1\}) = rpq(q-p) + pq(2-q)$, которая определяет распределение случайной величины $\varphi_r(\omega)\colon \Omega \to \{0, 1\}$. Иначе говоря, этот подход изучает статически устойчивый эксперимент $W_r = (E_r, C_r)$ с управлением $r \in R$ с позиции «черного ящика», как это обычно делается в известных задачах автоматического регулирования. Основной недостаток этого подхода заключается в том, что случайные величины $\psi_r(\omega)$ и $\varphi_r(\omega)$ на самом деле являются всего лишь удобной математической моделью измерителей входа и соответственно выхода объекта управления E_r, а не вероятностной моделью статистически устойчивого эксперимента W_r в целом. Поэтому простой и доступный по структуре принцип «черного ящика» не требует детального изучения строения эксперимента W_r, и, значит, не позволяет в полной мере одновременно учитывать как детерминированную, так и вероятностную природу эксперимента W_r.

При изучении реальной управляющей системы всегда возникают трудные вопросы эффективного способа описания и методов изучения с подробным учётом её конкретной физической природы и цели функционирования. В силу этого на реальную систему целесообразно смотреть не с позиции «черного ящика», а с точки зрения её общих фундаментальных свойств и методологического понятия управляющей системы, впервые данного в математической кибернетике [6]. Эта точка зрения по существу была поддержана и последовательно развивалась в работах [1, 2, 3]. В основе кибернетического подхода при построении, анализе и оптимизации модели управляющей системы лежат следующие фундаментальные положения:

- любая управляющая система обладает такими свойствами как схемой, информацией, координатами и функцией;

- принцип дискретности функционирования управляющей системы во времени τ_i, $i \geqslant 0$, где точечный процесс $\{\tau_i; i \geqslant 0\}$ задает на $[0, \infty)$ шкалу тактов времени;
- принцип строения схемы из структурных блоков: внешней среды, входных и выходных полюсов, внешней и внутренней памяти, устройств по переработке информации внешней и внутренней памяти.

При таком нетрадиционном подходе построение вероятностной модели управляющей системы в общем случае включает следующие основные этапы.

- Выделение схемы, информации, координат и функции системы.
- Определение для схемы так называемых её структурных блоков.
- Задание алгоритмов управления изменениями состояний структурных блоков.
- Кодирование информации или нелокальное описание структурных блоков.
- Выявление функциональных и статистических связей между блоками схемы.
- Выбор основных исходных и искомых характеристик системы.
- Решение задач анализа, синтеза и оптимизации управляющей системы.

Рассмотрим теперь применение кибернетического подхода для решения парадокса независимости [4, 5] в задаче Мостеллера [4]. Задача Мостеллера или задача об экзаменах может быть адекватно отображена посредством управляющей системы, блочная схема которой приведена на рис. 2.

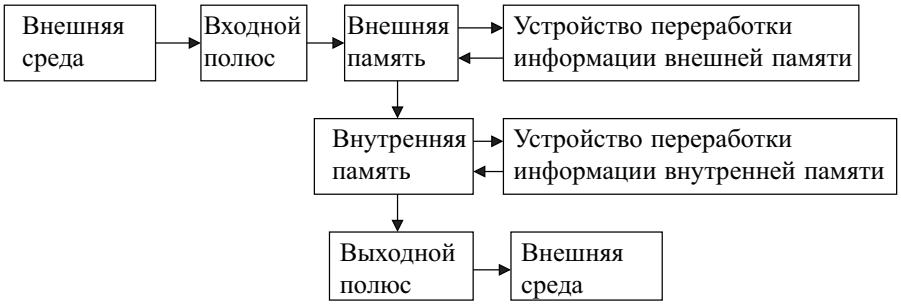

Рис. 2. Схема управляющей системы для задачи об экзаменах

Выясним неформальный смысл всех структурных блоков схемы управляющей системы, соответствующей задаче об экзаменах. Для этого обозначим на оси времени через символ τ_0 момент получения студентом выбранного им экзаменационного билета с тремя вопросами и объявления первого варианта поведения с вероятностью $r \in [0,\ 1]$ или второго варианта с вероятностью $1 - r$. Пусть τ_i есть момент завершения ответа студентом на i-й вопрос, где $i = 1,\ 2,\ 3$. При этом рассмотрим общий случай задачи, когда не предполагается независимость в совокупности последовательных ответов студента на вопросы для любой стратегии его поведения. Сначала пунктом 1) определим математическое описание и свойства внешней среды, а затем пунктами 2) — 7) математическое описание и свойства каждого из остальных структурных блоков схемы.

1) Процессы формирования внешней среды занимают значительное время и являются консервативными. Внешняя среда представляет собой условия и обстановку перед экзаменом, которые навязывают студенту на интуитивном уровне случайно выбрать конкретный вариант поведения в последовательности ответов из двух возможных. Отсюда вытекает, что внешняя среда имеет два следующих состояния: а) профессор — ассистент — профессор (b_1); б) ассистент — профессор — ассистент (b_2). Будем считать, что внешняя среда в некоторый момент τ_0 принимает

значение b_1 с вероятностью $r \in [0,1]$ и значение b_2 с вероятностью $1-r$. Другими словами, студент выбирает план ответов вида: профессор — ассистент — профессор с вероятностью r и стратегию ответов вида: ассистент — профессор — ассистент с вероятностью $1-r$. Информация внешней среды есть множество {профессор — ассистент — профессор, ассистент — профессор — ассистент} $= \{b_1, b_2\}$ из двух состояний внешней среды. Координаты внешней среды — номера 1, 2 её состояний b_1 и b_2. Состояние внешней среды в момент τ_i есть случайный элемент $\chi_i \equiv \chi_0$ при $i = 0$, 1, 2, 3. Код информации внешней среды есть случайный вектор $\chi = (\chi_0, \chi_1, \chi_2, \chi_3)$. При этом распределение вероятностей $\mathbf{P}(\chi_0 = b_1) = r$, $\mathbf{P}(\chi_0 = b_2) = 1 - r$ случайного элемента χ_0 определяет распределение случайного вектора χ и ориентированный граф переходов состояний внешней среды:

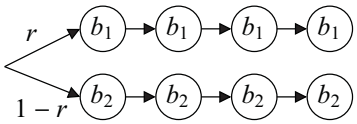

Рис. 3. Граф переходов состояний внешней среды

2) Входной полюс означает получение студентом в момент τ_0 три последовательных вопроса w_1, w_2 и w_3 экзаменационного билета. Информация входного полюса есть множество $\{(w_1, w_2, w_3)\}$ из единственного состояния (w_1, w_2, w_3) входного полюса. Вектор $\alpha_i \equiv (w_1, w_2, w_3)$ определяет состояние входного полюса в момент τ_i, где $i = 0$, 1, 2, 3. Код информации входного полюса есть вектор $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ с равными компонентами. Поэтому ориентированный граф переходов состояний входного полюса можно представить в виде рис. 4:

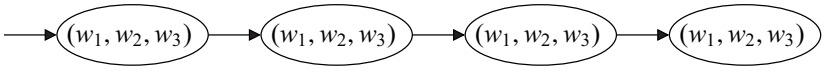

Рис. 4. Граф переходов состояний входного полюса

3) Внешняя память фиксирует очередные вопросы, на которые студент должен отвечать. Информация внешней памяти есть множество $\{(w_1,w_2, w_3), (w_2, w_3), w_3, \varnothing\}$ из четырёх состояний $d_1 = (w_1, w_2, w_3)$, $d_2 = (w_2, w_3)$, $d_3 = w_3$ и $d_4 = \varnothing$ внешней памяти. Координаты внешней памяти — номера 1, 2, 3, 4 её состояний d_1, d_2, d_3, d_4. Состояние внешней памяти в момент τ_i есть $\beta_i = d_{i+1}$ при $i = 0, \ldots, 3$. Код информации внешней памяти — вектор $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$. Отсюда вытекает, что ориентированный граф переходов состояний внешней памяти можно отобразить в виде рис. 5:

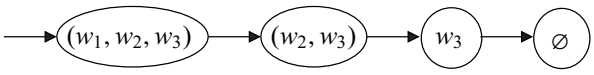

Рис. 5. Граф переходов состояний внешней памяти

4) Устройство по переработке информации внешней памяти детерминировано удаляет вопросы, на которые студент закончил отвечать и, тем самым, изменяет номер состояния внешней памяти в последовательности 1, 2, 3 и 4. Информация блока по переработке внешней памяти есть множество $\{\varnothing, w_1, (w_1, w_2), (w_1, w_2, w_3)\}$ из четырёх состояний $e_1 = \varnothing$, $e_2 = w_1$, $e_3 = (w_1, w_2)$ и $e_4 = (w_1, w_2, w_3)$ этого блока.

Координаты блока по переработке внешней памяти суть номера 1, 2, 3 и 4 состояний e_1, e_2, e_3 и e_4 блока. Состояние блока по переработке внешней памяти в момент τ_i есть $\zeta_i = e_{i+1}$, $i = 0, 1, 2, 3$. Код информации блока по переработке внешней памяти есть вектор $\zeta = (\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$, а ориентированный граф переходов состояний этого блока отображается в виде рис. 6:

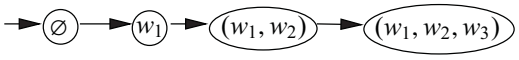

Рис. 6. Граф переходов состояний блока по переработке информации внешней памяти

5) Внутренняя память фиксирует как выбранный заранее студентом вариант поведения, так и запоминает последовательность из трёх результатов его ответов преподавателям на три вопроса. Информация блока внутренней памяти есть множество {студент выбрал первую схему ответа (f_1), студент выбрал вторую схему ответа (f_2), студент ответил на вопрос (f_3), студент не ответил на вопрос (f_4)} из четырёх состояний f_1, f_2, f_3 и f_4 внутренней памяти. Координаты внутренней памяти суть номера 1, 2, 3 и 4 состояний f_1, f_2, f_3 и f_4. Состояние внутренней памяти в момент τ_i есть случайный элемент η_i при $i = 0, 1, 2, 3$. Здесь $\eta_0 \in \{f_1, f_2\}$, $\eta_1 \in \{f_3, f_4\}$, $\eta_2 \in \{f_3, f_4\}$, $\eta_3 \in \{f_3, f_4\}$. Код информации внутренней памяти есть случайный вектор $\eta = (\eta_0, \eta_1, \eta_2, \eta_3)$. Ориентированный граф переходов состояний блока внутренней памяти представлен на рис. 7:

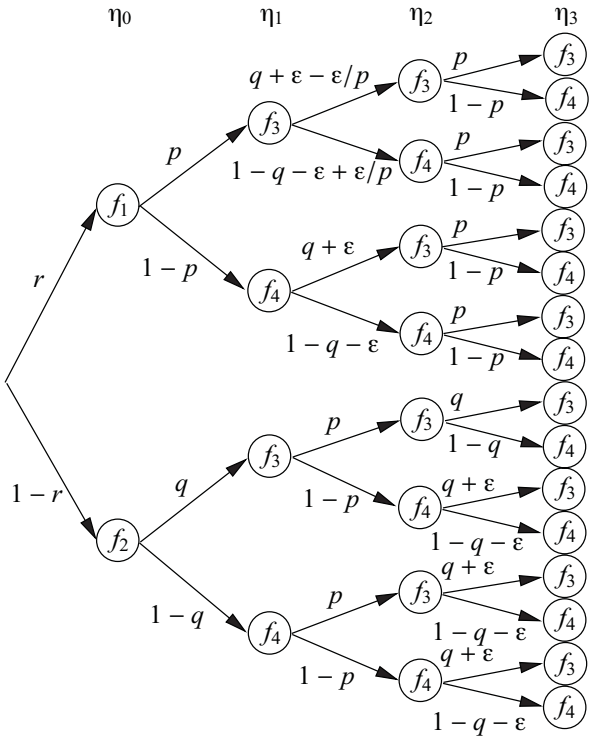

Рис. 7. Граф переходов состояний блока внутренней памяти

Напомним, что согласно условиям задачи об экзаменах последовательные ответы студента происходят случайным и, в общем случае, зависимым образом. Эта

зависимость при заданном значении параметра $\varepsilon \geqslant 0$ определяется следующими соотношениями для условных вероятностей случайных элементов η_0, η_1, η_2, η_3:

$$\mathbf{P}(\eta_0 = f_1) = r, \qquad \mathbf{P}(\eta_1 = f_3 \mid \eta_0 = f_1) = p, \qquad \mathbf{P}(\eta_1 = f_3 \mid \eta_0 = f_2) = q, \tag{1}$$

$$\mathbf{P}(\eta_2 = f_3 \mid \eta_0 = f_1, \eta_1 = f_3) = q + \varepsilon - \varepsilon/p \geqslant p, \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\eta_2 = f_3 \mid \eta_0 = f_1, \eta_1 = f_4) &= \mathbf{P}(\eta_3 = f_3 \mid \eta_0 = f_2, \eta_1 = f_3, \eta_2 = f_4) \\ &= \mathbf{P}(\eta_3 = f_3 \mid \eta_0 = f_2, \eta_1 = f_4, \eta_2 = f_4) = q + \varepsilon < 1, \end{aligned} \tag{3}$$

$$\mathbf{P}(\eta_3 = f_3 \mid \eta_0 = f_2, \eta_1 = f_3, \eta_2 = f_3) = q, \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\eta_2 = f_3 \mid \eta_0 = f_2, \eta_1 = f_3) &= \mathbf{P}(\eta_2 = f_3 \mid \eta_0 = f_2, \eta_1 = f_4) \\ &= \mathbf{P}(\eta_3 = f_3 \mid \eta_0 = f_1, \eta_1 = f_3, \eta_2 = f_3) \\ &= \mathbf{P}(\eta_3 = f_3 \mid \eta_0 = f_1, \eta_1 = f_3, \eta_2 = f_4) \\ &= \mathbf{P}(\eta_3 = f_3 \mid \eta_0 = f_1, \eta_1 = f_4, \eta_2 = f_3) \\ &= \mathbf{P}(\eta_3 = f_3 \mid \eta_0 = f_1, \eta_1 = f_4, \eta_2 = f_4) = p. \end{aligned} \tag{5}$$

Эти соотношения соответствуют графу переходов состояний блока внутренней памяти. Поясним на содержательном уровне ограничения (1)–(5) на условные вероятности, которые формализуют зависимость последовательных ответов студента. Ограничение (1) непосредственно следует из случайного механизма выбора последовательности ответов студента и из условий задачи Мостеллера. Условие (2) показывает, что произошло уменьшение вероятности следующего ответа плохо подготовленного студента ассистенту после удачного предыдущего ответа профессору. Это обстоятельство можно проинтерпретировать тем, что у студента часто появляется некоторое психологическое самомнение после удачного ответа профессору. Соотношение (3) означает увеличение на ε вероятности следующего ответа плохо подготовленного студента ассистенту после неудачного его предыдущего ответа. Этот факт подтверждается большим числом наблюдений, когда слабо подготовленные студенты стараются более внимательно и ответственно отвечать на очередной вопрос при неудовлетворительном предыдущем ответе. С другой стороны, очень часто на экзаменах преподаватели высокой квалификации используют последнюю возможность обучения плохо подготовленных студентов при их неудачных ответах. Таким способом происходит дополнительное обучение студента высококвалифицированным и опытным преподавателем. Равенство (4) соответствует вполне естественной ситуации, когда ответ студента на третий вопрос не зависит от его положительных ответов на первые два вопроса. Наконец, группа ограничений (5) свидетельствует о том, что профессор оценивает студента более строго и в то же время более объективно по сравнению с ассистентом. Другими словами, оценка студента профессором не зависит от удачных или неудачных его предыдущих ответов. С помощью такого простого алгоритма здесь заложена модель обучения плохо подготовленных студентов на экзаменах.

Далее рассмотрим устройство по переработке информации внутренней памяти, которое реализует эту модель обучения на экзаменах плохо подготовленных студентов.

6) Устройство по переработке информации внутренней памяти определяет по некоторому алгоритму условные вероятности очередного положительного ответа студента в зависимости от предыдущих его результатов, и реализовывает случайный механизм оценки ответов на вопросы. Информация блока по переработке внутренней памяти есть множество

$$\{r, (p, q), (q + \varepsilon - \varepsilon/p, q + \varepsilon, p, p), (p, p, p, p, q, q + \varepsilon, q + \varepsilon, q + \varepsilon)\}$$

из четырёх следующих его состояний:

$$g_1 = r, \qquad g_2 = (p, q), \qquad g_3 = (q + \varepsilon - \varepsilon/p, q + \varepsilon, p, p),$$
$$g_4 = (p, p, p, p, q, q + \varepsilon, q + \varepsilon, q + \varepsilon).$$

Координаты блока по переработке внутренней памяти суть номера 1, 2, 3, 4 состояний g_1, g_2, g_3, g_4. Состояние блока в момент τ_i есть $\theta_i = g_{i+1}$ при $i = 0, 1, 2, 3$. Код информации блока — вектор $\theta = (\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$. Поэтому ориентированный граф переходов состояний этого блока имеет простой в виде рис. 8:

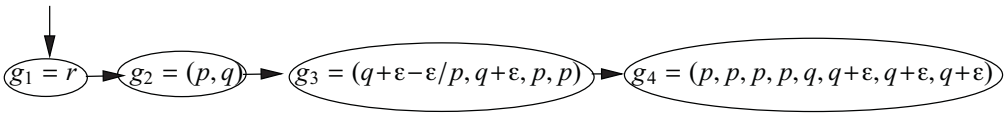

Рис. 8. Граф переходов состояний блока по обработке информации внутренней памяти

7) Выходной полюс определяет наблюдаемые исходы экзамена некоторого студента. Информация блока выходного полюса данного эксперимента есть пространство

$$\Omega = \{\omega = (x_0, x_1, x_2, x_3) \colon x_0 \in \{f_1, f_2\}, x_1, x_2, x_3 \in \{f_3, f_4\}\}$$

из 16 его состояний вида:

$$\omega_1 = (f_1, f_3, f_3, f_3), \quad \omega_2 = (f_1, f_3, f_3, f_4), \quad \omega_3 = (f_1, f_3, f_4, f_3),$$
$$\omega_4 = (f_1, f_3, f_4, f_4), \quad \omega_5 = (f_1, f_4, f_3, f_3), \quad \omega_6 = (f_1, f_4, f_3, f_4),$$
$$\omega_7 = (f_1, f_4, f_4, f_3), \quad \omega_8 = (f_1, f_4, f_4, f_4), \quad \omega_9 = (f_2, f_3, f_3, f_3),$$
$$\omega_{10} = (f_2, f_3, f_3, f_4), \quad \omega_{11} = (f_2, f_3, f_4, f_3), \quad \omega_{12} = (f_2, f_3, f_4, f_4),$$
$$\omega_{13} = (f_2, f_4, f_3, f_3), \quad \omega_{14} = (f_2, f_4, f_3, f_4), \quad \omega_{15} = (f_2, f_4, f_4, f_3),$$
$$\omega_{16} = (f_2, f_4, f_4, f_4).$$

Координаты блока выходного полюса суть номера $1, 2, \ldots, 16$ состояний

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_{16}.$$

Состояние этого блока в момент τ_3 есть случайный элемент ξ, где $\xi(\omega) \equiv \omega$ при $\omega = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \Omega$. Код информации блока выходного полюса есть случайный вектор $\xi = (\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$, где $\xi_i(\omega) \equiv x_i$, при любом $i = 0, \ldots, 3$. Используя соотношения (1) — (5) и граф переходов состояний внутренней памяти построим ориентированный граф появлений состояний выходного полюса в виде рис. 9:

На этом рисунке показаны также вероятности появлений тех или иных состояний выходного полюса и символом A отмечены состояния ω_1, ω_2, ω_5, ω_9, ω_{10} и ω_{13} выходного полюса, в каждом из которых студент сдал экзамен.

Результаты работ [1, 2, 3] показывают, что кибернетический подход позволяет найти не только функциональные и статистические связи между блоками схемы, но эффективно выбрать основные исходные и искомые характеристики управляющей системы с целью решения задач анализа и оптимизации. Это утверждение имеет место и для задачи Мостеллера. Действительно, за исключением блоков внешней среды, внутренней памяти и выходного полюса, поведение каждого из остальных блоков схемы носит либо детерминированный характер, либо однозначно определяется состоянием других её блоков. Поэтому, наблюдая только случайные состояния блока выходного полюса в момент времени τ_3, можно восстановить полную картину хода поведения управляющей системы по приёму экзамена. В частности, можно определить все состояния блока выходного полюса, когда студент сдал экзамен. Следовательно, в качестве основной характеристики задачи об экзаменах можно

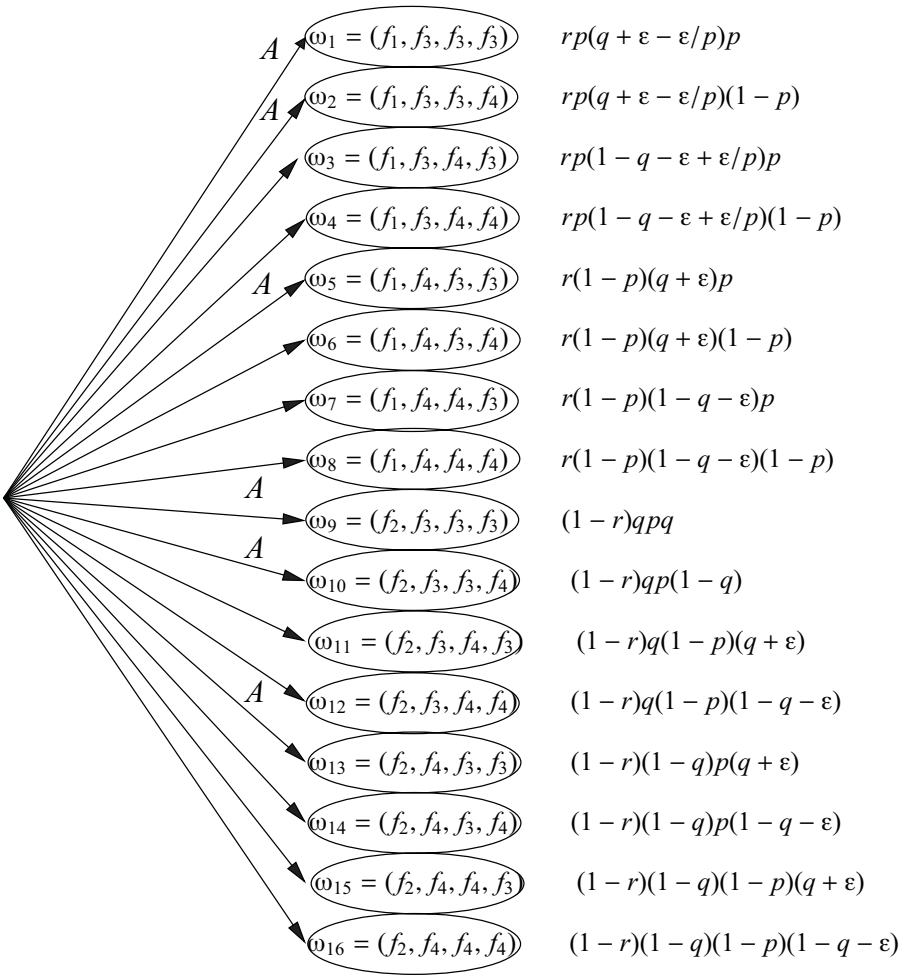

Рис. 9. Граф появлений состояний блока выходного полюса

выбрать состояние блока выходного полюса. При этом блок выходного полюса моделирует работу статистически устойчивого эксперимента W_r, а каждое состояние блока выходного полюса отождествляется с описанием некоторого элементарного исхода эксперимента W_r.

Теперь нетрудно построить колмогоровскую вероятностную модель $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P}_r(\cdot))$ эксперимента W_r. Здесь достоверное событие $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{16}\}$, σ-алгебра $\mathfrak{F} = \{B\colon B \subset \Omega\} = \{B_1, B_2, \ldots, B_{65536}\}$ и вероятностная функция $\mathbf{P}_r(\cdot)$ задается следующими равенствами:

$$\mathbf{P}_r(\{\omega_1\}) = rp(q+\varepsilon-\varepsilon/p)p, \qquad \mathbf{P}_r(\{\omega_2\}) = rp(q+\varepsilon-\varepsilon/p)(1-p),$$
$$\mathbf{P}_r(\{\omega_3\}) = rp(1-q-\varepsilon+\varepsilon/p)p, \qquad \mathbf{P}_r(\{\omega_4\}) = rp(1-q-\varepsilon+\varepsilon/p)(1-p),$$
$$\mathbf{P}_r(\{\omega_5\}) = r(1-p)(q+\varepsilon)p, \qquad \mathbf{P}_r(\{\omega_6\}) = r(1-p)(q+\varepsilon)(1-p),$$
$$\mathbf{P}_r(\{\omega_7\}) = r(1-p)(1-q-\varepsilon)p, \qquad \mathbf{P}_r(\{\omega_8\}) = r(1-p)(1-q-\varepsilon)(1-p),$$
$$\mathbf{P}_r(\{\omega_9\}) = (1-r)qpq, \qquad \mathbf{P}_r(\{\omega_{10}\}) = (1-r)qp(1-q),$$
$$\mathbf{P}_r(\{\omega_{11}\}) = (1-r)q(1-p)(q+\varepsilon), \qquad \mathbf{P}_r(\{\omega_{12}\}) = (1-r)q(1-p)(1-q-\varepsilon),$$
$$\mathbf{P}_r(\{\omega_{13}\}) = (1-r)(1-q)p(q+\varepsilon), \qquad \mathbf{P}_r(\{\omega_{14}\}) = (1-r)(1-q)p(1-q-\varepsilon)p,$$

$$\mathbf{P}_r(\{\omega_{15}\}) = (1-r)(1-q)(1-p)(q+\varepsilon),$$
$$\mathbf{P}_r(\{\omega_{16}\}) = (1-r)(1-q)(1-p)(1-q-\varepsilon).$$

Например, элементарное событие $\{\omega_8\} = \{(f_1, f_4, f_4, f_4)\} \in \mathfrak{F}$ означает, что студент выбрал первый вариант последовательности ответов и отрицательно ответил на все три вопроса. При этом вероятность $\mathbf{P}_r(\{\omega_8\}) = r(1-p)(1-q-\varepsilon)(1-p)$. Построенная колмогоровская вероятностная модель $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P}_r(\cdot))$ эксперимента W_r позволяет выписать функциональную связь между блоком внешней среды и выходным полюсом в виде следующих равенств:

$$\chi_0(\omega_1) = \chi_0(\omega_2) = \cdots = \chi_0(\omega_8) = b_1, \qquad \chi_0(\omega_9) = \chi_0(\omega_{10}) = \cdots = \chi_0(\omega_{16}) = b_2.$$

Аналогично найдём функциональную связь между внутренней памятью и выходным полюсом. Например, функциональная связь между внутренней памятью в моменты τ_3 и выходным полюсом задается равенством $\eta_3(\omega_s) = f_3$ при нечетном значении s. Приведенные здесь и остальные функциональные связи являются на самом деле поточечным заданием случайных элементов $\chi(\omega)$, $\eta(\omega)$ и $\xi(\omega)$. Поэтому их законы распределения и связанные с этими элементами условные вероятности могут быть найдены по правилам теории вероятностей. Так, условная вероятность

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_r(\eta_2 = f_3 \mid \eta_0 = f_1) &= \mathbf{P}_r(\eta_0 = f_1, \eta_2 = f_3)/\mathbf{P}_r(\eta_0 = f_1)\\ &= (\mathbf{P}_r(\{\omega_1\}) + \mathbf{P}_r(\{\omega_2\}) + \mathbf{P}_r(\{\omega_5\}) + \mathbf{P}_r(\{\omega_6\}))/r\\ &= pq + p\varepsilon - \varepsilon + (1-p)(q+\varepsilon) = q.\end{aligned}$$

Однако, условная вероятность

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_r(\eta_3 = f_3 | \eta_0 = f_2) &= \mathbf{P}_r(\eta_0 = f_2, \eta_3 = f_3)/\mathbf{P}_r(\eta_0 = f_2)\\ &= (\mathbf{P}_r(\{\omega_9\}) + \mathbf{P}_r(\{\omega_{11}\}) + \mathbf{P}_r(\{\omega_{13}\}) + \mathbf{P}_r(\{\omega_{15}\}))/(1-r)\\ &= q + \varepsilon(1-pq) > q.\end{aligned}$$

Значит, произошло обучение студента на экзаменах.

Итак, окончательные результаты пунктов 1) — 7) можно сформулировать в виде следующего доказанного утверждения.

Теорема. *Математическое описание внешней среды, входного полюса, внешней памяти, устройства по переработке информации внешней памяти, внутренней памяти, устройства по переработке информации внутренней памяти и выходного полюса выполняется векторами* $\chi(\omega)$, $\alpha(\omega)$, $\beta(\omega)$, $\zeta(\omega)$, $\eta(\omega)$, $\theta(\omega)$ *и* $\xi(\omega)$ *на вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P}_r(\cdot))$.

Функция эксперимента W_r об экзамене заключается в случайном выборе студентом одного из двух вариантов поведения и в его ответах на три последовательных вопроса с целью определения объективной оценки преподавателями знаний студента. Окончательный результат экзамена данного студента существенно оказывает влияние на отношение студента к экзаменаторам и, значит, в той или иной степени изменяет неконтролируемые условия внешней среды. Итак, для задачи об экзаменах (Мостеллера) выделены схема, информация, координаты и функция.

3. Оптимальное поведение студента и решение парадокса Мостеллера–Секея

Пусть случайное событие $A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_5, \omega_9, \omega_{10}, \omega_{13}\}$ означает, что студент сдал экзамен. Тогда имеем:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_r(A) &= \mathbf{P}_r(\{\omega_1\}) + \mathbf{P}_r(\{\omega_2\}) + \mathbf{P}_r(\{\omega_5\}) + \mathbf{P}_r(\{\omega_9\}) + \mathbf{P}_r(\{\omega_{10}\}) + \mathbf{P}_r(\{\omega_{13}\})\\ &= r[pq(q-p) - \varepsilon(1+p^2-p-pq)]) + qp(2-q) + p\varepsilon(1-q).\end{aligned}$$

Формулировка задачи оптимизации для данного эксперимента W_r заключается в определении такого $r \in [0,1]$, для которого выполняется условие оптимальности:

$$\mathbf{P}_{r_0}(A) = \sup\{\mathbf{P}_r(A)\colon 0 \leqslant r \leqslant 1\}.$$

При определении оптимальной стратегии выбора последовательности ответов в задаче Мостеллера об экзаменах с обучением необходимо учитывать естественные ограничения

$$0 < p, q < 1, \qquad q > p, \qquad \varepsilon \geqslant 0, \qquad q + \varepsilon < 1, \qquad q + \varepsilon - \varepsilon/p \geqslant p$$

на параметры p и q, которые определяют уровень подготовки студента, и на параметр обучения ε. Рассмотрим теперь всевозможные случаи изменения параметров p, q и ε при выполнении указанных ограничений.

Лемма 2. *Если выполняется неравенство*

$$q \geqslant (p - 0.5)^2 + 0.75, \qquad q + \varepsilon < 1,$$

то оптимальная стратегия поведения определяется равенством $r_0 = 1$.

Доказательство. Пусть выполняется неравенство

$$q \geqslant (p - 0.5)^2 + 0.75.$$

Тогда имеем соотношение

$$1 - q \leqslant p(q-p)(1-p)^{-1} \leqslant pq(q-p)(1 + p^2 - p - pq)^{-1}.$$

Если $0 \leqslant \varepsilon < 1 - q$, то

$$q + \varepsilon - \varepsilon p^{-1} > p, \qquad pq(q-p) - \varepsilon(1 + p^2 - p - pq) > 0.$$

Вероятность события A равна

$$\mathbf{P}_r(A) = r\left[pq(q-p) - \varepsilon\left(1 + p^2 - p - pq\right)\right] + qp(2-q) + p\varepsilon(1-q).$$

Отсюда непосредственно находим, что оптимальное управление $r_0 = 1$. □

Лемма 3. *Пусть*

$$q < (p - 0.5)^2 + 0.75, \qquad 0 \leqslant \varepsilon < pq(q-p)\left(1 + p^2 - p - pq\right)^{-1}.$$

Тогда оптимальный план $r_0 = 1$.

Доказательство. Так как

$$q < (p - 0.5)^2 + 0.75,$$

тогда выполняются следующие неравенства:

$$pq(q-p)(1 + p^2 - p - pq)^{-1} < p(q-p)(1-p)^{-1} < 1 - q.$$

Из условия

$$0 \leqslant \varepsilon < pq(q-p)(1 + p^2 - p - pq)^{-1}$$

получаем, что

$$pq(q-p) - \varepsilon(1 + p^2 - p - pq) > 0, \qquad q + \varepsilon < 1, \qquad q + \varepsilon - \varepsilon/p > p.$$

Следовательно, опять оптимальная стратегия поведения студента $r_0 = 1$. □

Лемма 4. *Если*

$$q < (p - 0.5)^2 + 0.75, \qquad \varepsilon = pq(q-p)(1 + p^2 - p - pq)^{-1},$$

то оптимальная стратегия поведения определяется соотношением $0 \leqslant r_0 \leqslant 1$.

Доказательство. Из условий леммы 4 непосредственно следует, что

$$pq(q-p) - \varepsilon(1 + p^2 - p - pq) = 0, \qquad q + \varepsilon < 1, \qquad q + \varepsilon - \varepsilon/p > p$$

и, значит, оптимальное управление r_0 можно выбрать в промежутке $0 \leqslant r_0 \leqslant 1$. □

Лемма 5. *Пусть имеет место*

$$pq(q-p)(1 + p^2 - p - pq)^{-1} < \varepsilon \leqslant p(q-p)(1-p)^{-1}, \qquad q < (p - 0.5)^2 + 0.75.$$

Тогда оптимальный план $r_0 = 0$.

Доказательство. Если

$$pq(q-p)(1+p^2-p-pq)^{-1} < \varepsilon \leqslant p(q-p)(1-p)^{-1}, \quad q < (p-0.5)^2 + 0.75,$$

тогда справедливы неравенства

$$pq(q-p) - \varepsilon\left(1+p^2-p-pq\right) < 0, \qquad q+\varepsilon-\varepsilon/p \geqslant p, \qquad q+\varepsilon < 1.$$

Отсюда $r_0 = 0$, и студент выбирает второй порядок ответов по схеме на первый вопрос студент отвечает ассистенту, на второй вопрос — профессору и на последний вопрос — ассистенту. □

Таким образом, были определены области значений параметров p, q и промежутки изменения параметра ε, которые позволяют понять парадокс независимости [5]. Эти области соответствует тому случаю, когда студентам при их ответах преподавателям целесообразно пользоваться первым или вторым вариантом поведения в зависимости от значений параметров p и q, отвечающие за подготовку к экзаменам, и параметра обучения ε. Как следствие из предыдущих рассуждений получаем, что при $\varepsilon = 0$ следует применять только первый вариант поведения при

$$(p,q) \in \{(p,q)\colon 0 < p,q < 1, q > p\}.$$

Заметим, что оптимальный план $r_0 = 1$ задачи Мостеллера при $\varepsilon = 0$ совпадает с решением аналогичной задачи из работ [4, 5].

На рис. 10, составленный из четырех частей, приведены заштрихованные области значений параметров p, q и промежутки изменения параметра ε, в которых следует применять оптимальный план последовательности ответов студента на экзамене.

Приведём теперь решение известного парадокса о независимости [5]. Итак, совет использовать только первый вариант поведения, который даётся в книгах [4, 5], не является всегда верным. В этих книгах ключевым фактом в рассуждениях является важность правильного ответа на второй вопрос. Действительно, только в этом случае студент будет иметь возможность подряд два правильных ответа и может сдать экзамен. Другими словами, большая вероятность ответить на второй вопрос ассистенту якобы всегда играет более существенную роль, чем меньшее число ответов профессору. Однако исследования этой задачи с помощью кибернетического подхода, многочисленные опросы студентов и сами экзамены показывают, что применение первого или второго варианта поведения существенно зависит от подготовки и обучаемости на экзаменах студентов. Так для отлично подготовленных студентов, ответы которых, скорее всего, будут независимыми случайными событиями ($\varepsilon = 0$) или удовлетворяют условию

$$q \geqslant (p-0.5)^2 + 0.75,$$

целесообразно пользоваться первым вариантом поведения. Напротив, для плохо подготовленных студентов и при хорошей их обучаемости, когда

$$0 < p,q < 1, \qquad q > p, \qquad q < (p-0.5)^2 + 0.75,$$
$$pq(q-p)(1+p^2-p-pq)^{-1} < \varepsilon \leqslant p(q-p)(1-p)^{-1},$$

целесообразно применять второй вариант поведения. Такая ситуация, по-видимому, сложилась после 1992 года не только в Нижегородском госуниверситете.

Список литературы

1. М. А. Федоткин, *Нелокальный способ задания управляемых случайных процессов*, Математические вопросы кибернетики, вып. 7, “Наука”, Москва, 1998, стр. 332–344.
2. М. А. Федоткин, А. М. Федоткин, *Анализ и оптимизация выходных процессов при циклическом управлении конфликтными транспортными потоками Гнеденко–Коваленко*, Автоматика и телемеханика (2009), № 12, 92–108.
3. A. V. Zorine and M. A. Fedotkin, *Optimization of control of doubly stochastic non-ordinary flows in time-sharing systems*, Automation and remote control **7** (2005), № 7, 1115–1124.

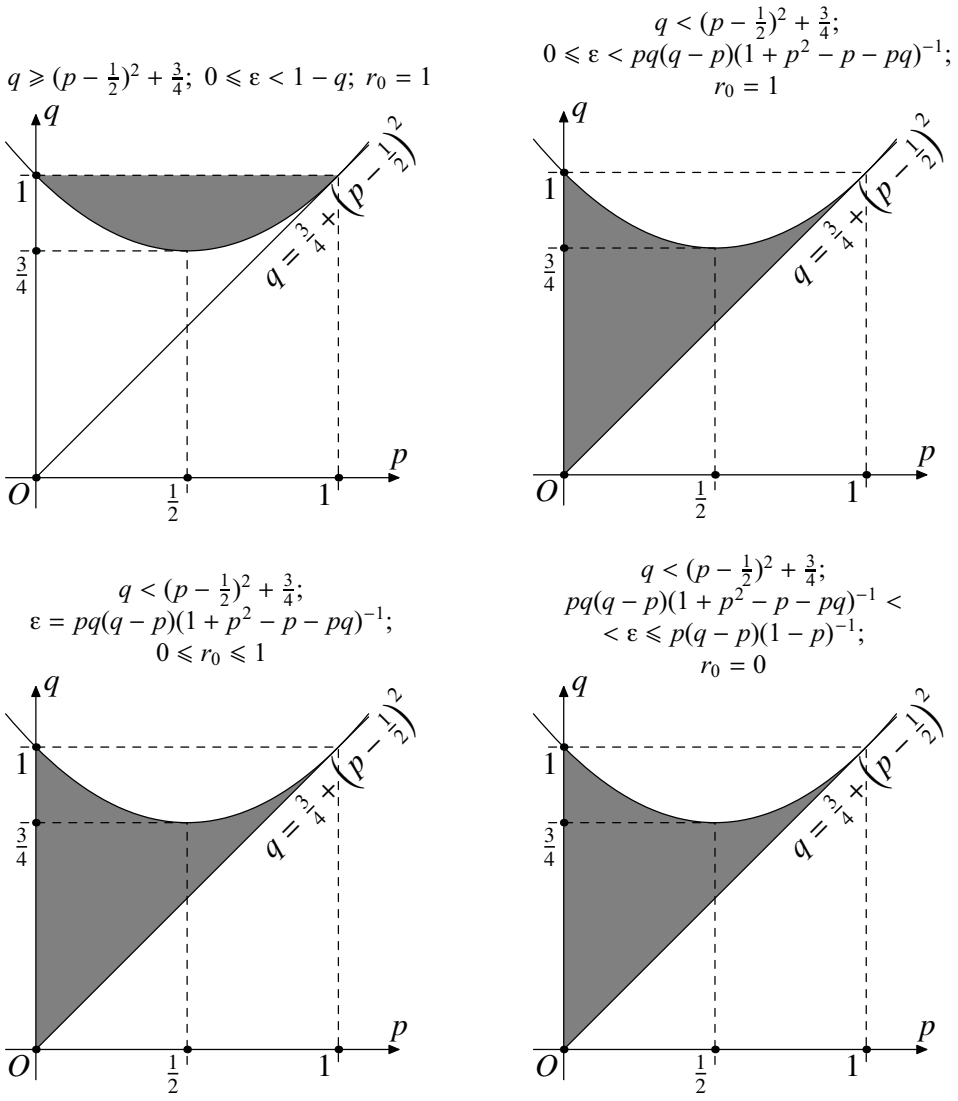

Рис. 10. Области оптимальных значений p, q при заданных значениях ε

4. F. Mosteller, *Fifty challenging problems in probability with solutions*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1965.
5. G. Szekely, *Paradoxes in probability theory and mathematical statistics*, Akademiai Kiady, Budapest, 1986.
6. А. А. Ляпунов, С. В. Яблонский, *Теоретические проблемы кибернетики*, Проблемы кибернетики, вып. 9, "Физматгиз", Москва, 1963, стр. 5–22.

Кафедра прикладной теории вероятностей, факультет вычислительной математики и кибернетики, Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского — национальный исследовательский университет, проспект Гагарина, 23, Нижний Новгород, 603950, Россия

Адрес электронной почты: fma5@rambler.ru

Поступила 11/06/2011