Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 85, 2011, стор. 66–74

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 85, 2011, pp. 66–74

О ПОДЧИНЕННЫХ СТАТИСТИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ

УДК 519.21

З. К. ЗЕРАКИДЗЕ И Г. А. СОХАДЗЕ

Аннотация. В работе рассмотрены общие статистические структуры. Показано, что общий случай может быть сведен к ортогональным или абсолютно непрерывным статистическим структурам.

Анотація. У роботі розглянуто загальні статистичні структури. Показано, що загальний випадок можна звести до розгляду ортогональних або абсолютно неперервних статистичних структур.

Abstract. In this paper the general statistical structures are considered. It is Shown that the general case may be reduced to consideration of some orthogonal or absolutely continuous statistical structures.

В задачах статистики случайных процессов обычно имеют дело с семейством возможных распределений наблюдаемой траектории случайного процесса. Поэтому естественно рассматривать множество всех возможных наблюдаемых траекторий, а каждому возможному распределению случайного процесса сопоставить некоторую вероятностную меру на пространстве всех траекторий. Здесь важно то, что все допустимые распределения имеют один общий носитель. В обычных ситуациях такой носитель всегда имеется. Если μ σ-конечная мера, то всегда можно построить такую вероятностную меру $\widetilde{\mu}$, что мера μ эквивалентна мере $\widetilde{\mu}$. Действительно, пусть (E, S) измеримое пространство и μ σ-конечная мера на S. Тогда $E = \sum_{k=1}^{\infty} A_k$, где A_k S-измеримые попарно непересекающиеся множества и $\mu(A_k) < \infty$ для любого k. Выберем последовательность неотрицательных чисел ρ_k так, чтобы $\sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \mu(A_k) = 1$. Положим $\widetilde{\mu}(B) = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \mu(A_k B)$. Тогда $\mu \sim \widetilde{\mu}$ и $\widetilde{\mu}(E) = 1$.

Так, что в конечномерных пространствах всегда можно переходить от σ-конечных мер к эквивалентным вероятностным мерам, а в бесконечномерных пространствах это невозможно.

Хорошо известно, какую важную роль играют в статистике абсолютно непрерывные и ортогональные статистические структуры (см. [1], [2]). В этой работе будут рассмотрены некоторые важные случай сведения общей постановки к аналогичным проблемам оценивания параметра к другим абсолютно непрерывным или ортогональным статистическим структурам. С начала приведем примеры.

Пример 1. Пусть Θ состоит из двух точек θ_1 и θ_2 и на измеримом пространстве (E, S) определены две вероятностные меры μ_{θ_1} и μ_{θ_2}. Всегда можно указать представление множества E на три попарно непересекающиеся множества A_1, A_2, A_3, что $E = A_1 + A_2 + A_3$, на множестве A_2 будем иметь $\mu_{\theta_1} \sim \mu_{\theta_2}$, $\mu_{\theta_2}(A_1) = 0$ и $\mu_{\theta_1}(A_3) = 0$.

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 62H05, 62H12.

Ключевые слова и фразы. Statistical structures, absolutely continuity, orthogonality.

Работа основана на докладе, представленном на международной конференции “Modern Stochastics: Theory and Applications II”, которая проходила 7–11 сентября 2010 г. в Киевском национальном университете имени Тараса Шевченко и была посвящена юбилеям трех выдающихся украинских ученых: Анатолия Скорохода, Владимира Королюка и Игоря Коваленко.

Рассмотрим вероятностные меры определённые по формулам

$$\nu_1(A)=\frac{\mu_{\theta_1}(A\cap A_1)}{\mu_{\theta_1}(A_1)},\qquad \nu_2(A)=\frac{\mu_{\theta_2}(A\cap A_3)}{\mu_{\theta_2}(A_3)},\qquad \nu_3(A)=\frac{\mu_{\theta_1}(A\cap A_2)}{\mu_{\theta_1}(A_2)}$$

для любого $A\in S$. Статистическая структура $\{E,S,\nu_k,k=1,2,3\}$ будет ортогональной статистической структурой.

Пример 2. Пусть Θ состоит из двух точек θ_1 и θ_2 и на (E,S) даны две вероятностные меры μ_{θ_1} и μ_{θ_2}. Рассмотрим разбиение $E=A_1+A_2+A_3$, где $A_1\cap A_3=A_2\cap A_3=0$, такое, что $\mu_{\theta_2}(A_1)=0$, $\mu_{\theta_1}(A_3)=0$ и на A_2, мера μ_{θ_1} эквивалентна μ_{θ_2}. Рассмотрим меры, определенные следующим образом

$$\nu_1(A)=\frac{\mu_{\theta_1}(A\cap A_2)}{\mu_{\theta_1}(A_2)},\qquad \nu_2(A)=\frac{\mu_{\theta_2}(A\cap A_2)}{\mu_{\theta_2}(A_2)},\qquad \forall A\in S.$$

Статистическая структура $\{E,S,\nu_k,k=1,2\}$ будет абсолютно непрерывной.

Приведенные примеры показывают, что имея наблюдение, мы можем изменить статистическую структуру (отбросив некоторые значения параметра как невозможные) и заменяя меры, получаем другие статистические структуры.

Пусть $\{E,S\}$ измеримое пространство, $\{\mu_i,i\in I\}$ семейство вероятностных мер на S, множество параметров I наделено минимальной σ-алгеброй $B(I)$, которая содержит все конечные подмножества I.

Определение 1. Под статистической структурой будем понимать объект

$$\{E,S,\mu_i,i\in I\},$$

множество параметров I которой наделено минимальной σ-алгеброй $B(I)$, относительно которой измеримы все функций $i\to\mu_i(A)$, $A\in S$.

Определение 2. Статистическая структура $\{E,S,\mu_i,i\in I\}$ называется ортогональной (сингулярной), если вероятностные меры $\{\mu_i,i\in I\}$ попарно ортогональны

$$(\forall i)(\forall j)\big(i\in I\ \&\ j\in I\ \&\ i\neq j\longrightarrow \mu_i\perp\mu_j\big).$$

Определение 3. Статистическая структура $\{E,S,\mu_i,i\in I\}$ называется слабо разделимой, если существует такое семейство S-измеримых множеств $\{X_i,i\in I\}$, что выполняются следующие соотношения:

$$\mu_i(X_j)=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

Определение 4. Статистическая структура $\{E,S,\mu_i,i\in I\}$ называется разделимой, если существует такое семейство S-измеримых множеств $\{X_i,i\in I\}$ что выполняются следующие соотношения:

1) при любых $i\neq j\longrightarrow \operatorname{card}(X_i\cap X_j)<2^{\aleph_0}$,

2) $\mu_i(x_j)=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j,\end{cases}$

где $\aleph_0$ мощность счётного множества.

Определение 5. Статистическая структура $\{E,S,\mu_i,i\in I\}$ называется сильно разделимой, если существует такое семейство попарно непересекающихся S-измеримых множеств $\{X_i,i\in I\}$ что

$$\forall i\in I,\ \ \mu_i(X_i)=1.$$

Замечание 1. Из сильной разделимости статистической структуры вытекает слабая разделимость, из слабой разделимости вытекает ортогональность, но не наоборот.

Пример 3. Пусть $E = [0,1] \times [0,1]$ единичный квадрат, S σ-алгебра борелевских множеств из этого квадрата. Рассмотрим множества

$$X_i = \{0 \le x \le 1, y = i, i \in [0,1]\}$$

и μ_i, $i \in [0,1]$ – линейные Лебеговские меры на X_i. Тогда статистическая структура $\{[0,1] \times [0,1], S, \mu_i, i \in [0,1]\}$ сильно разделима.

Пример 4. Пусть $E = [0,1] \times [0,1]$ единичный квадрат. S σ-алгебра борелевских множеств из этого квадрата. Рассмотрим множества

$$X_i = \begin{cases} 0 \le x \le 1,\ y = i, & i \in [0,1], \\ x = i-2,\ 0 \le y \le 1, & i \in [2,3] \end{cases}$$

и пусть μ_i, $i \in [0,1] \cup [2,3]$ — Лебеговские линейные меры на X_i. Статистическая структура $\{[0,1] \times [0,1], S, \mu_i, i \in [0,1] \cup [2,3]\}$ разделимая, но не сильно разделимая.

Пример 5. Пусть $E = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ единичный куб, S σ-алгебра Борелевских множеств E. Рассмотрим множества

$$X_i = \begin{cases} 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ z = i, & i \in [0,1], \\ x = i-2,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1, & i \in [2,3], \\ 0 \le x \le 1,\ y = i-4,\ 0 \le z \le 1, & i \in [4,5] \end{cases}$$

и μ_i, $i \in [0,1] \cup [2,3] \cup [4,5]$ — плоские Лебеговские меры на соответствующих множествах X_i. Статистическая структура

$$\{[0,1] \times [0,1] \times [0,1], S, \mu_i, i \in [0,1] \cup [2,3] \cup [4,5]\}$$

слабо разделима, но не разделимая.

Пример 6. Пусть $E = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$, S σ-алгебра борелевских множеств из этого куба. Рассмотрим множества

$$X_i = \begin{cases} 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ z = i, & i \in (0,1], \\ x = i-2,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1, & i \in [2,3], \\ 0 \le x \le 1,\ y = i-4,\ 0 \le z \le 1, & i \in [4,5] \end{cases}$$

и пусть μ_i, $i \in (0,1] \cup [2,3] \cup [4,5]$ — Лебеговские плоские меры на X_i, а μ_0 Лебеговская мера на E. Тогда статистическая структура

$$\{E, S, \mu_i, i \in [0,1] \times [2,3] \times [4,5]\}$$

ортогональная, но не сильно разделимая.

Теорема 1. *Если статистическая структура $\{E, S, \mu_k, k = 1,2,\ldots\}$ разделимая или слабо разделимая, то она сильно разделимая.*

Доказательство. Так как статистическая структура разделимая или слабо разделимая, то существует такое семейство S-измеримых множеств $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots$, что

$$\mu_i(\overline{A}_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \ne j. \end{cases}$$

Тогда рассмотрим множества

$$A_1 = \overline{A}_1 - \overline{A}_1 \cap \Big(\bigcup_{k\neq 1} \overline{A}_k \Big),$$
$$A_2 = \overline{A}_2 - \overline{A}_2 \cap \Big(\bigcup_{k\neq 2} \overline{A}_k \Big),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_n = \overline{A}_n - \overline{A}_n \cap \Big(\bigcup_{k\neq n} \overline{A}_k \Big),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ясно, что множества $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ попарно не пересекаются и для всех $i = 1, 2, \ldots$ $\mu_i(A_i) = 1$. Теорема доказана. □

Теорема 2. *Если статистическая структура* $\{E, S, \mu_k, k = 1, 2, \ldots\}$ *ортогональная, то она сильно разделимая.*

Доказательство. Из ортогональности следует существование таких S-измеримых множеств $\{\widetilde{C}_{ik}\}$, что

$$\mu_k(\widetilde{C}_{ik}) = 0 \text{ and } \mu_i(E - \widetilde{C}_{ik}) = 0.$$

Возмем множества

$$C_i = \bigcup_{k\neq i} (E - \widetilde{C}_{ik}).$$

Тогда

$$\mu_i(C_i) = \mu_i \Big[\bigcup_{k\neq i} (E - \widetilde{C}_{ik}) \Big] \leq \sum_{k\neq i} \mu_i(E - \widetilde{C}_{ik}) = 0$$

и $\mu_i(E - C_i) = 1$, для всех $i = 1, 2, \ldots$.

С другой стороны,

$$\mu_k(E - C_i) = \mu_k \Big[E - \bigcup_{k\neq i} (E - \widetilde{C}_{ik}) \Big] = \mu_k \Big(\bigcup_{k\neq i} C_{ik} \Big) = 0 \text{ когда } k \neq i.$$

Таким образом эта статистическая структура слабо разделимая и по теореме 1 она и сильно разделимая. Теорема доказана. □

Определение 6. Пусть $M = \{E, S, \mu_i, i \in I\}$ и $N = \{E, S, P_\alpha, \alpha \in A\}$ две статистические структуры. Их суммой будем называть структуру

$$M \cup N = \big\{E, S, \mu_i, i \in I, P_\alpha, \alpha \in A\big\}.$$

Определение 7. Пусть даны две статистические структуры $M = \{E, S, \mu_i, i \in I\}$ и $N = \{E, S, P_\alpha, \alpha \in A\}$. Будем говорить, что первая структура M подчинена второй структуре N, если для каждого $i \in I$ можно указать такую последовательность $\{\alpha_k\}$, $\alpha_k \in A$ и такие $\rho_k \geq 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} \rho_k < \infty$, что мера μ_i абсолютно непрерывна относительно меры $\sum_{k=1}^{\infty} \rho_k P_{\alpha_k}$.

Далее будем предполагать, что μ_i, как функции аргумента i являются $B(I)$ измеримыми.

Определение 8. Вероятностная мера μ называется смесью для статистической структуры $\{E, S, \mu_i, i \in I\}$, если существует такая $S \times B(I)$ измеримая неотрицательная функция $\rho(x, i)$ и такая вероятностная мера γ на $B(I)$, что

$$\mu(A) = \int_I \int_A \rho(x, i)\, \mu_i(dx)\, \gamma(di), \quad \forall A \in S,$$

и

$$\int_I \int_E \rho(x,i)\,\mu_i(dx)\,\gamma(di) = 1.$$

Определение 9. Статистическая структура $M = \{E, S, \mu_i, i \in I\}$ называется чистой, если ни одна мера из M не является смесью остальных из этого же семейства (т.е. всякая мера μ_{i_0} из этого семейства не является смесью для статистической структуры $\{E, S, \mu_i, i \in I - \{i_0\}\}$).

Определение 10. Будем говорить, что статистическая структура $M = \{E, S, \mu_i, i \in I\}$ слабо подчинена статистической структуре $N = \{E, S, P_\alpha, \alpha \in A\}$, если любая мера μ_i есть смесь мер $\{P_\alpha, \alpha \in A\}$.

Определение 11. Статистическая структура $\{E, S, P_\alpha, \alpha \in A\}$ называется приводимой, если она подчинена некоторой чистой статистической структуре.

Определение 12. Статистическая структура $\{E, S, P_\alpha, \alpha \in A\}$ называется вполне приводимой, если каждая мера данной статистической структуры является смесью остальных из этого семейства.

Ниже через (ZFC) обозначаем систему аксиом теории множеств Цермело–Френкеля+аксиома выбора (см. напр. [3]).

Теорема 3. *В теории (ZFC) любая статистическая структура $\{E, S\mu_b, b \in B\}$ либо подчинена ортогональной статистической структуре, либо вполне неприводима.*

Доказательство. Известно (см. [4]), что на любом множестве E мощности континуума ($\operatorname{card} E = c$), можно определить ортогональную статистическую структуру имеющую максимальную возможную мощность равную 2^{2^c}. Известно также ([3]), что в теории (ZFC) любое множество можно вполне упорядочить. Вполне упорядочим множество I. Будем строить меры η_α с помощью трансфинитной индукций так чтобы они были попарно ортогональны следующим образом.

Пусть для первого элемента I $\eta_1 = \mu_{i_1}$ и пусть определены попарно ортогональные вероятностные меры η_γ для всех порядковых чисел γ меньших α, т.е. для любой меры μ_γ существует такая счётная последовательность $\{\gamma_k\}$ и такие $\rho_k \geq 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} \rho_k < \infty$, что мера μ_γ абсолютно непрерывна мере $\sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \eta_{\gamma_k}$. Мы уже определили счётное семейство попарно ортогональных вероятностных мер η_γ, $\gamma < \alpha$. Тогда для μ_γ найдётся не более чем счётное множество Γ_α таких $\gamma < \alpha$, что η_γ не ортогональна μ_α. Положим

$$\widehat{\eta}_\alpha(A) = \mu_\alpha(A) - \sum_{\gamma \in \Gamma_\alpha} \int_A \frac{d\mu_\alpha}{d\eta_\gamma}(x)\eta_\gamma(dx), \quad \forall A \in S.$$

Так как статистическая структура $\{E, S, \eta_\gamma, \gamma \in \Gamma_\alpha\}$ ортогональная, $\operatorname{card}\Gamma_\alpha \leq \aleph_0$, то по теореме 2 она сильно разделима, т.е. существуют попарно непересекающиеся S-измеримые множества A_{γ_i}, $i = 1, 2, \ldots$ такие, что

$$\eta_{\gamma_i}(A_{j_i}) = 1, \quad \forall i = 1, 2, \ldots$$

и поэтому

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_\alpha} \int_A \frac{d\mu_\alpha}{d\eta_\gamma}\, d\eta_\gamma = \int_{A \cap A_1} \frac{d\mu_\alpha}{d\eta_{\gamma_1}}\, d\eta_{\gamma_1} + \int_{A \cap A_2} \frac{d\mu_\alpha}{d\eta_{\gamma_2}}\, d\eta_{\gamma_2} + \cdots \leq \mu_\alpha(A).$$

Отсюда

$$\mu_\alpha(A) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\alpha} \int_A \frac{d\mu_\alpha}{d\eta_\gamma}\, d\eta_\gamma + \widehat{\eta}_\alpha(A).$$

Положим

$$\eta_\alpha = \begin{cases} 0, & \widehat{\eta}_\alpha(E) = 0, \\ \dfrac{\widehat{\eta}_\alpha(A)}{\widehat{\eta}_\alpha(E)}, & \widehat{\eta}_\alpha(E) > 0. \end{cases}$$

Пусть $A_1 = \{\alpha\colon \widehat{\eta}_\alpha(E) > 0\}$, тогда любая вероятностная мера μ_α подчинена ортогональной статистической структуре $\{E, S, \eta_\alpha, \alpha \in A_1\}$. Далее если $\widehat{\eta}_\alpha(A) = 0$ для любого α, то ясно, что любая мера μ_α есть смесь остальных μ_γ, $\gamma \neq \alpha$ и значит статистическая структура вполне неприводима. Теорема 3 доказана. □

Пример 7. Пусть Θ состоит из двух точек θ_1 и θ_2 и на (E, S) определены две вероятностные меры μ_{θ_1} и μ_{θ_2}. Всегда можно указать представление множества E на при попарно непересекающиеся множества $E = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ так, что на множестве A_2 меры μ_{θ_1} и μ_{θ_2} эквивалентны и кроме того $\mu_{\theta_2}(A_1) = 0$ и $\mu_{\theta_1}(A_3) = 0$. Рассмотрим вероятностные меры, определенные по формулам

$$\nu_1(A) = \frac{\mu_{\theta_1}(A \cap A_1)}{\mu_{\theta_1}(A_1)}, \qquad \nu_2(A) = \frac{\mu_{\theta_2}(A \cap A_3)}{\mu_{\theta_2}(A_3)}, \qquad \nu_3(A) = \frac{\mu_{\theta_1}(A \cap A_2)}{\mu_{\theta_1}(A_2)}$$

для любого $A \in S$. Покажем, что статистическая структура $\{E, S, \mu_{\theta_1}, \mu_{\theta_2}\}$ подчинена ортогональной статистической структуре $\{E, S, \nu_1, \nu_2, \nu_3\}$. Действительно, для любого $A \in S$

$$\begin{aligned} \mu_{\theta_1}(A) &= \mu_{\theta_1}(A \cap A_1) + \mu_{\theta_1}(A \cap A_2) + \mu_{\theta_1}(A \cap A_3) \\ &= \frac{\mu_{\theta_1}(A \cap A_1)}{\mu_{\theta_1}(A_1)}\mu_{\theta_1}(A_1) + \frac{\mu_{\theta_1}(A \cap A_2)}{\mu_{\theta_1}(A_2)}\mu_{\theta_1}(A_2) = \alpha\nu_1 + \beta\nu_3, \end{aligned}$$

где $\alpha = \mu_{\theta_1}(A_1)$, $\beta = \mu_{\theta_1}(A_2)$.

$$\begin{aligned} \mu_{\theta_2}(A) &= \mu_{\theta_2}(A \cap A_1) + \mu_{\theta_2}(A \cap A_2) + \mu_{\theta_2}(A \cap A_3) \\ &= \frac{\mu_{\theta_2}(A \cap A_3)}{\mu_{\theta_2}(A_3)}\,\mu_{\theta_2}(A_3) + \frac{\mu_{\theta_2}(A \cap A_2)}{\mu_{\theta_1}(A_2 \cap A_2)}\,\frac{\mu_{\theta_1}(A \cap A_2)}{\mu_{\theta_1}(A \cap A_2)}\,\mu_{\theta_1}(A_2 \cap A_2) \\ &= \alpha_1\nu_2 + \beta_2\nu_3, \end{aligned}$$

где

$$\alpha_1 = \mu_{\theta_2}(A_3), \qquad \beta_2 = \mu_{\theta_2}(A \cap A_2)\frac{\mu_{\theta_1}(A_2)}{\mu_{\theta_1}(A \cap A_2)}.$$

Таким образом, статистическая структура $\{E, S, \mu_{\theta_1}, \mu_{\theta_2}\}$ подчинена ортогональной статистической структуре $\{E, S, \nu_1, \nu_2, \nu_3\}$.

Пример 8. Пусть $E = [0, 1] \times [0, 1]$ единичный квадрат и S σ-алгебра борелевских множеств на этом квадрате. Рассмотрим множества

$$X_i = \begin{cases} 0 \le x \le 1,\ y = i, & i \in [0, 1], \\ x = i - 2,\ 0 \le y \le 1, & i \in [2, 3]. \end{cases}$$

На этих множествах определим Лебеговские линейные меры μ_i:

$$\mu_i(X_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

Рассмотрим плоскую меру

$$\nu_1(A) = \int_0^1 \mu_i(A \cap X_i)\,\gamma_1(di) = \int_0^1 \int_A \mu_i(dx)\,\gamma_1(di),$$

где γ_1 Лебеговская мера на $[0,1]$. Ясно, что ν_1 есть смесь $\{\mu_i, i \in [0,1]\}$. Пусть

$$\nu_2(A) = \int_2^3 \mu_i(A \cap X_i)\, \gamma_2(di) = \int_2^3 \int_A \mu_i(dx)\, \gamma_2(di),$$

где γ_2 Лебеговская мера на $[2,3]$. Ясно, что ν_2 есть смесь $\{\mu_i, i \in [2,3]\}$.

Для фиксированной меры μ_{i_0} положим

$$q_{i_0} = \sum_{\nu \in N} \int \frac{d\mu_{i_0}}{d\nu}(x) \nu(dx),$$

где супремум берется по всем вероятностным мерам ν. из множества мер E. Скажем, что множество N вероятностных мер счётно-выпукло, если $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \nu_k \in N$, как только $\nu_k \in N$ для $\alpha_k > 0$ таких, что $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = 1$.

Лемма 1. *Если множество N счётно-выпукло, то q_{i_0} достигается.*

Доказательство. Очевидно при $q_{i_0} = 0$, лемма справедлива. Предположим $0 < q < 1$ и для любого k найдётся такая мера $\nu_k \in N$, что

$$q_{i_0} - \frac{1}{k} < \int_E \frac{d\mu_{i_0}}{d\nu_k}(x)\, d\nu_k(x) \le q_{i_0}.$$

Пусть $\overline{\nu} = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \nu_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = 1$, $\alpha_k > 0$. Разложим меры $\overline{\nu}$ и μ относительно ν_k. $\overline{\nu} = \beta \nu_k + \nu$, $\mu_{i_0} = \delta \nu_k + \nu'$, где $\beta > 0$, $\delta > 0$.

Ясно, что $\frac{d\overline{\nu}}{d\nu_k} = \beta$ и $\frac{d\mu_{i_0}}{d\nu_k} = \delta$. Вычислим $\frac{d\overline{\nu}}{d\nu_k}$, $\frac{d\mu_{i_0}}{d\overline{\nu}} = \frac{d(\delta\nu_k + \nu')}{d\overline{\nu}} = \delta \frac{d\nu_k}{d\overline{\nu}} + \frac{d\nu'}{d\overline{\nu}}$. Умножим это последнее равенство на $\frac{d\overline{\nu}}{d\nu_k}$. Получим

$$\frac{d\mu_{i_0}}{d\overline{\nu}} \frac{d\overline{\nu}}{d\nu_k} = \delta \frac{d\nu_k}{d\overline{\nu}} \frac{d\overline{\nu}}{d\nu_k} + \frac{d\nu'}{d\overline{\nu}} \frac{d\overline{\nu}}{d\nu_k} = \delta = \frac{d\mu_{i_0}}{d\nu_k}.$$

Таким образом

$$\frac{d\mu_{i_0}}{d\mu_k} = \frac{d\mu_{i_0}}{d\overline{\nu}} \frac{d\overline{\nu}}{d\nu_k}.$$

Ясно, что

$$q - \frac{1}{k} < \int_E \frac{d\mu_{i_0}}{d\nu_k}\, d\nu_k = \int_E \frac{d\mu_{i_0}}{d\overline{\nu}} \frac{d\overline{\nu}}{d\nu_k} \frac{d\nu_k}{d\overline{\nu}}\, d d\overline{\nu} \le \int_E \frac{d\mu_{i_0}}{d\overline{\nu}}\, d\overline{\nu},$$

т.е. при всех $k > 0$,

$$q - \frac{1}{k} \le \int_E \frac{d\mu_{i_0}}{d\overline{\nu}}\, d\overline{\nu} \le q.$$

Перейдём к пределу, когда $k \to \infty$, получим

$$q = \int_E \frac{d\mu_{i_0}}{d\overline{\nu}}\, d\overline{\nu}.$$

Значит $\overline{\nu} \in N$. Лемма доказана. □

Теорема 4. *Для любой ортогональной статистической структуры*

$$M = \{E, S, \mu_b, b \in B\}$$

можно указать три статистические структуры N_1, N_2, N_3 такие, что N_1 есть чистая, N_2 слабо подчинена N_1, N_3 вполне неприводима и M подчинена $N_1 \cup N_2 \cup N_3$.

Доказательство. Положим

$$q_{b_0} = \sup \int_E \frac{d\mu_{b_0}}{d\nu}(x)\, d\nu(x),$$

где sup по всем вероятностным мерам ν являющихся смесью мер ν_b, $b \ne b_0$.

Для любого k найдётся ν_{k,b_0}, такая, что

$$q_{b_0} - \frac{1}{k} < \int_E \frac{d\mu_{b_0}}{d\nu_{k,b_0}}(x)\, d\nu_{k,b_0}(x) \le q_{b_0},$$

где

$$\nu_{k,b_0}(A) = \int_{B-(b_0)} \int_A \rho_k(x,b)\mu_b(dx)\gamma_k(db).$$

Возьмем положительные числа $\beta_k > 0$ такие, что $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k = 1$ и $\overline{\gamma} = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k\gamma_k$. Тогда γ_k абсолютно непрерывна относительно $\overline{\gamma}$ и

$$\nu_{k,b_0}(A) = \int_{B-(b_0)} \int_A \rho_k(x,b)\mu_b(dx)\, \frac{d\gamma_k}{d\delta}(b)\overline{\gamma}(db).$$

Положим

$$\widetilde{\rho}_k(x,b) = \rho_k(x,b)\, \frac{d\gamma_k}{d\delta}(b).$$

Тогда

$$\nu_{k,b_0}(A) = \int_{B-(b_0)} \int_A \widetilde{\rho}_k(x,b)\mu_b(dx)\overline{\gamma}_k(db).$$

Пусть $\alpha_k > 0$ такие, что $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = 1$ и $\nu_{b_0} = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k\nu_{k,b_0}$. Тогда

$$\alpha_{b_0}(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k\nu_{k,b_0}(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \int_{B-(b_0)} \int_A \widetilde{\rho}_k(x,b)\mu_A(dx)\overline{\gamma}(db)$$

$$= \int_{B-(b_0)} \int_A \Big[\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k\widetilde{\rho}_k(x,b)\Big]\mu_B(dx)\overline{\gamma}(db).$$

Положим $\widetilde{\rho}(x,b) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k\widetilde{\rho}_k(x,b)$, тогда

$$\nu_{b_0}(A) = \int_{B-(b_0)} \int_A \widetilde{\rho}(x,b)\, \mu_B(dx)\, \overline{\gamma}(db).$$

По лемме 1, sup достигается на ν_{b_0}. Т.е. $q_{b_0} = \int_E \frac{d\mu_{b_0}}{d\nu_{b_0}}(x)\nu_{b_0}(dx)$.

В случае, когда $q_{b_0} < 1$, положим

$$\overline{\mu}_{b_0}(A) = \frac{1}{1-q_{b_0}} \left[\mu_{b_0}(A) - \int_A \frac{d\mu_{b_0}}{d\nu_{b_0}}(x)\, d\nu_{b_0}(x)\right].$$

Пусть B_1 совокупность тех b_0 для которых $q_{b_0} < 1$. Тогда структура $N_1 = \{E, S, \overline{\mu}_b, b \in B_1\}$ является чистой (т.е. приводимой).

Рассмотрим статистическую структуру

$$D = \{E, S, \widetilde{\mu}_b, b \in B_2\},$$

где

$$\widetilde{\mu}_b(A) = \frac{1}{q_b} \int_A \frac{d\mu_b}{d\nu_b}(x)\, d\nu_b(x),$$

и B_2 есть множество тех b для которых $q_b > 0$. Положим

$$\overline{q}_{b_0} = \sup \int_E \frac{d\widetilde{\mu}}{d\overline{\nu}}\, d\overline{\nu},$$

где sup берётся по всем мерам $\overline{\nu}$, являющимся смесями $\overline{\mu}_b$, $b \neq b_0$. По лемме 1 sup достигается. Допустим $\overline{\nu}_{b_0}$ такова, что

$$\overline{q}_{b_0} = \int_E \frac{d\overline{\mu}}{d\overline{\nu}_{b_0}}\, d\overline{\nu}_{b_0}(dx),$$

где

$$\overline{\nu}_{b_0}(A) = \int_{B-\{b_0\}} \int_A \overline{\rho}(x,b)\, \widetilde{\mu}_b(dx)\, \overline{\gamma}(db).$$

При $\overline{q}_{b_0} < 1$ положим

$$\widetilde{\overline{\mu}}_{b_0}(A) = \frac{1}{1-\overline{q}_{b_0}}\left[\widetilde{\mu}_{b_0}(A) - \int_A \frac{d\widetilde{\mu}_{b_0}}{d\overline{\nu}_{b_0}}(x)\, d\overline{\nu}_{b_0}(x)\right],$$

а при $\overline{q}_{b_0} > 0$

$$\overline{\overline{\mu}}_{b_0}(A) = \frac{1}{\overline{q}_{b_0}} \int_A \frac{d\widetilde{\mu}_{b_0}}{d\overline{\nu}_{b_0}}(x)\, d\overline{\nu}_{b_0}(x).$$

Пусть B_3-совокупность тех b_0, для которых $\overline{q}_{b_0} < 1$, а B_4 совокупность тех b_0, для которых $\overline{q}_{b_0} > 0$. Очевидно, что структура $\{E, S, \widetilde{\mu}_b, b \in B_2\}$ подчинена структуре $\{E, S, \widetilde{\overline{\mu}}_b, b \in B_3, \overline{\overline{\mu}}_b, b \in B_4\}$ и структура $N_2 = \{E, S, \overline{\overline{\mu}}_b, b \in B_4\}$ слабо подчинена структуре $N_1 = \{E, S, \overline{\mu}_b, b \in B_1\}$, а структура $N_3 = \{E, S, \widetilde{\overline{\mu}}_b, b \in B_3\}$ вполне неприводима. Ясно, что структура M подчинена сумме трёх структур $N_1 \cup N_2 \cup N_3$. Теорема доказана. □

Список литературы

1. I. M. Ibramkhalilov and A. V. Skorokhod, *Consistent Estimates of the Parameters of Random Processes*, "Naukova Dumka", Kiev, 1980.
2. Z. S. Zerakidze, *A Hilbert space of measures*, Ukrainian Mathematical Journal **38** (1986), no. 2, 148–154.
3. F. R. Drake, *Set Theory*, Amsterdam, 1974.
4. З. С. Зеракидзе, *О слабо разделимых и разделимых семействах вероятностных мер*, Сообщения АН ГССР **113** (1984), no. 2, 273–275.

Тбилисский Государственный Университет им. И. Джавахишвили, ул. Университетская 3, Тбилиси 0186, Грузия

Адрес электронной почты: giasokhi1@i.ua

Тбилисский Государственный Университет им. И. Джавахишвили, ул. Университетская 3, Тбилиси 0186, Грузия

Адрес электронной почты: z.zerakidze@gmail.ru

Поступила 27/07/2011