Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 85, 2011, стор. 22–38

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 85, 2011, pp. 22–38

РАСШИРЕННОЕ УРАВНЕНИЕ ПУАССОНА ДЛЯ СЛАБО ЭРГОДИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ МАРКОВА

УДК 519.21

А. Ю. ВЕРЕТЕННИКОВ И А. М. КУЛИК

Анотація. Получены условия разрешимости уравнения Пуассона с расширенным генератором общего процесса Маркова X. Описана предсказуемая составляющая в разложении Дуба-Мейера процессов вида $g(X(t), Y(t))$, где Y — решение стохастического уравнения с коэффициентами, зависящими от X, а функция $g = g(x, y)$ получена как семейство решений уравнения Пуассона.

Анотація. Отримано умови розв'язності рівняння Пуассона з розширеним генератором загального процесу Маркова X. Описано передбачувану складову у розкладі Дуба-Мейєра процесів виду $g(X(t), Y(t))$, де Y — розв'язок стохастичного рівняння з коефіцієнтами, що залежать від X, а функція $g = g(x, y)$ отримана як сім'я розв'язків рівняння Пуассона.

Abstract. Solvability conditions for a Poisson equation with the extended generator of a general Markov process are obtained. The predictable part in the Doob-Meyer decomposition is described for a process of the form $g(X(t), Y(t))$, where Y is the solution to a stochastic equation with the coefficients depending on X, and the function $g = g(x, y)$ is defined as a family of solutions to the Poisson equation.

1. Введение

Пусть $X(t)$, $t \in \mathbb{R}^+$ — однородный процесс Маркова, а процессы Y^ε, $\varepsilon > 0$ заданы как решения дифференциальных уравнений (возможно, стохастических), коэффициенты которых зависят от "быстрой" случайной компоненты $X^\varepsilon(t) = X(t\varepsilon^{-1})$, $t \in \mathbb{R}^+$. Результаты, описывающие предельное поведение Y^ε при $\varepsilon \to 0+$ представляют значительный интерес в силу широкого распространения моделей, как теоретического так и прикладного характера, в которые естественным образом входят "быстрые" и "медленные" компоненты движения. Подробный обзор таких результатов може быть найден, например, в разделах 1 и 2 работы [1]. Настоящая статья мотивирована естественным вопросом: каким образом эргодические свойства процесса X вовлечены в результаты типа "диффузионной аппроксимации" для процессов Y^ε (этот термин, как правило, используют для обозначения определенной функциональной версии ЦПТ).

Классические результаты о диффузионной аппроксимации (напр. [2], [3], [4], [5] теорема 12.2.4; см. также [6]) предполагают *равномерную эргодичность* процесса X, то есть единственность инвариантного распределения π и наличие следующей оценки, равномерной по точкам x пространства $\mathbb{X}$ состояний процесса X:

$$\|P_t(x, dy) - \pi(dy)\|_{\mathrm{var}} \le r(t), \qquad t \in \mathbb{R}^+, \tag{1}$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60H10, 60J10.

Ключевые слова и фразы. Процесс Маркова, расширенный генератор, уравнение Пуассона, разложение Дуба–Мейера.

Дослідження набули часткової підтримки ДФФД України, проект Ф40.1/023.

Работа основана на докладе, представленном на международной конференции "Modern Stochastics: Theory and Applications II", которая проходила 7–11 сентября 2010 г. в Киевском национальном университете имени Тараса Шевченко и была посвящена юбилеям трех выдающихся украинских ученых: Анатолия Скорохода, Владимира Королюка и Игоря Коваленко.

где $P_t(x, dy)$ — функция перехода процесса X, $\|\cdot\|_{\text{var}}$ — расстояние по вариации, r — некоторая функция, достаточно быстро сходящаяся к нулю на $+\infty$. Предположение о равномерной эргодичности вполне естественно для процессов с конечным (или, в большей общности, компактным) пространством состояний, но для более сложных систем становится весьма ограничительным. Так, если X задан СДУ в $\mathbb{R}^k$ с коэффициентами, удовлетворяющими условиям не более чем линейного роста, то (1) заведомо не выполняется в связи с тем, что $P_t(x, K) \to 0$, $|x| \to \infty$ для произвольного компакта K при произвольном фиксированном t. Еще менее типичны оценки типа (1) для процессов Маркова с бесконечномерными пространствами состояний, например, заданных как решения СДУЧП: для многих таких процессов, распределения $P_t(x, \cdot)$ для определенных пар стартовых точек взаимно сингулярны, что очевидным образом делает невозможным стремление по вариации $P_t(x, dy)$ к инвариантному распределению.

В работе [7] был развит подход к решению задачи диффузионной аппроксимации в ситуации, когда "быстрая" случайная компонента представляет собой диффузионный процесс. Этот подход существенным образом опирался на проведенный в той же работе анализ следующего *уравнения Пуассона* в $\mathbb{R}^k$:

$$Lu(x) = -f(x), \tag{2}$$

где

$$L = \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{k} b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

– эллиптический оператор в частных производных второго порядка, соответствующий "быстрой" диффузионной компоненте. Для диффузионных процессов, как было отмечено выше, (1) как правило не имеет места; вместо этого, при широком спектре естественных предположений на коэффициенты, имеют место оценки вида

$$\|P_t(x, dy) - \pi(dy)\|_{\text{var}} \le r(t)\psi(x), \qquad t \in \mathbb{R}^+ \tag{3}$$

с дополнительной "штрафной" функцией ψ, явный вид которой, равно как и вид функции r, определяется вариантом условия Ляпунова, накладываемого на коэффициенты процесса (см. [8]–[10]). Именно оценки вида (3) использовались в [7] для анализа уравнения (5).

Нашей целью, в перспективе, будет обобщение подхода работы [7], не накладывающее специфических структурных предположений на "быструю" случайную компоненту: не предполагая, например, чтобы процесс X был диффузионным, мы будем требовать выполнения лишь оценок вида (3) или, в еще большей общности,

$$d\left(P_t(x, dy), \pi(dy)\right) \le r(t)\psi(x), \qquad t \in \mathbb{R}^+, \tag{4}$$

где d — некоторое *вероятностное расстояние* (см. подробное изложение в разделе 2 далее). Таким образом, вообще говоря, наши основные предположения будут допускать возможность того, что переходные вероятности "быстрой" случайной компоненты сходятся к инвариантному распределению в некотором смысле, более слабом, чем сходимость по вариации; этим объясняется термин "слабо эргодический процесс" в названии работы.

В литературе существует достаточно широкий спектр методов проверки условий вида (3) или (4). В [11] и [12] (3) устанавливается, с экспоненциальной функцией r в первой из статей и субэкспоненциальной — во второй. В [13] приведены эффективные условия, позволяющие устанавливать (3) с экспоненциальной функцией r для решений СДУ с шумом Леви — подчеркнем, что, как показано в [13], для таких процессов проверка условий неприводимости из [11] и [12], сформулированных в терминах "petite sets", вряд ли возможна в полной общности. Оценка вида (4) с

экспоненциальной функцией r и подходящим расстоянием d естественным образом возникает, если процесс задан СДУ (возможно, бесконечномерным), удовлетворяющим определенному предположению *диссипативности*; типичные примеры таких результатов приведены в [14] (раздел 11.5) и [15] (раздел 16.2). В ряде недавних публикаций [16]–[19] был предложен ряд методов, позволяющих устанавливать оценки, сходные с (4), в предположениях, более тонких, чем условие диссипативности. Отдельно упомянем предложенную в [20] "общую версию теоремы Харриса" (мы следуем терминологии [20]), устанавливающую (4) при наличии подходящей версии условия Ляпунова, в которое входит множество, на котором процесс X в определенном — связанном с d смысле — неприводим ("d-small set"). Таким образом, существует ряд примеров, представляющих значительный интерес, в которых эффективным образом могут быть установлены явные оценки скорости сходимости к инвариантному распределению, неравномерные по начальной точке (либо по вариации, как в (3), либо относительно некоторого более слабого вероятностного расстояния, как в (4)). Нашей общей целью будет получить теоремы о диффузионной аппроксимации для систем, в которых "быстрая" компонента представлена процессом такого типа.

Настоящая статья представляет собой первую, подготовительную и техническую, часть намеченной выше программы. Для общего процесса Маркова X, мы исследуем подходящую версию уравнения Пуассона (2), решая при этом два основных вопроса, естественным образом возникающие в контексте задачи диффузионной аппроксимации.

Первый из этих вопросов состоит в том, *в каком смысле* следует понимать решение уравнения (2). В [7] исследовалось *слабое* решение уравнения (2) с эллиптическим оператором в частных производных второго порядка. Там же было показано, что, как правило, такое решение неограничено на $\mathbb{R}^k$, если только правая часть (2) не предполагается достаточно быстро сходящейся к нулю при $|x| \to \infty$. Это показывает, что если оператор L в (2) интерпретировать, например, как генератор полугруппы, порожденной исходным процессом в пространстве $\mathbb{B}(\mathbb{R}^k)$ ограниченных измеримых функций, то при этом существенно ограничивается область разрешимости (2). Мы предлагаем, в качестве аналога оператора L в (2), для общего процесса Маркова использовать *расширенный генератор* $\mathcal{A}$, определяемый в терминах подходящего аналога формулы Дынкина (см. определение 2.1). Другими словами, для данной измеримой функции $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ мы ищем функцию u, удовлетворяющую уравнению

$$\mathcal{A}u = -f. \tag{5}$$

Поскольку уравнение (5) формулируется в терминах расширенного генератора $\mathcal{A}$, мы говорим о нем, как о *расширенном уравнении Пуассона*.

Второй вопрос, рассматриваемый в данной статье, связан со структурой предсказуемой составляющей в разложении Дуба-Мейера процессов вида

$$g(X(t), Y(t)), \qquad t \in \mathbb{R}^+, \tag{6}$$

где X — исходный процесс Маркова, Y — процесс, задаваемый СДУ с коэффициентами, зависящими от X, а функция $g = g(x, y)$ получена как семейство решений уравнения вида (5) с правой частью $f = f(x, y)$, зависящей от y как от параметра. Такие процессы естественным образом возникают в контексте теории диффузионной аппроксимации, поскольку применение стандартного приема, связанного с введением *корректора* (см. например доказательство теоремы 3 в [7]), естественно требует знания свойств семимартингальных составляющих такого корректора. В работах [7] и [21] такие свойства получались с помощью подходящего варианта формулы Ито, но такой подход существенным образом зависит от структуры процесса X; в частности, в [7] и [21] использовались результаты о локальных свойствах слабых решений

параболических и эллиптических уравнений в частных производных второго порядка. Однако уже в — сравнительно простом — случае процесса X, заданного СДУ с шумом Леви, применение такого подхода существенно затруднено в силу отсутствия (в требуемой общности) для решений уравнений с псевдо-дифференциальными операторами аналогов упомянутых выше аналитических результатов. В данной статье мы предлагаем другой подход, не требующий специфических предположений о структуре процесса и позволяющий описывать структуру предсказуемой составляющей процессов вида (6). В последующей работе [22] эти результаты будут использованы для исследования задачи диффузионной аппроксимации.

2. Обозначения и предварительные результаты

Везде далее $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}^+\}$ — однородный феллеровский процесс Маркова, принимающий значения в полном сепарабельном метрическом пространстве $\mathbb{X}$, с переходной вероятностью $P_t(x, dy)$. Мы предполагаем, что при любом распределении начального значения $X(0)$ процесс X имеет cádlág модификацию. Через P_x, E_x, $x \in \mathbb{X}$ обозначаются распределение такой модификации в $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$ с $X(0) = x$ и соответствующее математическое ожидание. Натуральная фильтрация процесса X обозначается $\mathbb{F}^X = \{\mathcal{F}_t^X, t \in \mathbb{R}^+\}$.

Определение 2.1. Измеримая функция $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ лежит в области определения расширенного генератора $\mathcal{A}$ процесса X, если существует измеримая функция $g\colon \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ такая, что процесс

$$f(X(t)) - \int_0^t g(X(s))\, ds, \qquad t \in \mathbb{R}^+ \tag{7}$$

корректно определен и является локальным $\mathbb{F}^X$ — мартингалом относительно каждой из мер P_x, $x \in \mathbb{X}$. Для такой пары (f, g) мы пишем $f \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})$ и $\mathcal{A}f \stackrel{df}{=} g$.

Приведенное определение естественным образом мотивируется формулой Дынкина, согласно которой, если f лежит в области определения (обычного) генератора A, то $f \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})$ и $\mathcal{A}f = Af$. В то же время, как правило, $\mathrm{Dom}(\mathcal{A})$ существенно шире области определения (обычного) генератора A: например, она не обязана содержать лишь ограниченные функции. Понятие расширенного генератора восходит, по-видимому, к работе [23]. Его определение допускает различные технические модификации. Наше определение совпадает с приведенным в [25], и является более общим, чем приведенное в [24], глава VII: вместо мартингальности, мы требуем, чтобы процесс (7) был *локальным* мартингалом, и кроме того не требуем непрерывности справа траекторий этого процесса. Отметим, что в определении 2.1 функция g, вообще говоря, не является однозначно определенной, то есть, $\mathcal{A}$ является многозначным отображением (см. обсуждение после определения 1.8 в [24], глава VII).

Определение 2.2. Измеримая функция $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ лежит в области определения *расширенного потенциала* $\mathcal{R}$ процесса X, если

$$\int_0^\infty |\mathsf{E}_x f(X(t))|\, dt < +\infty, \qquad x \in \mathbb{X}.$$

При этом расширенный потенциал на функции f определен равенством

$$\mathcal{R}f(x) = \int_0^\infty \mathsf{E}_x f(X(t))\, dt, \qquad x \in \mathbb{X}. \tag{8}$$

Приводимая ниже теорема 3.1, в частности, проясняет связь расширенного потенциала $\mathcal{R}$ с уравнением (5): с одной стороны, при определенных условиях, $\mathcal{R}f$ доставляет решение (5), а с другой — в определенном классе это уравнение не может иметь решений, отличных от $\mathcal{R}f$.

Пусть d — *предметрика*, то есть неотрицательная симметричная полунепрерывная снизу функция на $\mathbb{X}\times\mathbb{X}$, обращающаяся в 0 на "диагонали" $\{(x,x), x\in\mathbb{X}\}\subset\mathbb{X}\times\mathbb{X}$ и принимающая положительные значения вне ее. Для произвольных вероятностных мер μ,ν на $\mathbb{X}$ обозначим

$$d(\mu,\nu)=\inf_{(\xi,\eta)\in \mathrm{C}(\mu,\nu)} \mathsf{E}\, d(\xi,\eta),$$

где $\mathrm{C}(\mu,\nu)$ — семейство пар (ξ,η) случайных элементов со значениями в $\mathbb{X}$ таких, что $\xi\stackrel{d}{=}\mu$, $\eta\stackrel{d}{=}\nu$. Приведенное определение является подходящей версией определения *минимального* (или *каплингового*) расстояния между вероятностными распределениями, см. например [26] или [27], раздел 11.8.

Следующее условие является нашим основным предположением об эргодических свойствах процесса X, то есть предельном (при $t\to+\infty$) поведении его переходных вероятностей.

$\mathbf{E}(d,r,\psi)$. Процесс X имеет единственную инвариантную меру π, и справедлива оценка

$$d\left(P_t(x,\cdot),\pi\right)\le r(t)\psi(x),\qquad x\in\mathbb{X},\ t\ge 0, \tag{9}$$

где d — предметрика, функция ψ принимает значения в $[1,+\infty)$ и измерима, функция $r\colon \mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ ограничена, измерима, и такова, что $r(t)\to 0$, $t\to\infty$.

В некоторых ситуациях, нам будет удобно дополнять условие $\mathbf{E}(d,r,\psi)$ следующим вспомогательным предположением.

$\hat{\mathbf{E}}(d,r,\psi)$. Для данных функций $r\colon \mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$, $\psi\colon \mathbb{X}\to[1,+\infty)$ и предметрики d имеет место оценка

$$d\left(P_t(x,\cdot),P_t(y,\cdot)\right)\le r(t)d(x,y)\left(\psi(x)+\psi(y)\right),\qquad x,y\in\mathbb{X},\ t\ge 0.$$

Приведем два наиболее типичных примера.

Пример 2.1. Пусть $d(x,y)=\mathbb{1}_{x\ne y}$ — дискретная метрика. Тогда

$$d(\mu,\nu)=(1/2)\|\mu-\nu\|_{\mathrm{var}}$$

(см. [29]), и предположение $\mathbf{E}(d,r,\psi)$ есть в точности условие (3). Записав неравенство треугольника

$$d(P_t(x,\cdot),P_t(y,\cdot))\le d(P_t(x,\cdot),\pi)+d(P_t(y,\cdot),\pi)$$

и приняв во внимание, что $d(x,y)=1$ при $x\ne y$, видим, что условие (3) также влечет за собой выполнение $\hat{\mathbf{E}}(d,r,\psi)$. Как уже упоминалось во введении, существует значительное количество работ, посвященных проверке условия (3) ([8]–[13] — этот список далек от исчерпывающего).

Пример 2.2. Пусть ρ — исходная метрика на пространстве $\mathbb{X}$, $d=\rho^p$, где $p\in[1,+\infty)$ — некоторое число. Тогда

$$d(\mu,\nu)=[W_{\rho,p}(\mu,\nu)]^p,$$

где $W_{\rho,p}$ — вероятностная *метрика Канторовича–Рубинштейна*. Отметим, что в современной литературе $W_{\rho,p}$ часто называют *p-метрикой Васерштейна*, однако это название не отражает истории вопроса; см. раздел 1.1.3 [26] и приведенные там ссылки. Простым достаточным условием для выполнения условий $\mathbf{E}(d,r,\psi)$, $\hat{\mathbf{E}}(d,r,\psi)$ с экспоненциальной функцией r является условие диссипативности; см. например [14], раздел 11.5 и [15], раздел 16.2. В упомянутых работах рассматриваются случаи $p=2$ и $p=1$, соответственно. С соответствующими модификациями, та же техника может быть использована и для других значений показателя степени p.

Введем еще одно моментное условие на переходные вероятности.

$\mathbf{M}_p(\phi,\psi)$. Для функций $\phi,\psi\colon \mathbb{X}\to[1,\infty)$ и числа $p\in[1,\infty]$ имеет место неравенство

$$\int_{\mathbb{X}} \phi^p(y)\,P_t(x,dy)\le\psi(x),\qquad x\in\mathbb{X},\ t\ge 0, \tag{10}$$

причем функция ψ лежит в $L_1(\pi)$ (мы считаем, что $1^\infty=1$ и $a^\infty=\infty$ для $a>1$).

Отметим, что если $\phi\equiv 1$, то условие $\mathbf{M}_p(\phi,\psi)$ тривиальным образом выполняется с произвольным $p\in[1,\infty]$. Для неограниченных ϕ это условие может быть эффективным образом обеспечено с помощью подходящей версии условия Ляпунова; см. например Proposition 1 в [7], неравенства (4) и (7).

Функция ψ, входящая в правые части неравенств (9) и (10), описывающих эргодические и моментные свойства процесса X, имеет смысл "штрафа", зависящего от стартового положения этого процесса. Следующее условие, в определенном смысле, контролирует величину этого "штрафа".

$\mathbf{P}(\psi)$. Для произвольного $x\in\mathbb{X}$

$$\mathsf{E}_x\int_0^\infty e^{-\lambda t}\psi(X(t))\,dt<\infty,\qquad \lambda>0.$$

Для $p\in[1,\infty)$ и функции $\phi\colon\mathbb{X}\to[1,+\infty)$ обозначим $H_{\phi,d,p}$ класс таких функций $f\colon\mathbb{X}\to\mathbb{R}$, что

$$\|f\|_{\phi,d,p}\stackrel{df}{=}\sup_{x\ne y}\frac{|f(x)-f(y)|}{d^{1/p}(x,y)(\phi(x)+\phi(y))}<+\infty. \tag{11}$$

Класс $H_{\phi,d,p}$ естественно понимать как "весовое пространство Гельдера" относительно предметрики d с показателем $1/p$ и весом ϕ. Использование функции ϕ (вообще говоря — неограниченной) в качестве "веса" имеет своей целью расширение соответствующих функциональных классов.

Помимо процесса X, мы будем рассматривать винеровский процесс W со значениями в $\mathbb{R}^l$ и пуассоновские точечные меры ν_1,ν_2 на $\mathbb{R}^+\times\mathbb{U}_1$ и $\mathbb{R}^+\times\mathbb{U}_2$ соответственно, здесь $\mathbb{U}_1$ и $\mathbb{U}_2$ — некоторые борелевские измеримые пространства. Меры интенсивности ν_1, ν_2 предполагаются имеющими вид $dt\times\mu_1(du)$ и $dt\times\mu_2(du)$. Винеровский процесс W, точечные меры ν_1, ν_2 и процесс X предполагаются независимыми в совокупности. Обозначим

$$\mathbb{F}=\{\mathcal{F}_t,t\in\mathbb{R}^+\},\qquad \mathcal{F}_t=\sigma(X(s),W(s),\nu_{1,2}([0,s]\times\cdot),s\le t).$$

Рассмотрим СДУ в $\mathbb{R}^m$ вида

$$\begin{aligned}Y(t)=Y(0)&+\int_0^t a(X(s),Y(s))\,ds+\int_0^t b(X(s),Y(s))\,dW_s\\&+\int_0^t\int_{\mathbb{U}_1}c_1(X(s),Y(s-),u)\nu_1(ds,du)\\&+\int_0^t\int_{\mathbb{U}_2}c_2(X(s),Y(s-),u)\,\tilde\nu_2(ds,du),\qquad t\ge 0,\end{aligned} \tag{12}$$

где $\tilde\nu_2(dt,du)=\nu_2(dt,du)-dt\,\mu_2(du)$ — компенсированная точечная мера, соответствующая точечной мере $\nu_2(dt,du)$.

Утверждение 2.1. *Предположим, что коэффициенты уравнения (12) удовлетворяют следующим вариантам условия линейного роста и локального условия Липшица:*

- *существует функция* $K\colon \mathbb{X} \to \mathbb{R}^+$, *ограниченная на каждом компакте в* $\mathbb{X}$, *такая, что*

$$|a(x,y)| + |b(x,y)| + \int_{\mathbb{U}_1} |c_1(x,y,u)|\mu_1(du) + \left(\int_{\mathbb{U}_2} |c_2(x,y,u)|^2 \mu_2(du)\right)^{1/2} \le K(x)(1+|y|)$$

  для всех $x \in \mathbb{X}$, $y \in \mathbb{R}^m$;
- *для произвольного* $R > 0$ *существует функция* $K_R\colon \mathbb{X} \to \mathbb{R}^+$, *ограниченная на каждом компакте в* $\mathbb{X}$, *такая, что*

$$|a(x,y_1) - a(x,y_2)| + |b(x,y_1) - b(x,y_2)| + \int_{\mathbb{U}_1} |c_1(x,y_1,u) - c_1(x,y_2,u)|\,\mu_1(du) + \left(\int_{\mathbb{U}_2} |c_2(x,y_1,u) - c_2(x,y_2,u)|^2 \mu_2(du)\right)^{1/2} \le K_R(x)|y_1 - y_2|,$$

  для всех $x \in \mathbb{X}$, $y_1, y_2 \in \{y\colon |y| \le R\}$.

Тогда, при заданных процессе X *и* $\mathcal{F}_0$*-измеримой величине* $Y(0)$, *существует единственное сильное решение* Y *уравнения* (12) *относительно фильтрации* $\mathbb{F}$. *Определенный таким образом двухкомпонентный процесс* (X,Y) *является однородным феллеровским процессом Маркова в* $\mathbb{X} \times \mathbb{R}^m$.

Доказательство вполне аналогично стандартным доказательствам теорем, описывающих свойства СДУ (см. например [30], глава II.2), поэтому мы его здесь не приводим.

3. Основные результаты

В данном разделе формулируются основные теоремы работы. Доказательства этих теорем приводятся в разделе 4. Далее везде π обозначает единственную инвариантную меру для процесса X. Функцию f называем центрированной, если

$$\int_{\mathbb{X}} f\,d\pi = 0.$$

Первая теорема устанавливает достаточные условия существования расширенного потенциала и его основные свойства.

Теорема 3.1. *1. Пусть для процесса* X *выполнены условия* $\mathbf{E}(d,r,\psi)$ *и* $\mathbf{M}_q(\phi,\psi)$, *причем функция* r *такова, что*

$$\int_0^\infty r^{1/p}(t)\,dt < +\infty, \tag{13}$$

где $1/p + 1/q = 1$ *и* $p \in [1,\infty)$.

Тогда для любой центрированной функции $f \in H_{\phi,d,p}$ *обобщенный потенциал* $\mathcal{R}f$ *корректно определен равенством* (8), *центрирован и удовлетворяет оценке*

$$|\mathcal{R}f(x)| \le 2\|f\|_{\phi,d,p} \left(\int_0^\infty r^{1/p}(t)\,dt\right) \left(\int_{\mathbb{X}} \psi\,d\pi\right)^{1/q} \psi(x), \qquad x \in \mathbb{X}. \tag{14}$$

Если, кроме того, выполнено условие $\mathbf{P}(\psi)$, *то функция* $\mathcal{R}f$ *является решением уравнения* (5). *Более того, при этом процесс*

$$\mathcal{R}f(X(t)) + \int_0^t f(X(s))\,ds, \quad t \in \mathbb{R}^+ \tag{15}$$

является (обычным) $\mathbb{F}^X$ *— мартингалом относительно каждой из мер* P_x, $x \in \mathbb{X}$.

2. Пусть дополнительно выполнено условие $\hat{\mathbf{E}}(d, r, \psi)$*, тогда для любой центрированной функции* $f \in H_{\phi,d,p}$ *обобщенный потенциал* $\mathcal{R}f$ *лежит в* $H_{\psi,d,p}$*, и имеет место оценка*

$$\|\mathcal{R}f\|_{\psi,d,p} \le 2^{1/p}\|f\|_{\phi,d,p}\left(\int_0^\infty r^{1/p}(t)\,dt\right). \tag{16}$$

3. Пусть, в дополнение к условиям п. 1, выполнены условия $\mathbf{E}(d, r, \chi)$ *и* $\mathbf{M}_q(\psi, \chi)$ *с некоторой функцией* χ*. Пусть функция* $f \in H_{\phi,d,p}$ *центрирована, а* u *— некоторое центрированное решение уравнения* (5)*, лежащее в классе* $H_{\psi,d,p}$*. Тогда*

$$u = \mathcal{R}f.$$

Таким образом, в предположениях пп. 1, 3 теоремы 3.1, расширенный потенциал $\mathcal{R}f$ является единственным центрированным решением уравнения (5), лежащим в $H_{\psi,d,p}$.

Вторая из основных теорем описывает предсказуемую составляющую в разложении Дуба–Мейера процесса вида (6) с функцией $g = g(x, y)$, определенной как расширенный потенциал $\mathcal{R}f$ некоторой функции двух переменных $f = f(x, y)$, и процессом Y, заданным СДУ (12). При определении такого потенциала переменная y "замораживается", то есть мы полагаем

$$g(x, y) = \int_0^\infty \mathsf{E}_x f(X(t), y)\,dt, \qquad x \in \mathbb{X},\ y \in \mathbb{R}^m. \tag{17}$$

Для функций двух переменных $x \in \mathbb{X}$, $y \in \mathbb{R}^m$ мы будем писать

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_Y f(x, y) = {} & \sum_i a_i(x, y)\partial_{y_i} f(x, y) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^m \sum_{k=1}^d b_{ik}(x, y)b_{jk}(x, y)\partial^2_{y_i y_j} f(x, y) \\ & + \int_{\mathbb{U}_1} \left(f(x, y + c_1(x, y, u)) - f(x, y)\right)\,\mu_1(du) \\ & + \int_{\mathbb{U}_2}\Bigg(f(x, y + c_2(x, y, u)) - f(x, y) \\ & \qquad\qquad - \sum_{i=1}^m (c_2)_i(x, y, u)\partial_{y_i} f(x, y)\Bigg)\mu_2(du),\end{aligned} \tag{18}$$

предполагая правую часть корректно определенной. Обозначим $\mathcal{S}(T)$ семейство всех моментов остановки относительно фильтрации $\mathbb{F}$, ограниченных T, и $\mathcal{S} = \bigcup_T \mathcal{S}(T)$.

Теорема 3.2. *Пусть процесс* X *удовлетворяет условиям* $\mathbf{E}(d, r, \psi)$*,* $\mathbf{M}_q(\phi, \psi)$ *и* $\mathbf{P}(\psi)$*, причем функция* r *удовлетворяет* (13) *с* $1/p + 1/q = 1$*,* $p \in [1, \infty)$*. Пусть также коэффициенты уравнения (12) удовлетворяют предположениям предложения 2.1.*

Предположим, что функция $f\colon \mathbb{X} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *дважды непрерывно дифференцируема по* y*, и для каждого* $y \in \mathbb{R}^m$ *функция* $f(\cdot, y)$ *центрирована. Предположим также, что*

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^m}\left(\|f(\cdot, y)\|_{\phi,d,p} + \sum_{i=1}^m \|\partial_{y_i} f(\cdot, y)\|_{\phi,d,p} + \sum_{i,j=1}^m \left\|\partial^2_{y_i y_j} f(\cdot, y)\right\|_{\phi,d,p}\right) < \infty, \tag{19}$$

$$\begin{aligned}\sup_{y\in\mathbb{R}^m}\left(\left|\int_{\mathbb{X}} f(x, y)\pi(dx)\right| + \sum_{i=1}^m \left|\int_{\mathbb{X}} \partial_{y_i} f(x, y)\pi(dx)\right| + \sum_{i,j=1}^m \left|\int_{\mathbb{X}} \partial^2_{y_i y_j} f(x, y)\pi(dx)\right|\right) \\ < \infty.\end{aligned} \tag{20}$$

Тогда равенство (17) *корректно задает функцию* g*, причем функция* g *дважды непрерывно дифференцируема по* y *и корректно определена функция* $\mathcal{A}_Y g$*. Если при этом стартовое значение* $X(0)$ *процесса* X *таково, что*

$$\mathsf{E}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\psi(X(t))\,dt<\infty,\qquad \lambda>0, \tag{21}$$

$$\mathsf{E}\,\psi(X(\tau))<\infty,\qquad \tau\in\mathcal{S}, \tag{22}$$

то для произвольного $\mathcal{F}_0$ *— измеримого стартового значения* $Y(0)$ *процесса* Y *процесс*

$$g(X(t),Y(t))+\int_0^t\left[f(X(s),Y(s))-\mathcal{A}_Y g(X(s),Y(s))\right]\,ds,\qquad t\in\mathbb{R}^+ \tag{23}$$

является локальным $\mathbb{F}$*-мартингалом.*

Если, более того, для всякого $T\in\mathbb{R}^+$ *семейство случайных величин* $\psi(X(\tau))$*,* $\tau\in\mathcal{S}(T)$ *равномерно интегрируемо, и существует процесс* Z *такой, что*

$$|f(X(s),Y(s))-\mathcal{A}_Y g(X(s),Y(s))|\le Z(s),\qquad s\in\mathbb{R}^+ \tag{24}$$

с вероятностью 1 и

$$\mathsf{E}\int_0^t Z(s)\,ds<+\infty,\quad t\in\mathbb{R}^+, \tag{25}$$

то процесс (23) *является (обычным)* $\mathbb{F}$*-мартингалом.*

Замечание 3.1. Пусть, в условиях теоремы 3.2, для произвольного $x\in\mathbb{X}$ стартовое значение $X(0)=x$ удовлетворяет (22). Тогда имеет место следующий результат, представляющий самостоятельный интерес: на функциях вида (17) расширенный генератор двухкомпонентного марковского процесса (X,Y) имеет вид

$$\mathcal{A}_{(X,Y)}=\mathcal{A}_X+\mathcal{A}_Y, \tag{26}$$

где $\mathcal{A}_X$ обозначает результат применения расширенного генератора процесса X к функции двух переменных по переменной x при фиксированной переменной y.

Приведем еще один вариант предыдущего утверждения, в котором ослаблены условия на процесс X, но взамен усилены условия на коэффициенты (12).

Теорема 3.3. *Пусть выполнены все предположения теоремы 3.2, кроме* (22)*. Вместо этого пусть*

$$\mathsf{E}\,\psi(X(t))<\infty,\qquad t\in\mathbb{R}^+, \tag{27}$$

и существует функция $\varrho\colon\mathbb{X}\to\mathbb{R}^+$ *такая, что*

$$\mathsf{E}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\psi(X(t))\varrho(X(t))\,dt<\infty,\qquad \lambda>0,$$

и для произвольных $x\in\mathbb{X}$*,* $y\in\mathbb{R}^m$

$$|a(x,y)|+|b(x,y)|^2+\int_{\mathbb{U}_1}|c_1(x,y,u)|\mu_1(du)+\int_{\mathbb{U}_2}|c_2(x,y,u)|^2\,\mu_2(du)\le\varrho(x).$$

Тогда процесс (23) *является* $\mathbb{F}$*-мартингалом.*

4. Доказательства

4.1. **Вспомогательные утверждения.**

Утверждение 4.1. *Пусть для процесса X и некоторого $p \in [1,\infty)$ выполнены условия $\mathbf{E}(d,r,\psi)$ и $\mathbf{M}_q(\phi,\psi)$ с $1/p+1/q=1$.*

Тогда $H_{\phi,d,p} \subset L_1(\pi)$, и для произвольных $f \in H_{\phi,d,p}$, $t \in \mathbb{R}^+$

$$\left|\mathsf{E}_x f(X(t)) - \int_{\mathbb{X}} f\,d\pi\right| \le 2\|f\|_{\phi,d,p}\left(\int_{\mathbb{X}} \psi\,d\pi\right)^{1/q} r^{1/p}(t)\psi(x), \qquad x \in \mathbb{X}. \tag{28}$$

Если дополнительно выполнено условие $\hat{\mathbf{E}}(d,r,\psi)$, то для $f \in H_{\phi,d,p}$, $t \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{gathered}|\mathsf{E}_x f(X(t)) - \mathsf{E}_{x'} f(X(t))| \le 2^{1/p}\|f\|_{\phi,d,p}(\psi(x)+\psi(x'))r^{1/p}(t)d^{1/p}(x,x'),\\ x,x' \in \mathbb{X}.\end{gathered} \tag{29}$$

Доказательство. Пусть $x_* \in \mathbb{X}$ — фиксированная точка, тогда для $f \in H_{\phi,d,p}$ имеем

$$|f(x)-f(x_*)| \le \|f\|_{\phi,d,p} d^{1/p}(x,x_*)(\phi(x)+\phi(x_*)), \qquad x \in \mathbb{X}. \tag{30}$$

В силу условия $\mathbf{M}_q(\phi,\psi)$, функция ϕ лежит в $L_q(\pi)$:

$$\int_{\mathbb{X}} \phi^q(x)\,\pi(dx) = \int_{\mathbb{X}}\int_{\mathbb{X}} \phi^q(y)\,P_t(x,dy)\,\pi(dx) \le \int_{\mathbb{X}} \psi(x)\,\pi(dx). \tag{31}$$

С другой стороны, в силу неравенства (9), примененного к $x = x_*$, $t = 0$, функция $d^{1/p}(\cdot, x_*)$ лежит в $L_p(\pi)$. Отсюда следует, что $f \in L_1(\pi)$.

Для доказательства оценки (28), рассмотрим произвольную пару

$$(\xi,\eta) \in \mathrm{C}(P_t(x,\cdot),\pi),$$

и запишем

$$\left|\mathsf{E}_x f(X(t)) - \int_{\mathbb{X}} f\,d\pi\right| = |\mathsf{E}_x f(X(t)) - \mathsf{E}_\pi f(X(t))| = |\,\mathsf{E}\,f(\xi) - \mathsf{E}\,f(\eta)| \le \mathsf{E}\,|f(\xi)-f(\eta)|.$$

Заменим в (30) x, x_* случайными величинами ξ, η, соответственно, возьмем математическое ожидание, и применим неравенство Гельдера:

$$\mathsf{E}\,|f(\xi)-f(\eta)| \le \|f\|_{\phi,d,p}\,(\mathsf{E}\,d(\xi,\eta))^{1/p}\,(\mathsf{E}(\phi(\xi)+\phi(\eta))^q)^{1/q}\,.$$

Имеем

$$\mathsf{E}\,\phi^q(\eta) \le \int_{\mathbb{X}} \psi\,d\pi$$

(см. (31)). Поэтому, в силу выпуклости функции $z \mapsto z^q$ и предположения $\mathbf{M}_q(\phi,\psi)$,

$$\mathsf{E}(\phi(\xi)+\phi(\eta))^q \le 2^{q-1}\,(\mathsf{E}\,\phi^q(\xi) + \mathsf{E}\,\phi^q(\eta)) \le 2^{q-1}\left(\psi(x) + \int_{\mathbb{X}} \psi\,d\pi\right).$$

Учитывая, что $\psi \ge 1$, окончательно получаем

$$\mathsf{E}(\phi(\xi)+\phi(\eta))^q \le 2^q\left(\int_{\mathbb{X}} \psi\,d\pi\right)\psi(x).$$

Таким образом,

$$\left|\mathsf{E}_x f(X(t)) - \int_{\mathbb{X}} f\,d\pi\right| \le 2\|f\|_{\phi,d,p}\left(\int_{\mathbb{X}} \psi\,d\pi\right)^{1/q} (Ed(\xi,\eta))^{1/p}\,\psi^{1/q}(x).$$

Так как пара $(\xi,\eta) \in \mathrm{C}(P_t(x,\cdot),\pi)$ в этом неравенстве произвольна, имеем

$$\left|\mathsf{E}_x f(X(t)) - \int_{\mathbb{X}} f\,d\pi\right| \le 2\|f\|_{\phi,d,p}\left(\int_{\mathbb{X}} \psi\,d\pi\right)^{1/q} (d\,(P_t(x,\cdot),\pi))^{1/p}\,\psi^{1/q}(x),$$

откуда с учетом условия $\mathbf{E}(d,r,\psi)$ получаем требуемое утверждение.

Доказательство оценки (29) аналогично: для произвольной пары

$$(\xi,\eta)\in \mathrm{C}(P_t(x,\cdot),P_t(x',\cdot))$$

имеем, с учетом (10),

$$\mathsf{E}(\phi(\xi)+\phi(\eta))^q\le 2^{q-1}\left(\psi(x)+\psi(x')\right)=2^{q/p}\left(\psi(x)+\psi(x')\right).$$

Тогда рассуждения, аналогичные приведенным выше, приводят к неравенству

$$|\mathsf{E}_x f(X(t))-\mathsf{E}_{x'}f(X(t))|\le 2^{1/p}\|f\|_{\phi,d,p}(\psi(x)+\psi(y))^{1/q}\left(d\left(P_t(x,\cdot),P_t(x',\cdot)\right)\right)^{1/p},$$

откуда с учетом условия $\hat{\mathbf{E}}(d,r,\psi)$ получаем требуемое утверждение. □

Отметим простое следствие, важное для наших дальнейших рассуждений: положив в (28) $t=0$, получим оценку

$$|f(x)|\le\left|\int_{\mathbb{X}} f\,d\pi\right|+L\|f\|_{\phi,d,p}\psi(x),\qquad x\in\mathbb{X} \tag{32}$$

с константой

$$L=2r^{1/p}(0)\left(\int_{\mathbb{X}}\psi\,d\pi\right)^{1/q}.$$

Отсюда следует, что если функция $f=f(x,y)$ удовлетворяют условиям, наложенным в теореме 3.2, то сама эта функция и ее частные производные по y первого и второго порядков ограничены по модулю $C\psi(x)$; здесь и далее C обозначает константу, явный вид который для нас не важен.

Следующий результат прямо следует из приведенных выше оценок, теоремы Фубини и теоремы Лебега о мажорированной сходимости; в целях сокращения изложения, мы опускаем подробное доказательство. Для $\lambda\ge 0$ обозначим

$$g_\lambda(x,y)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathsf{E}_x f(X(t),y)\,dt. \tag{33}$$

Ясно, что функция g, заданная (17), совпадает с g_0.

Утверждение 4.2. *Пусть процесс X удовлетворяет условиям $\mathbf{E}(d,r,\psi)$, $\mathbf{M}_p(\phi,\psi)$ и $\mathbf{P}(\psi)$ с некоторыми предметрикой d, функциями ϕ, ψ, r и числом $p\in(1,\infty)$, причем функция r удовлетворяет* (13). *Пусть также функция f удовлетворяют условиям, наложенным в теореме 3.2.*

Тогда соотношение (33) *корректно задает функцию $g_\lambda(x,y)$, причем эта функция дважды непрерывно дифференцируема по y, и ее производные равны*

$$\begin{aligned}\partial_{y_i}g_\lambda(x,y)&=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathsf{E}_x\partial_{y_i}f(X(t),y)\,dt,\\ \partial^2_{y_iy_j}g_\lambda(x,y)&=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathsf{E}_x\partial^2_{y_iy_j}f(X(t),y)\,dt.\end{aligned} \tag{34}$$

При фиксированных x,y функция $g_\lambda(x,y)$ и ее производные (34) *непрерывны по λ.*

Отметим, что в силу (28) и (33)

$$|g_\lambda(x,y)|\le C\psi(x),\qquad |\partial_{y_i}g_\lambda(x,y)|\le C\psi(x),\qquad \left|\partial^2_{y_iy_j}g_\lambda(x,y)\right|\le C\psi(x). \tag{35}$$

Тогда, с учетом формулы конечных разностей и условия линейного роста, наложенного на коэффициенты уравнения (12), несложно получить, что соотношение (18) корректно определяет $\mathcal{A}_Y g_\lambda$, $\lambda\ge 0$,

$$\mathcal{A}_Y g_\lambda(x,y)\to\mathcal{A}_Y g_0(x,y),\qquad \lambda\to 0+,\qquad x\in\mathbb{X},\qquad y\in\mathbb{R}^m$$

и для произвольных компакта $K \subset \mathbb{X}$ и $R > 0$ существует константа $C_{K,R}$ такая, что

$$|\mathcal{A}_Y g_\lambda(x,y)| \le C_{K,R}\psi(x), \qquad x \in K, \qquad |y| \le R, \qquad \lambda \ge 0. \tag{36}$$

4.2. **Доказательство основных результатов.**

Доказательство теоремы 3.2. Как и ранее, мы, не ограничивая общности, считаем, что $m = 1$. Пусть τ — марковский момент относительно фильтрации $\mathbb{F}$. Процесс X обладает марковским свойством относительно $\mathbb{F}$, более того — он феллеровский и имеет cádlág траектории. Поэтому он строго марковский, так что

$$\begin{aligned} & e^{-\lambda(t\wedge\tau)} g_\lambda(X(t\wedge\tau), Y(t\wedge\tau)) \\ &\quad = e^{-\lambda(t\wedge\tau)} \int_0^\infty e^{-\lambda s} \mathsf{E}_x f(X(s),y)\big|_{(x,y)=(X(t\wedge\tau),Y(t\wedge\tau))}\, ds \\ &\quad = e^{-\lambda(t\wedge\tau)} \int_0^\infty e^{-\lambda s}\, \mathsf{E}\left[f(X(s+t\wedge\tau), Y(t\wedge\tau)) \;\middle|\; \mathcal{F}_{t\wedge\tau}\right] ds \\ &\quad = \int_{t\wedge\tau}^\infty e^{-\lambda v}\, \mathsf{E}\left[f(X(v), Y(t\wedge\tau)) \;\middle|\; \mathcal{F}_{t\wedge\tau}\right] dr \end{aligned} \tag{37}$$

почти наверное. Введем вспомогательную фильтрацию:

$$\mathbb{H} = \{\mathcal{H}_t\}, \qquad \mathcal{H}_t = \sigma\left(X(v), W(s), \nu_{1,2}([0,s]\times\cdot), s \le t, v \in \mathbb{R}^+\right), \qquad t \in \mathbb{R}^+.$$

Ясно, что $\mathbb{H}$ является расширением $\mathbb{F}$, но при этом W и ν_1, ν_2 остаются, соответственно, (независимыми) винеровским процессом и пуассоновскими точечными мерами относительно фильтрации $\mathbb{H}$. В частности, процесс Y является $\mathbb{H}$-семимартингалом. Для п.в. $v > 0$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} f(X(v),Y(v)) = f(X(v),Y(t)) &+ \int_t^v \partial_y f(X(v),Y(s)) a(X(s),Y(s))\, ds \\ &+ \int_t^v \partial_y f(X(v),Y(s)) b(X(s),Y(s))\, dW(s) \\ &+ \frac{1}{2}\int_t^v \partial^2_{yy} f(X(v),Y(s)) b^2(X(s),Y(s))\, ds \\ &+ \int_t^v \int_{\mathbb{U}_1} \big[f(X(v),Y(s-) + c_1(X(s),Y(s-),u)) \\ &\qquad - f(X(v),Y(s-))\big]\nu_1(ds,du) \\ &+ \int_t^v \int_{\mathbb{U}_2} \big[f(X(v),Y(s-) + c_2(X(s),Y(s-),u)) \\ &\qquad - f(X(v),Y(s-))\big]\tilde\nu_2(ds,du) \\ &+ \int_t^v \int_{\mathbb{U}_2} \big[f(X(v),Y(s) + c_2(X(s),Y(s),u)) \\ &\qquad - f(X(v),Y(s)) \\ &\qquad - \partial_y f(X(v),Y(s)) c_2(X(s),Y(s),u))\big]\mu_2(du)ds, \\ &\qquad t \in [0,v]. \end{aligned} \tag{38}$$

Фактически, (38) представляет собой результат применения варианта формулы Ито, приведенного в теореме 5.1 главы II [28], к $\mathbb{H}$-семимартингалу Y и функции

$$F = f(X(v),\cdot),$$

рассматриваемой как функцией класса C^2 относительно переменной y. В цитированной выше теореме функция F неслучайна, так что мы не можем прямо получить (38)

как следствие из этой теоремы. Однако в нашей ситуации $F = f(X(v), \cdot)$ является $\mathcal{H}_0$-измеримой как функция вероятностной переменной, причем сама эта функция и ее производные первого и второго порядков ограничены по модулю случайной величиной вида $C\psi(X(v))$, интегрируемой для п.в. $v > 0$ в силу условия (21). Это позволяет получить (38) с помощью рассуждений, полностью аналогичных приведенным в доказательстве теоремы 5.1 главы II [28] (мы опускаем подробное изложение).

Для компакта $K \subset \mathbb{X}$ и $R > 0$ обозначим

$$\tau_{K,R} = \inf\{t\colon X(t) \notin K \text{ или } |Y(t)| > R\}.$$

Поскольку (X, Y) имеет cádlág траектории, существует последовательность компактов $\{K_n\}$ такая, что

$$\tau_n := \tau_{K_n,n} \to \infty, \qquad n \to \infty \tag{39}$$

с вероятностью 1. С другой стороны, в силу условия линейного роста, наложенного на коэффициенты уравнения (12), существуют константы C_n такие, что

$$\begin{aligned} &|a(X(s), Y(s))| + |b(X(s), Y(s))|^2 + \int_{\mathbb{U}_1} |c_1(X(s), Y(s), u)|\mu_1(du) \\ &\qquad + \int_{\mathbb{U}_2} |c_2(X(s), Y(s), u)|^2 \mu_2(du) \\ &\quad \le C_n, \qquad s < \tau_n. \end{aligned} \tag{40}$$

Применим (38), учитывая оценки

$$|F(y+c) - F(y)| \le |c| \sup_z |F'(z)|, \qquad |F(y+c) - F(y) - F'(y)c| \le \frac{c^2}{2} \sup_z |F''(z)|, \tag{41}$$

и то, что функция $F = f(X(v), \cdot)$ и ее производные первого и второго порядков ограничены случайной величиной вида $C\psi(X(v))$. Получим, что для п.в. $v > 0$ имеет место представление

$$\begin{aligned} &f(X(v), Y(v)) - f(X(v), Y(t)) \\ &\quad = M_v(v) - M_v(t) + \int_t^v \partial_y f(X(v), Y(s)) a(X(s), Y(s))\, ds \\ &\qquad + \frac{1}{2} \int_t^v \partial^2_{yy} f(X(v), Y(s)) b^2(X(s), Y(s))\, ds \\ &\qquad + \int_t^v \int_{\mathbb{U}_1} \left[f(X(v), Y(s) + c_1(X(s), Y(s), u)) - f(X(v), Y(s)) \right] \mu_1(du) ds \\ &\qquad + \int_t^v \int_{\mathbb{U}_2} \big[f(X(v), Y(s) + c_2(X(s), Y(s), u)) - f(X(v), Y(s)) \\ &\qquad\qquad - \partial_y f(X(v), Y(s)) c_2(X(s), Y(s), u)) \big] \mu_2(du) ds \\ &\quad = M_v(v) - M_v(t) + \sum_{i=1}^4 \left(I_{i,v}(v) - I_{i,v}(t) \right), \qquad t \in [0, v], \end{aligned} \tag{42}$$

где $M_v(\cdot)$ — локальный мартингал относительно $\mathbb{H}$, с локализующей последовательностью $\{\tau_n\}$, определенной в (39). Поскольку $\mathcal{H}_t \supset \mathcal{F}_t$, имеем

$$\mathsf{E}\left[M_v(v \wedge \tau_n) - M_v(t \wedge \tau_n) \mid \mathcal{F}_{t \wedge \tau_n} \right] = \mathsf{E}\left[\mathsf{E}\left[M_v(v \wedge \tau_n) - M_v(t \wedge \tau_n) \middle| \mathcal{H}_t \right] \mid \mathcal{F}_{t \wedge \tau_n} \right] = 0,$$

$t \in [0, v]$, так что из (42) следует, что равенство

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\left[f(X(v), Y(t \wedge \tau_n)) \mid \mathcal{F}_{t \wedge \tau_n} \right] &= \mathsf{E}\left[f(X(v), Y(v \wedge \tau_n)) \mid \mathcal{F}_{t \wedge \tau_n} \right] \\ &\quad - \sum_{i=1}^4 \mathsf{E}\left[I_{i,v}(v \wedge \tau_n) - I_{i,v}(t \wedge \tau_n) \mid \mathcal{F}_{t \wedge \tau_n} \right] \end{aligned} \tag{43}$$

выполнено с вероятностью 1 для п.в. $v > 0$ и всех $t \in [0, v]$. С другой стороны, для $t > v$ равенство (43) тривиальным образом выполнено на множестве $\{v > \tau_n\}$, поскольку при этом $t \wedge \tau_n = v \wedge \tau_n = \tau_n$. Таким образом, для произвольного $t \geq 0$ равенство (43) выполнено с вероятностью 1 для п.в. $v > t \wedge \tau_n$.

Подставим (43) в (37) с $\tau = \tau_n$, и разберем отдельно те слагаемые, которые при этом возникают. Поскольку

$$|f(X(v), y)| \leq C\psi(X(v)),$$

условие (21) позволяет применить теорему Фубини и записать

$$\begin{aligned} &\int_{t\wedge\tau_n}^{\infty} e^{-\lambda v}\, \mathsf{E}\left[f(X(v), Y(v)) \,\middle|\, \mathcal{F}_{t\wedge\tau_n}\right] dv \\ &\qquad = \mathsf{E}\left[\int_{t\wedge\tau_n}^{\infty} e^{-\lambda v} f(X(v), Y(v))\, dv \,\middle|\, \mathcal{F}_{t\wedge\tau_n}\right]. \end{aligned} \tag{44}$$

Неравенство (40) и аналогичная оценка на производную функции $f(X(v), \cdot)$ позволяют применить теорему Фубини к слагаемому с $i = 1$ в (43) и получить

$$\begin{aligned} &\int_{t\wedge\tau_n}^{\infty} e^{-\lambda v}\, \mathsf{E}\left[I_{1,v}(v \wedge \tau_n) - I_{1,v}(t \wedge \tau_n) \,\middle|\, \mathcal{F}_{t\wedge\tau_n}\right] dv \\ &\quad = \int_{t\wedge\tau_n}^{\infty} e^{-\lambda v} \int_{t\wedge\tau_n}^{v\wedge\tau_n} \mathsf{E}\left[\partial_y f(X(v), Y(s)) a(X(s), Y(s)) \,\middle|\, \mathcal{F}_{t\wedge\tau_n}\right] ds\, dv \\ &\quad = \mathsf{E}\left[\int_{t\wedge\tau_n}^{\tau_n} \int_{s}^{\infty} e^{-\lambda v}\, \mathsf{E}\left[\partial_y f(X(v), Y(s)) a(X(s), Y(s)) \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right] dv\, ds \,\middle|\, \mathcal{F}_{t\wedge\tau_n}\right]. \end{aligned}$$

Применяя марковское свойство процесса X, получим, аналогично (37),

$$\begin{aligned} &\int_{s}^{\infty} e^{-\lambda v}\, \mathsf{E}\left[\partial_y f(X(v), Y(s)) a(X(s), Y(s)) \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right] dv \\ &\quad = e^{-\lambda s} a(X(s), Y(s)) \int_0^{\infty} e^{-\lambda w}\, \mathsf{E}\left[\partial_y f(X(s+w), Y(s)) \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right] dw \\ &\quad = e^{-\lambda s} a(X(s), Y(s)) \int_0^{\infty} e^{-\lambda w} \left[E_x \partial_y f(X(w), y)\right]_{(x,y)=(X(s),Y(s))} dv \\ &\quad = e^{-\lambda s} a(X(s), Y(s)) \partial_y g_\lambda(X(s), Y(s)) \end{aligned}$$

(при последнем переходе мы использовали первое равенство в (34)). Таким образом,

$$\begin{aligned} &\int_{t\wedge\tau_n}^{\infty} e^{-\lambda v}\, \mathsf{E}\left[I_{1,v}(v \wedge \tau_n) - I_{1,v}(t \wedge \tau_n) \,\middle|\, \mathcal{F}_{t\wedge\tau_n}\right] dv \\ &\qquad = \mathsf{E}\left[\int_{t\wedge\tau_n}^{\infty} e^{-\lambda s} a(X(s), Y(s)) \partial_y g_\lambda(X(s), Y(s))\, ds \,\middle|\, \mathcal{F}_{t\wedge\tau_n}\right]. \end{aligned} \tag{45}$$

Аналогичные выкладки справедливы и для слагаемых в (43) с $i = 2, 3, 4$; незначительное техническое отличие состоит в том, что для обоснования применения теоремы Фубини при $i = 2, 4$ нужно использовать оценку на вторую производную функции $f(X(r), \cdot)$, и для $i = 3, 4$ нужно еще использовать (41). Не проводя подробных выкладок, запишем только окончательное равенство:

$$\begin{aligned} &e^{-\lambda(t\wedge\tau_n)} g_\lambda(X(t \wedge \tau_n), Y(t \wedge \tau_n)) \\ &\qquad = \mathsf{E}\left[\int_{t\wedge\tau_n}^{\infty} e^{-\lambda s} \left(f(X(s), Y(s)) - \mathcal{A}_Y g_\lambda(X(s), Y(s))\right) ds \,\middle|\, \mathcal{F}_{t\wedge\tau_n}\right]. \end{aligned}$$

Таким образом, для произвольных $t_2 \ge t_1$

$$\mathsf{E}\left[e^{-\lambda(t_2\wedge\tau_n)}g_\lambda(X(t_2\wedge\tau_n),Y(t_2\wedge\tau_n)) \mid \mathcal{F}_{t_1\wedge\tau_n}\right] - e^{-\lambda(t_1\wedge\tau_n)}g_\lambda(X(t_1\wedge\tau_n),Y(t_1\wedge\tau_n))$$
$$= \mathsf{E}\left[\int_{t_1\wedge\tau_n}^{t_2\wedge\tau_n} e^{-\lambda s}\left(f(X(s),Y(s)) - \mathcal{A}_Y g_\lambda(X(s),Y(s))\right)\,ds \mid \mathcal{F}_{t_1\wedge\tau_n}\right].$$

Перейдем к пределу $\lambda \to 0+$. Это можно сделать по теореме о мажорированной сходимости с использованием условий (21) и (22), так как в силу (32), (35) и (36)

$$|g_\lambda(X(t_2\wedge\tau_n),Y(t_2\wedge\tau_n))| \le C\psi(X(t_2\wedge\tau_n)),$$
$$|f(X(s),Y(s)) - \mathcal{A}_Y g_\lambda(X(s),Y(s))|\mathbb{1}_{s\le t_2\wedge\tau_n} \le C\psi(X(s)).$$

Имеем для произвольного из моментов остановки τ_n, $n \ge 1$

$$\mathsf{E}\left[g(X(t_2\wedge\tau_n),Y(t_2\wedge\tau_n)) \mid \mathcal{F}_{t_1\wedge\tau_n}\right] - g(X(t_1\wedge\tau_n),Y(t_1\wedge\tau_n))$$
$$= \mathsf{E}\left[\int_{t_1\wedge\tau_n}^{t_2\wedge\tau_n} \left(f(X(s),Y(s)) - \mathcal{A}_Y g(X(s),Y(s))\right)\,ds \mid \mathcal{F}_{t_1\wedge\tau_n}\right], \qquad t_2 \ge t_1, \tag{46}$$

откуда следует, что (7) — локальный $\mathbb{F}$-мартингал. Если, дополнительно, семейство $\{\psi(X(\tau)), \tau \in \mathcal{S}(t_2)$ равномерно интегрируемо и выполнены предположения (24), (25), то в (46) можно перейти к пределу при $n \to \infty$, и получить, что (7) — $\mathbb{F}$-мартингал. □

Доказательство теоремы 3.3. Доказательство подобно приведенному выше, поэтому мы его подробно не обсуждаем. В этом доказательстве, во всех выкладках марковские моменты τ_n можно сразу положить равными $+\infty$, а возможность применения теорем Фубини и Лебега (о мажорированной сходимости) обеспечивается, вместо неравенств (40) и (36), аналогичными оценками

$$|a(X(s),Y(s))| + |b(X(s),Y(s))|^2 + \int_{\mathbb{U}_1} |c_1(X(s),Y(s),u)|\mu_1(du)$$
$$+ \int_{\mathbb{U}_2} |c_2(X(s),Y(s),u)|^2\mu_2(du)$$
$$\le C\varrho(X(s)), \qquad s \ge 0,$$
$$|\mathcal{A}_Y g_\lambda(x,y)| \le C\psi(x)\varrho(x), \qquad x \in \mathbb{X}, \qquad y \in \mathbb{R}^m, \qquad \lambda \ge 0. \quad \square$$

Доказательство теоремы 3.1. Существование обобщенного потенциала и его свойства (14), (16) прямо следуют из оценок (28), (29). Далее, положим $a \equiv 1$, $b \equiv 0$, $c_{1,2} \equiv 0$, и рассмотрим функцию $f(x,y) = f(x)$, не зависящую от "дополнительной" переменной y. Тогда выполнены условия теоремы 3.3 с $\varrho \equiv 1$, и следовательно обобщенный потенциал $\mathcal{R}f$ является решением уравнения (5), а процесс (15) есть $\mathbb{F}^X$ — мартингал относительно каждой из мер P_x, $x \in \mathbb{X}$. Этим доказаны утверждения 1 и 2. Для доказательства утверждения 3, рассмотрим некоторое некоторое решение u уравнения (5). Тогда, по определению расширенного генератора, для произвольного $x \in \mathbb{X}$ процесс

$$u(X(t)) + \int_0^t f(X(s))\,ds, \qquad t \ge 0$$

является мартингалом относительно P_x, и в частности

$$\mathsf{E}_x u(X(t)) + \mathsf{E}_x \int_0^t f(X(s))\,ds = u(x), \qquad t \ge 0.$$

Имеем $|f(x)| \le C\psi(x)$, так что условие $\mathbf{P}(\psi)$ позволяет применить теорему Фубини и написать

$$u(x) = \int_0^t \mathsf{E}_x f(X(s))\,ds + \mathsf{E}_x u(X(t)).$$

Тогда, по уже доказанному утверждению 1,

$$u(x) = \lim_{t\to+\infty}\left[\int_0^t \mathsf{E}_x f(X(s))\,ds + \mathsf{E}_x u(X(t))\right] = \mathcal{R}f(x) + \lim_{t\to+\infty}\mathsf{E}_x u(X(t)).$$

Применив оценку (28) с u, χ, ψ вместо f, ψ, ϕ, соответственно, получим

$$|\mathsf{E}_x u(X(t))| \le 2\|u\|_{\psi,d,p}\left(\int_{\mathbb{X}}\chi\,d\pi\right)^{1/q}\chi(x)r^{1/p}(t), \qquad t\ge 0.$$

Поэтому $\mathsf{E}_x u(X(t)) \to 0$, $t\to\infty$, и следовательно $u(x) = \mathcal{R}f(x)$. □

Список литературы

1. N. Abourashchi, A. Yu. Veretennikov, *On stochastic averaging and mixing*, Theory of Stoch. Proc. **16(32)** (2010), no. 1, 111–129.
2. Р. З. Хасьминский, *Предельная теорема для решений дифференциальных уравнений со случайной правой частью*, Теор. вероятн. и прим. **11** (1966), № 3, 444–462.
3. А. Н. Бородин, *Предельная теорема для решений дифференциальных уравнений со случайной правой частью*, Теор. вероятн. и прим. **22** (1977), № 3, 498–512.
4. А. В. Скороход, В. В. Сарафян, *О динамических системах с быстрыми переключениями*, Теор. вероятн. и прим. **32** (1987), № 4, 658–669.
5. S. N. Ethier and T. G. Kurtz, *Markov Processes. Characterization and Convergence*, Wiley, New York, 1986.
6. V. S. Koroliuk and N. Limnios, *Stochastic Systems in Merging Phase Space*, World Scientific, New Jersey, 2005.
7. E. Pardoux and A. Yu. Veretennikov, *On Poisson equation and diffusion approximation 1*, Ann. Prob. **29** (2001), 1061–1085.
8. A. Yu. Veretennikov, *Bounds for the mixing rates in the theory of stochastic equations*, Theory Probab. Appl. **32** (1987), 273–281.
9. A. Yu. Veretennikov, *On polynomial mixing bounds for stochastic differential equations*, Stochastic Process. Appl. **70** (1997), 115–127.
10. S. A. Klokov and A. Yu. Veretennikov, *Sub-exponential mixing rate for a class of Markov chains*, Math. Comm. **9** (2004), 9–26.
11. D. Down, S. P. Meyn, and R. L. Tweedie, *Exponential and uniform ergodicity of Markov processes*, Ann. Probab. **23** (1995) no. 4, 1671–1691.
12. R. Douc, G. Fort, and A. Guillin, *Subgeometric rates of convergence of f-ergodic strong Markov processes*, Stochastic Processes and Appl. **119** (2009) no. 3, 897–923.
13. A. M. Kulik, *Exponential ergodicity of the solutions to SDE's with a jump noise*, Stoch. Proc. Appl. **119** (2009), 602–632.
14. G. Da Prato and J. Zabczyk, *Stochastic Equations in Infinite Dimensions*, Cambridge University Press, 1992.
15. S. Peszat and J. Zabczyk, *Stochastic Partial Differential Equations with Lévy Noise (an Evolution Equation Approach)*, Cambridge University Press, 2007.
16. M. Hairer and J. and Mattingly, *Ergodicity of the 2D Navier–Stokes equations with degenerate stochastic forcing*, Ann. of Math. **164** (2006), 993–1032.
17. M. Hairer and J. Mattingly, *Spectral gaps in Wasserstein distances and the 2D stochastic Navier–Stokes equations*, Ann. Probab. **36** (2008), 2050–2091.
18. T. Komorowski, Sz. Peszat, and T. Szarek, *On ergodicity of some Markov processes*, Ann. of Prob. **38** (2010), 1401–1443.
19. T. Szarek, *The uniqueness of invariant measures for Markov operators*, Studia Math. **189** (2008), 225–233.
20. M. Hairer, J. C. Mattingly, and M. Scheutzow, *Asymptotic coupling and a general form of Harris' theorem with applications to stochastic delay equations*, Prob. Theory Rel. Fields (2009), DOI 10.1007/s00440-009-0250-6.
21. E. Pardoux and A. Yu. Veretennikov, *On Poisson equation and diffusion approximation 2*, Ann. Prob. **31** (2003), 1166–1192.
22. A.M. Kulik and A. Yu. Veretennikov, *On extended Poisson equation and diffusion approximation* (2011). (to appear)
23. H. Kunita, *Absolute continuity of Markov processes and generators*, Nagoya Math. J. **36** (1969), 1–26.

24. D. Revuz and M. and Yor, *Continuous Martingales and Brownian Motion*, 3-rd ed., Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Fundamental Principles of Mathematical Sciences, vol. 293, Springer-Verlag, Berlin, 1999.
25. Z. Palmowski and T. Rolski, *A technique for exponential change of measure for Markov processes*, Bernoulli **8** (2002), no. 6, 767–785.
26. В. М. Золотарев, *Современная теория суммирования независимых случайных величин*, "Наука", Москва, 1986.
27. R. M. Dudley, *Real Analysis and Probability*, Cambridge Univ. Press, 2002.
28. С. Ватанабэ, Н. Икэда, *Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы*, "Наука", Москва, 1986.
29. Р. Л. Добрушин, *Задание системы случайных величин при помощи условных распределений*, Теор. вероятн. и прим. **15** (1970), № 3, 469–497.
30. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Стохастические дифференциальные уравнения*, "Наукова думка", Киев, 1968.

Інститут проблем передачі інформації, Москва, Росія
Адрес электронной почты: A. Veretennikov@leeds.ac.uk

Інститут математики НАН України, вул. Терещенківська 3, 01601, Київ, Україна
Адрес электронной почты: kulik@imath.kiev.ua

Поступила 06/09/2011