Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 86, 2012, стор. 92–107

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 86, 2012, pp. 92–107

ПРОСТОРИ БАНАХА ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$

УДК 519.21

Ю. В. КОЗАЧЕНКО І Ю. Ю. МЛАВЕЦЬ

Анотація. Досліджуються властивості випадкових величин та процесів з просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$.

Abstract. The properties of random variables and processes from spaces $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ are investigated.

Аннотация. Исследования свойства случайных величин и процессов из пространства $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$.

1. Вступ

В роботі [1] (див. також роботу [2]) розглядався метод підрахунку інтегралів методом Монте-Карло

$$I(t) = \int \dots \int_{\mathbf{R}^d} f(t, \vec{x}) p(\vec{x})\, dx, \qquad t \in \mathbf{T},$$

де $p(\vec{x})$ — щільність розподілу деякого вектора. Розглядались інтеграли, які залежать від параметра t, а в частинному випадку не залежить від нього. Знайдено умови, за яких ці інтеграли можна обчислити із заданою точністю та надійністю. При отриманні цих результатів використовувались методи теорії виадкових процесів з просторів Орліча.

Виявилось, що при застосуванні цих методів часто доцільно використовувати моментні норми, еквівалентні звичайним нормам в просторах Орліча, а саме, нормам Люксембурга. Для підрахунку багатьох інтегралів із заданою точністю та надійністю можна використовувати теорію просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, а саме банахових просторів з нормою

$$\|\xi\|_\psi = \sup_{u \ge 1} \frac{\left(\mathsf{E}\,|\xi|^u\right)^{1/u}}{\psi(u)},$$

де $\psi(u) > 0$ — деяка монотонна зростаюча функція. Такі простори вводились в роботі [3].

Наша робота присвячена вивченню тих властивостей просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, які можна використати при дослідженні точності та надійності підрахунку інтегралів методом Монте-Карло. Крім того дослідження просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ мають самостійний інтерес. Їх можна використати при побудові моделей випадкових процесів, їх наближень і т. і. Далі передбачається опублікувати роботу, де результати цієї роботи будуть застосовуватись для дослідження точності та надійності методів Монте-Карло.

Робота складається з вступу та трьох розділів. В другому розділі вивчаються основні властивості просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$. В третьому розділі для певних просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ встановлено їх зв'язок з просторами Орліча. В четвертому розділі знайдено оцінки для розподілів супремумів процесів з $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$.

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60G07; Secondary 65C05.

Ключові слова і фрази. Простори Орліча, простори Банаха випадкових величин, випадкові процеси, моментні норми.

2. $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$-ПРОСТОРИ

Означення 2.1. Нехай $\psi(u) > 0$, $u \geq 1$ — монотонно зростаюча неперервна функція, така що $\psi(u) \to \infty$, якщо $u \to \infty$. Випадкова величина ξ належить простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, якщо виконується умова

$$\sup_{u\geq 1} \frac{\left(\mathsf{E}\,|\xi|^u\right)^{1/u}}{\psi(u)} < \infty.$$

В роботі ([3]) доведено, що $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ є простором з нормою

$$\|\xi\|_\psi = \sup_{u\geq 1} \frac{\left(\mathsf{E}\,|\xi|^u\right)^{1/u}}{\psi(u)}. \qquad (1)$$

Зауваження 2.1. Твердження, що простір $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ є лінійним нормованим простором, очевидне, а те, що він є простором Банаха доводиться аналогічно доведенню того, що простір Орліча випадкових величин є банаховим ([4]).

Теорема 2.1. *Нехай випадкова величина ξ належить простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, то для будь-якого $x > 0$ виконується нерівність*

$$\mathsf{P}\left\{|\xi| > x\right\} \leq \inf_{u\geq 1} \frac{\|\xi\|_\psi^u \left(\psi(u)\right)^u}{x^u}. \qquad (2)$$

Доведення. З нерівності Чебишева випливає, що при $u > 0$ мають місце наступні нерівності

$$\mathsf{P}\left\{|\xi| > x\right\} \leq \frac{\mathsf{E}\,|\xi|^u}{x^u} \leq \frac{\mathsf{E}\,|\xi|^u \left(\psi(u)\right)^u}{(\psi(u))^u x^u} = \frac{\|\xi\|_\psi^u \left(\psi(u)\right)^u}{x^u}. \quad \square$$

Приклад 2.1. Якщо $\psi(u) = u^\alpha$, то покажемо, що

$$\mathsf{P}\left\{|\xi| > x\right\} \leq \exp\left\{-\frac{\alpha}{e}\left(\frac{x}{\|\xi\|_\psi}\right)^{1/\alpha}\right\}.$$

Дійсно, використовуючи попередню теорему, позначимо, що $b = \|\xi\|_\psi / x$. Мінімум виразу $b^u u^{\alpha u}$ набувається в точці $u = e^{-1} b^{-1/\alpha}$, то підставлючи це значення в формулу (2) отримаємо потрібне.

Приклад 2.2. Аналогічно попередньому прикладу отримаємо, якщо $\psi(u) = e^{au}$, де $a > 0$, то

$$\mathsf{P}\left\{|\xi| > x\right\} \leq \exp\left\{-\frac{\left(\ln \frac{x}{\|\xi\|_\psi}\right)^2}{4a}\right\},$$

якщо $x \geq \|\xi\|_\psi$.

Приклад 2.3. Якщо $\psi(u) = e^{u^2}$, то аналогічно попереднім прикладам отримаємо

$$\mathsf{P}\left\{|\xi| > x\right\} \leq \exp\left\{-\frac{2\left(\ln \frac{x}{\|\xi\|_\psi}\right)^{3/2}}{3^{3/2}}\right\},$$

якщо $x \geq \|\xi\|_\psi$.

Означення 2.2. Простір $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ будемо називати простором $\check{\mathbf{F}}_\psi(\Omega)$, якщо для функції $\psi(u)$ виконується умова

$$\sup_{u\geq 1}\frac{\psi(u+v)}{\psi(u)}<\infty, \tag{3}$$

де $v>0$.

Зрозуміло, що умова (3) виконується для функцій:
1) $\psi(u)=e^{au^\beta}$, де $0<\beta\leq 1$, $a>0$,
2) $\psi(u)=Au^\alpha$, де $\alpha>0$, $A>0$.

Означення 2.3. ([5, 4]) Додатньо монотонно неспадна послідовність $(\varkappa(n), n\geq 1)$ називається M-характеристикою (мажоруючою характеристикою) простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, якщо для будь-яких випадкових величин ξ_i, $i=1,2,\ldots,n$ з цього простору виконується нерівність

$$\left\|\max_{1\leq i\leq n}|\xi_i|\right\|_\psi\leq\varkappa(n)\max_{1\leq i\leq n}\|\xi_i\|_\psi\,. \tag{4}$$

Теорема 2.2. *Послідовність*

$$\varkappa(n)=\sup_{u\geq 1}\inf_{v>0}n^{\frac{1}{u+v}}\frac{\psi(u+v)}{\psi(u)} \tag{5}$$

є M-характеристикою (мажоруючою характеристикою) простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$.

Доведення. Нехай $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ випадкові величини з простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, тоді для будь-якого $v>0$ виконується наступна нерівність

$$\left\|\max_{1\leq i\leq n}|\xi_i|\right\|_\psi=\sup_{u\geq 1}\frac{\left(\mathsf{E}\left(\max_{1\leq i\leq n}|\xi_i|\right)^u\right)^{1/u}}{\psi(u)}\leq\sup_{u\geq 1}\frac{\left(\mathsf{E}\left(\max_{1\leq i\leq n}|\xi_i|\right)^{u+v}\right)^{\frac{1}{u+v}}}{\psi(u)}$$

$$\leq\sup_{u\geq 1}\max_{1\leq i\leq n}n^{\frac{1}{u+v}}\frac{\left(\mathsf{E}\,|\xi|^{u+v}\right)^{\frac{1}{u+v}}}{\psi(u+v)}\cdot\frac{\psi(u+v)}{\psi(u)}\leq\max_{1\leq i\leq n}\|\xi_i\|_\psi\sup_{u\geq 1}n^{\frac{1}{u+v}}\frac{\psi(u+v)}{\psi(u)}.$$

Оскільки в останній нерівності v - будь-яке число ($v>0$), то з (4) випливає твердження теореми. $\square$

Приклад 2.4. Для функції $\psi(u)=e^{u^2}$ мажоруюча характеристика дорівнює

$$\varkappa(n)=\exp\left\{\frac{3}{2^{2/3}}\left(\ln n\right)^{2/3}-1\right\}.$$

Використовуючи попередню теорему та знайшовши мінімум виразу $n^{\frac{1}{u+v}}e^{v^2+2uv}$, який набуває в точці $v=(\frac{1}{2}\ln n)^{1/3}-u$ і підставляючи в формулу (5), отримаємо шукане.

Для просторів $\check{\mathbf{F}}_\psi(\Omega)$ формулу для обчисислення мажоруючої характеристики $\varkappa(n)$ можна спростити.

Наслідок 2.1. *Послідовність*

$$\varkappa(n)=\inf_{v>0}z(v)n^{\frac{1}{v+1}}, \tag{6}$$

де $z(v)=\sup_{u\geq 1}\psi(u+v)/\psi(u)$ є мажоруючою характеристикою простору $\check{\mathbf{F}}_\psi(\Omega)$.

Доведення. Дійсно, з (5) випливає

$$\sup_{u\geq 1}\inf_{v>0}n^{\frac{1}{u+v}}\frac{\psi(u+v)}{\psi(u)}\leq\inf_{v>0}\sup_{u\geq 1}n^{\frac{1}{u+v}}\frac{\psi(u+v)}{\psi(u)}=\inf_{v>0}z(v)n^{\frac{1}{v+1}}.\quad\square$$

Приклад 2.5. Якщо $\psi(u) = e^{au}$, де $a \neq 0$, то мажоруюча характеристика дорівнює

$$\varkappa(n) = e^{2\sqrt{a \ln n} - a}.$$

Приклад 2.6. Якщо $\psi(u) = u^\alpha$, де $\alpha > 0$, то мажоруюча характеристика дорівнює

$$\varkappa(n) = (\ln n)^\alpha \left(\frac{e}{\alpha}\right)^\alpha.$$

Мажоруючі характеристики для прикладів (2.5) і (2.6) мають однаковий вигляд, якщо використовувати формули (5) або (6).

Означення 2.4. Нехай S_k монотонно зростаюча послідовність ($S_k \geq 1$) і $S_k \to \infty$, коли $k \to \infty$. Розглянемо монотонно зростаючу неперервну функцію $\psi(u) > 0$, $u \geq 1$, така що $\psi(u) \to \infty$ коли $u \to \infty$. Випадкова величина ξ належить простору $\mathbf{F}_{S_k,\psi,r}(\Omega)$, якщо виконується умова

$$\sup_{k \geq r} \frac{\left(\mathsf{E}\,|\xi|^{S_k}\right)^{1/S_k}}{\psi(S_k)} < \infty.$$

Як і в попередньому випадку, легко довести, що простори $\mathbf{F}_{S_k,\psi,r}(\Omega)$ є просторами Банаха з нормами

$$\|\xi\|_{S_k,\psi,r} = \sup_{k \geq r} \frac{\left(\mathsf{E}\,|\xi|^{S_k}\right)^{1/S_k}}{\psi(S_k)}. \tag{7}$$

Теорема 2.3. *Якщо для функції ψ виконується умова (3) і існує $C_r > 0$ та справедливо*

$$\frac{\psi(S_k)}{\psi(S_{k-1})} \leq C_r, \qquad k \geq r,$$

то простори $\mathbf{F}_{S_k,\psi,r}(\Omega)$ містять ті ж самі елементи, що і простори $\check{\mathbf{F}}_\psi(\Omega)$, а норми (1) і (7) еквівалентні.

Доведення. Дійсно,

$$\|\xi\|_{S_k,\psi,r} \leq \|\xi\|_\psi.$$

З другого боку з нерівності Ляпунова при $S_{k-1} \leq u \leq S_k$, де $k - 1 \geq r$ справедливо, що

$$\begin{aligned}
\frac{\left(\mathsf{E}\,|\xi|^u\right)^{1/u}}{\psi(u)} &\leq \frac{\left(\mathsf{E}\,|\xi|^{S_k}\right)^{1/S_k}}{\psi(u)} = \frac{\left(\mathsf{E}\,|\xi|^{S_k}\right)^{1/S_k}}{\psi(S_k)} \cdot \frac{\psi(S_k)}{\psi(u)} \\
&\leq \|\xi\|_{S_k,\psi,r} \cdot \frac{\psi(S_k)}{\psi(u)} \leq \|\xi\|_{S_k,\psi,r} \cdot \frac{\psi(S_k)}{\psi(S_{k-1})} \leq C_r \|\xi\|_{S_k,\psi,r}.
\end{aligned}$$

При $1 \leq u \leq S_r$ маємо, що

$$\frac{\left(\mathsf{E}\,|\xi|^u\right)^{1/u}}{\psi(u)} \leq \frac{\left(\mathsf{E}\,|\xi|^{S_r}\right)^{1/S_r}}{\psi(S_r)} \cdot \frac{\psi(S_r)}{\psi(u)} \leq C_2 \|\xi\|_{S_k,\psi,r},$$

де $C_2 = \sup_{1 \leq u \leq S_r} \psi(S_r)/\psi(u)$, тоді

$$\|\xi\|_\psi \leq \max(C_2, C_r) \|\xi\|_{S_k,\psi,r}. \quad \square$$

Зауваження 2.2. Якщо умова теореми не виконується, то твердження теореми може бути невірним.

З просторів $\mathbf{F}_{S_k,\psi,r}(\Omega)$ найбільш важливим для нас є простір, де $S_k = 2k$. Позначимо норму в цьому просторі

$$\theta_{2,r}(\xi) = \sup_{k\geq r} \frac{\left(\mathsf{E}\,|\xi|^{2k}\right)^{1/2k}}{\psi(2k)}.$$

Зрозуміло, що у випадках, коли для ψ виконується умова (3), то простори $\check{\mathbf{F}}_\psi(\Omega)$ та $\mathbf{F}_{2k,\psi,r}(\Omega)$ співпадають і норми в цих просторах еквівалентні.

Дійсно, згідно попередньої теореми маємо, що

$$\theta_{2,r}(\xi) \leq \|\xi\|_\psi . \tag{8}$$

Зауважимо, що

$$\sup_{k\geq r} \frac{\psi(2k)}{\psi(2k-2)} = \sup_{k\geq r} \frac{\psi(2k-2+2)}{\psi(2k-2)} \leq \sup_{u\geq r} \frac{\psi(u+2)}{\psi(u)} = \overline{\psi}_r < \infty,$$

тобто має місце

$$\|\xi\|_\psi \leq \overline{\psi}_r \theta_{2,r}(\xi). \tag{9}$$

Наступна теорема доводиться аналогічно теоремі 2.1.

Теорема 2.4. *Нехай випадкова величина ξ належить простору $\mathbf{F}_{S_k,\psi,r}(\Omega)$, то для будь-якого $x > 0$ виконується нерівність*

$$\mathsf{P}\{|\xi| > x\} \leq \inf_{k\geq r} \frac{\|\xi\|^{S_k}_{S_k,\psi,r} (\psi(S_k))^{S_k}}{x^{S_k}}. \tag{10}$$

Зокрема, при $S_k = 2k$ згідно попередньої теореми отримаємо

$$\mathsf{P}\{|\xi| > x\} \leq \inf_{k\geq r} \frac{\|\xi\|^{2k}_{2k,\psi,r} (\psi(2k))^{2k}}{x^{2k}}.$$

Теорема 2.5. *Послідовність*

$$\varkappa(n) = \sup_{k\geq r} \inf_{v>0} n^{\frac{1}{S_k+v}} \frac{\psi(S_k+v)}{\psi(S_k)} \tag{11}$$

є M-характеристикою (мажоруючою характеристикою) простору $\mathbf{F}_{S_k,\psi,r}(\Omega)$.

Доведення. Згідно з доведенням теореми 2.2 розглянемо випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ з простору $\mathbf{F}_{S_k,\psi,r}(\Omega)$, тоді для будь-якого $v > 0$ виконуються наступна нерівність

$$\begin{aligned}
\left\|\max_{1\leq i\leq n} |\xi_i|\right\|_{S_k,\psi,r} &= \sup_{k\geq r} \frac{\left(\mathsf{E}\left(\max_{1\leq i\leq n} |\xi_i|\right)^{S_k}\right)^{1/S_k}}{\psi(S_k)} \leq \sup_{k\geq r} \frac{\left(\mathsf{E}\left(\max_{1\leq i\leq n} |\xi_i|\right)^{S_k+v}\right)^{\frac{1}{S_k+v}}}{\psi(S_k)} \\
&\leq \sup_{k\geq r} \max_{1\leq i\leq n} n^{\frac{1}{S_k+v}} \frac{\left(\mathsf{E}\,|\xi|^{S_k+v}\right)^{\frac{1}{S_k+v}}}{\psi(S_k+v)} \cdot \frac{\psi(S_k+v)}{\psi(S_k)} \\
&\leq \max_{1\leq i\leq n} \|\xi_i\|_{S_k,\psi,r} \sup_{k\geq r} n^{\frac{1}{S_k+v}} \frac{\psi(S_k+v)}{\psi(S_k)}.
\end{aligned}$$

З останньої нерівності при $v > 0$ та з (4) випливає твердження теореми. $\square$

Приклади випадкових величин з просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$.

Приклад 2.7. Будь-яка випадкова величина, що $|\xi| < \mathrm{const}$ з ймовірністю 1 належить всім просторам $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$.

Приклад 2.8. Випадкова величина, що має розподіл Лапласа (щільність розподілу $p(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$) належить простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, де $\psi(u) = u$. Дійсно,

$$\sqrt[k]{\mathsf{E}\,|\xi|^k} = \sqrt[k]{k!} \sim k.$$

Приклад 2.9. Нормальна випадкова величина $\xi = N(0,1)$ належить просторам $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, де $\psi(u) = u^{1/2}$. Дійсно,

$$\sqrt[2l]{\mathsf{E}\,|\xi|^{2l}} = \sqrt[2l]{\frac{(2l)!}{2^l l!}} \sim l^{1/2}.$$

Означення 2.5. ([1]) Простір Банаха $B(\Omega)$ випадкових величин має властивість $\mathbf{H}$, якщо існує абсолютна константа C_B, що для будь-яких центрованих незалежних випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ з $B(\Omega)$ виконується умова

$$\left\|\sum_{i=1}^n \xi_i\right\|^2 \le C_B \sum_{i=1}^n \|\xi_i\|^2. \tag{12}$$

Знайдемо умови, за яких для просторів $\check{\mathbf{F}}_\psi(\Omega)$ виконується умова $\mathbf{H}$, а також значення константи C_B.

Теорема 2.6. *Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ незалежні центровані випадкові величини з простору $\check{\mathbf{F}}_\psi(\Omega)$. Тоді, якщо ξ_k — симетричні випадкові величини, де $k \ge \max(r, 2)$ і виконується умова*

$$C_{2k}^{2l} \frac{(\psi(2l))^{2l}\,(\psi(2k-2l))^{2k-2l}}{(\psi(2k))^{2k}} \le C_k^l, \qquad l = 1, \ldots, k-1, \tag{13}$$

то має місце нерівність

$$\theta_{2,r}^2\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right) \le \sum_{i=1}^n \theta_{2,r}^2(\xi_i). \tag{14}$$

Якщо відмовитись від умови симетричності, то за умови (13)*, виконується нерівність*

$$\theta_{2,r}^2\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right) \le 4\sum_{i=1}^n \theta_{2,r}^2(\xi_i). \tag{15}$$

Якщо ξ_i не симетричні і виконується умова

$$C_{2k}^{2l}\left(1 + \frac{k}{3}\right) \frac{(\psi(2l))^{2l}\,(\psi(2k-2l))^{2k-2l}}{(\psi(2k))^{2k}} \le C_k^l, \qquad l = 1, \ldots, k-1, \tag{16}$$

то маємо нерівність

$$\theta_{2,r}^2\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right) \le \sum_{i=1}^n \theta_{2,r}^2(\xi_i). \tag{17}$$

Для того щоб довести теорему, потрібно довести деякі додаткові твердження.

Лема 2.1. *Нехай ξ і η випадкові величини з простору $\check{\mathbf{F}}_\psi(\Omega)$. Якщо ξ і η незалежні та $\mathsf{E}\,\eta = 0$, то має місце нерівність:*

$$\|\xi\|_\psi \le \|\xi - \eta\|_\psi. \tag{18}$$

Доведення. З теореми Фубіні випливає, що при $u > 1$

$$\mathsf{E}\,|\xi - \eta|^u = \mathsf{E}_\xi\left(\mathsf{E}_\eta\,|\xi - \eta|^u\right), \tag{19}$$

де E_ξ — математичне сподівання відносно ξ, а E_η — математичне сподівання відносно η. З нерівності Ляпунова випливає, що при $u \ge 1$

$$\mathsf{E}_\eta\,|\xi - \eta|^u \ge (\mathsf{E}_\eta\,|\xi - \eta|)^u \ge |\mathsf{E}_\eta\,(\xi - \eta)|^u = |\xi - \mathsf{E}_\eta\,\eta|^u = |\xi|^u.$$

Отже, з (19) випливає, що

$$\mathsf{E}\,|\xi-\eta|^u \geq \mathsf{E}\,|\xi|^u \,.$$

З останньої нерівності очевидно випливає (18). □

Доведення теореми. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ симетричні, то всі непарні моменти дорівнюють нулю. Отже

$$\mathsf{E}\,(\xi_1+\xi_2)^{2k} = \mathsf{E}\,\xi_1^{2k} + \sum_{s=2}^{2k-2} C_{2k}^s\,\mathsf{E}\,\xi_1^s\xi_2^{2k-s} + \mathsf{E}\,\xi_2^{2k} = \mathsf{E}\,\xi_1^{2k} + \sum_{r=1}^{k-1} C_{2k}^{2r}\,\mathsf{E}\,\xi_1^{2r}\,\mathsf{E}\,\xi_2^{2k-2r} + \mathsf{E}\,\xi_2^{2k}.$$

Оскільки $\mathsf{E}\,|\xi_i|^{2k} \leq (\psi(2k))^{2k}\,\theta_{2,r}^{2k}\,(\xi_i)$, то

$$\begin{aligned}\frac{\mathsf{E}\,(\xi_1+\xi_2)^{2k}}{(\psi(2k))^{2k}} &\leq \theta_{2,r}^{2k}\,(\xi_1) + \sum_{r=1}^{k-1} C_{2k}^{2r}\,(\psi(2r))^{2r}\,(\psi(2k-2r))^{2k-2r}\,\frac{\theta_{2,r}^{2r}\,(\xi_1)\,\theta_{2,r}^{2k-2r}\,(\xi_2)}{(\psi(2k))^{2k}} \\ &\quad + \theta_{2,r}^{2k}\,(\xi_2) \\ &\leq \theta_{2,r}^{2k}\,(\xi_1) + \sum_{r=1}^{k-1} C_k^r \theta_{2,r}^{2r}\,(\xi_1)\,\theta_{2,r}^{2k-2r}\,(\xi_2) + \theta_{2,r}^{2k}\,(\xi_2) \\ &= \left(\theta_{2,r}^2\,(\xi_1) + \theta_{2,r}^2\,(\xi_2)\right)^k .\end{aligned}$$

З останньої нерівності випливає (14) при $n=2$.

Нехай тепер $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ незалежні центровані випадкові величини з простору $\check{\mathbf{F}}_\psi(\Omega)$, а $\xi_1^*, \xi_2^*, \ldots, \xi_n^*$ не залежать від ξ_i $(i=1,\ldots,n)$, незалежні випадкові величини, що мають такий же розподіл як і ξ_i. Випадкові величини $\xi_i - \xi_i^*$ симетричні. З Леми (2.1) випливає, що

$$\begin{aligned}\theta_{2,r}^2\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right) \leq \theta_{2,r}^2\left(\sum_{i=1}^n (\xi_i-\xi_i^*)\right) &\leq \sum_{i=1}^n \theta_{2,r}^2\,(\xi_i-\xi_i^*) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left(\theta_{2,r}(\xi_i)+\theta_{2,r}(\xi_i^*)\right)^2 = 4\sum_{i=1}^n \theta_{2,r}^2\,(\xi_i)\,,\end{aligned}$$

де $\theta_{2,r}\,(\xi_i) = \theta_{2,r}\,(\xi_i^*)$. Нерівність (15) доведена.

Нерівність (17) доводиться аналогічно як і (14). Оскільки

$$\mathsf{E}\,(\xi_1+\xi_2)^{2k} = \mathsf{E}\,\xi_1^{2k} + \sum_{s=2}^{2k-2} C_{2k}^s\,\mathsf{E}\,\xi_1^s\xi_2^{2k-s} + \mathsf{E}\,\xi_2^{2k}$$

і при парному s

$$\left|\mathsf{E}\,\xi_1^k\xi_2^{2k-s}\right| \leq \frac{1}{2}\left(\mathsf{E}\,|\xi_1|^{s+1}\,\mathsf{E}\,|\xi_2|^{2k-s-1} + \mathsf{E}\,|\xi_1|^{s-1}\,\mathsf{E}\,|\xi_2|^{2k-s+1}\right),$$

то

$$\mathsf{E}\,(\xi_1+\xi_2)^{2k} \leq \mathsf{E}\,|\xi_1|^{2k} + \sum_{l=1}^{k-1} R_{2k}^{2l}\,\mathsf{E}\,|\xi_1|^{2l}\,\mathsf{E}\,|\xi_2|^{2k-2l} + \mathsf{E}\,|\xi_2|^{2k}\,,$$

де $R_{2k}^2 = R_{2k}^{2k-2} = C_{2k}^2 + \frac{1}{2}C_{2k}^3$, $R_{2k}^{2l} = C_{2k}^{2l} + \frac{1}{2}\left(C_{2k}^{2l+1} + C_{2k}^{2l-1}\right)$, $l \neq 1$, $l \neq k-1$. Легко показати, що $R_{2k}^{2l} \le \left(1+\frac{k}{3}\right)C_{2k}^{2l}$. Таким чином, справедлива нерівність

$$\begin{aligned}
C_{2k}\,\mathsf{E}\,(\xi_1+\xi_2)^{2k} &\le \frac{\mathsf{E}\,|\xi_1|^{2k}}{(\psi(2k))^{2k}} \\
&\quad + \sum_{l=1}^{k-1} C_{2k}^{2l}\left(1+\frac{k}{3}\right)\frac{(\psi(2l))^{2l}\,(\psi(2k-2l))^{2k-2l}}{(\psi(2k))^{2k}}\left(\frac{\mathsf{E}\,|\xi_1|^{2l}}{(\psi(2l))^{2l}}\right) \\
&\quad\quad \times\left(\frac{\mathsf{E}\,|\xi_2|^{2k-2l}}{(\psi(2k-2l))^{2k-2l}}\right) \\
&\quad + \frac{\mathsf{E}\,|\xi_2|^{2k}}{(\psi(2k))^{2k}} \\
&\le \theta_{2,r}^{2k}(\xi_1) + \sum_{l=1}^{k-1} C_k^l\,\theta_{2,r}^{2l}(\xi_1)\,\theta_{2,r}^{2k-2l}(\xi_2) + \theta_{2,r}^{2k}(\xi_2) \\
&= \left(\theta_{2,r}^2(\xi_1) + \theta_{2,r}^2(\xi_2)\right)^k.
\end{aligned}$$

З останньої нерівності випливає (14) при $n=2$ і твердження теореми. □

З теореми (2.6) та нерівностей (8) і (9) випливає такий наслідок.

Наслідок 2.2. *Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ незалежні центровані випадкові величини з простору $\check{\mathbf{F}}_\psi(\Omega)$. Тоді, якщо ξ_k — симетричні випадкові величини, де $k \ge \max(r,2)$ і виконується умова*

$$C_{2k}^{2l}\frac{(\psi(2l))^{2l}\,(\psi(2k-2l))^{2k-2l}}{(\psi(2k))^{2k}} \le C_k^l, \qquad l = 1,\ldots,k-1,$$

то має місце нерівність

$$\left\|\sum_{i=1}^n \xi_i\right\|_\psi^2 \le \overline{\psi}_r^2 \sum_{i=1}^n \|\xi_i\|_\psi^2.$$

Якщо відмовитись від умови симетричності, то за умови (13), *виконується нерівність*

$$\left\|\sum_{i=1}^n \xi_i\right\|_\psi^2 \le 4\overline{\psi}_r^2 \sum_{i=1}^n \|\xi_i\|_\psi^2.$$

Якщо ξ_i не симетричні і виконується умова

$$C_{2k}^{2l}\left(1+\frac{k}{3}\right)\frac{(\psi(2l))^{2l}\,(\psi(2k-2l))^{2k-2l}}{(\psi(2k))^{2k}} \le C_k^l, \qquad l = 1,\ldots,k-1,$$

то маємо нерівність

$$\left\|\sum_{i=1}^n \xi_i\right\|_\psi^2 \le \overline{\psi}_r^2 \sum_{i=1}^n \|\xi_i\|_\psi^2.$$

Розглянемо приклади просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, для яких виконуються попередні теореми.

Лема 2.2. *Має місце нерівність*

$$C_{2k}^{2l} \le C_k^l \frac{k^k}{l^l(k-l)^{k-l}}\frac{1}{\sqrt{2}}\exp\left\{\frac{1}{8}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k-1}+1\right)\right\},$$

при $k \ge 2$, $1 \le l \le k-1$.

Доведення. Розглянемо рівність

$$C_{2k}^{2l} = C_k^l \frac{C_{2k}^{2l}}{C_k^l}$$

та за формулою Стірлінга $n! = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} e^{\theta_n}$, де $|\theta_n| < \frac{1}{12n}$ отримаємо

$$\begin{aligned}\frac{C_{2k}^{2l}}{C_k^l} &= \frac{(2k)!l!(k-l)!}{(2l)!(2k-2l)!k!} = \frac{k^{2k} l^l (k-l)^{k-l}}{\sqrt{2} l^{2l} (k-l)^{2(k-l)} k^k} \exp\{\theta_{2k} + \theta_{2l} + \theta_k + \theta_l + \theta_{k-l}\} \\ &\le \frac{k^k}{l^l (k-l)^{k-l}} \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left\{\frac{1}{24k} + \frac{1}{24l} + \frac{1}{24(k-l)} + \frac{1}{12k} + \frac{1}{12l} + \frac{1}{12(k-l)}\right\} \\ &\le \frac{k^k}{l^l (k-l)^{k-l}} \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left\{\frac{1}{8}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + 1\right)\right\}. \qquad \square\end{aligned}$$

Приклад 2.10. Розглянемо простір $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, де $\psi(u) = u^\alpha$, $\alpha \ge \frac{1}{2}$, тоді покажемо, що в цьому випадку виконується умова. Дійсно,

$$\begin{aligned}C_{2k}^{2l} \frac{(2l)^{2l\alpha}(2k-2l)^{(2k-2l)\alpha}}{(2k)^{2k\alpha}} &= C_{2k}^{2l} \left(\frac{l^{2l}(k-l)^{(2k-2l)}}{k^{2k}}\right)^\alpha \\ &\le C_k^l \frac{l^{(2\alpha-1)l}(k-l)^{(2\alpha-1)(k-l)}}{k^{(2\alpha-1)k}} \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left\{\frac{1}{8}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + 1\right)\right\}.\end{aligned}$$

Очевидно, що при $\alpha \ge \frac{1}{2}$ і $k > 2$ має місце нерівність (13), тобто простір $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, де $\psi(u) = u^\alpha$ має властивість $\mathbf{H}$. Можна показати, що при $\alpha < \frac{1}{2}$ цей простір властивість $\mathbf{H}$ не має.

Приклад 2.11. З леми 2.2 випливає також, що простір $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, де $\psi(u) = e^{au}$, $a > 0$ також має властивість $\mathbf{H}$.

3. Зв'язок з просторами Орліча

Означення 3.1 ([4])**.** Парна неперервна опукла функція $U = (U(x), x \in \mathbb{R})$ називається $\mathcal{C}$-функцією, якщо $U(0) = 0$ і $U(x)$ монотонно зростає при $x > 0$.

Означення 3.2 ([4])**.** Нехай U довільна $\mathcal{C}$-функція. Простором Орліча випадкових величин $L_U(\Omega)$ називається така сім'я випадкових величин, що для кожної $\xi \in L_U(\Omega)$ існує така константа $r_\xi > 0$, що $\mathsf{E}\, U(\xi/r_\xi) < \infty$.

Простір Орліча $L_U(\Omega)$ є банаховим простором відносно норми

$$\|\xi\|_U = \inf\left\{r > 0; \mathsf{E}\, U\left(\frac{\xi}{r}\right) \le 1\right\},$$

яка називається нормою Люксембурга.

Розглянемо $\mathcal{C}$-функцію Орліча

$$U(x) = \begin{cases} \left(\frac{e\alpha}{2}\right)^{2/\alpha} x^2, & \text{якщо } |x| \le x_\alpha, \\ \exp\{|x|^\alpha\}, & \text{якщо } |x| > x_\alpha, \end{cases} \tag{20}$$

де $x_\alpha = (2/\alpha)^{1/\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. $L_U(\Omega)$ — простір Орліча, що породжений функцією $U(x)$.

Розглянемо функцію $U_1(x) = \exp\{|x|^\alpha\}$, $0 < \alpha \le 1$. Позначимо $\mathcal{S}_{U_1}(\Omega)$ — це сім'я ξ для яких існує r, що виконується $\mathsf{E}\, U_1\left(\frac{\xi}{r}\right) < \infty$. Введемо на $\mathcal{S}_{U_1}(\Omega)$ функціонал

$$\langle\langle \xi \rangle\rangle_{U_1} = \inf\left\{r > 0; \mathsf{E}\, U_1\left(\frac{\xi}{r}\right) \le 2\right\}.$$

Лема 3.1. *Для того, щоб $\xi \in L_U(\Omega)$ необхідно та достатньо, щоб $\xi \in \mathcal{S}_{U_1}(\Omega)$ та справджувалися нерівності*

$$\|\xi\|_U \le \left(e^{2/\alpha+2}\right) \langle\langle \xi \rangle\rangle_{U_1},$$

$$\langle\langle \xi \rangle\rangle_{U_1} \le \|\xi\|_U \left(e^{2/\alpha}+1\right)^{1/\alpha}.$$

Доведення. Нехай $r > 0$, то

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\, U\left(\frac{\xi}{r}\right) &= \mathsf{E}\, U\left(\frac{\xi}{r}\right) \mathbb{I}\left\{\frac{|\xi|}{r} \le x_\alpha\right\} + \mathsf{E}\, U\left(\frac{\xi}{r}\right) \mathbb{I}\left\{\frac{|\xi|}{r} > x_\alpha\right\} \\ &\le U(x_\alpha) + \mathsf{E} \exp\left\{\left|\frac{\xi}{r}\right|^\alpha\right\} = e^{2/\alpha} + \mathsf{E}\exp\left\{\left|\frac{\xi}{r}\right|^\alpha\right\} \end{aligned}$$

Нехай тепер $r = \langle\langle \xi \rangle\rangle_{U_1}$, тоді $\mathsf{E}\, U(\xi/\langle\langle \xi \rangle\rangle_{U_1}) \le e^{2/\alpha}+2$. Оскільки при $0 < \alpha < 1$ справджується нерівність $U(\alpha x) \le \alpha U(x)$ з книги [4, лема 2.2.2], то

$$\mathsf{E}\, U\left(\frac{\xi}{\langle\langle \xi \rangle\rangle_{U_1}(e^{2\alpha}+2)}\right) \le \frac{1}{e^{2\alpha}+2}\, \mathsf{E}\, U\left(\frac{\xi}{\langle\langle \xi \rangle\rangle_{U_1}}\right) \le 1$$

Отже,

$$\|\xi\|_U \le \left(e^{2/\alpha+2}\right) \langle\langle \xi \rangle\rangle_{U_1}. \tag{21}$$

Отримаємо другу нерівність. Легко бачити, що

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\exp\left\{\left|\frac{\xi}{r}\right|^\alpha\right\} &= \mathsf{E}\exp\left\{\left|\frac{\xi}{r}\right|^\alpha\right\} \mathbb{I}\left\{\frac{|\xi|}{r} < x_\alpha\right\} + \mathsf{E}\exp\left\{\left|\frac{\xi}{r}\right|^\alpha\right\} \mathbb{I}\left\{\frac{|\xi|}{r} \ge x_\alpha\right\} \\ &\le \exp\{(x_\alpha)^\alpha\} + \mathsf{E}\, U\left(\frac{\xi}{r}\right). \end{aligned}$$

Якщо покласти $r = \|\xi\|_U$, то маємо

$$\mathsf{E}\exp\left\{\left|\frac{\xi}{\|\xi\|_U}\right|^\alpha\right\} \le e^{2/\alpha}+1. \tag{22}$$

Використовуючи нерівність, коли $0 < a \le 1$, що $\exp\{|ax|\} - 1 \le a(\exp\{|x|\} - 1)$ маємо

$$\mathsf{E}\exp\left\{\left|\frac{\xi}{\|\xi\|_U}\right|^\alpha \frac{1}{e^{2/\alpha}+1}\right\} - 1 \le \frac{1}{e^{2/\alpha}+1}\left(\mathsf{E}\exp\left\{\left|\frac{\xi}{\|\xi\|_U}\right|^\alpha\right\} - 1\right).$$

Отже з (22) випливає, що

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\exp\left\{\left|\frac{\xi}{\|\xi\|_U}\right|^\alpha \frac{1}{e^{2/\alpha}+1}\right\} - 1 &\le \frac{1}{e^{2/\alpha}+1}\left(\mathsf{E}\exp\left\{\left|\frac{\xi}{\|\xi\|_U}\right|^\alpha\right\} - 1\right) \\ &\le \frac{1}{e^{2/\alpha}+1}\left(e^{2/\alpha}+1-1\right) = \frac{e^{2/\alpha}}{e^{2/\alpha}+1}. \end{aligned}$$

Отримали

$$\mathsf{E}\exp\left\{\left|\frac{\xi}{\|\xi\|_U \left(e^{2/\alpha}+1\right)^{1/\alpha}}\right|^\alpha\right\} \le \frac{e^{2/\alpha}}{e^{2/\alpha}+1} + 1 \le 2.$$

З цього випливає, що $\langle\langle \xi \rangle\rangle_{U_1} \le \|\xi\|_U \left(e^{2/\alpha}+1\right)^{1/\alpha}$. □

Лема 3.2. *Справджується нерівність*

$$\langle\langle \xi \rangle\rangle_{U_1} \ge \alpha^{1/\alpha} e^{1/\alpha} \left(\sup_{n\ge 1} \frac{\left(\mathsf{E}\,|\xi|^n\right)^{1/n}}{n^{1/\alpha}}\right),$$

при $0 < \alpha < 1$.

Доведення. Справедливі нерівності

$$x^n \exp\{-x^\alpha\} \le \left(\frac{n}{\alpha}\right)^{n/\alpha} \exp\left\{-\frac{n}{\alpha}\right\},$$
$$x^n \le \exp\{x^\alpha\} \left(\frac{n}{\alpha}\right)^{n/\alpha} \exp\left\{-\frac{n}{\alpha}\right\}.$$

Отже,

$$\frac{\mathsf{E}\,|\xi|^n}{r^n} \le \mathsf{E}\exp\left\{\left(\frac{|\xi|}{r}\right)^\alpha\right\} \left(\frac{n}{\alpha}\right)^{n/\alpha} \exp\left\{-\frac{n}{\alpha}\right\},$$
$$\mathsf{E}\,|\xi|^n \le \langle\langle\xi\rangle\rangle_{U_1}^n 2 \left(\frac{n}{\alpha}\right)^{n/\alpha} \exp\left\{-\frac{n}{\alpha}\right\},$$
$$\left(\mathsf{E}\,|\xi|^n\right)^{1/n} \le \langle\langle\xi\rangle\rangle_{U_1} 2^{1/n} \left(\frac{n}{\alpha}\right)^{1/\alpha} \exp\left\{-\frac{1}{\alpha}\right\}.$$

Оскільки $\langle\langle\xi\rangle\rangle_{U_1} = \inf\{r > 0; \mathsf{E}\exp\{(\xi/r)^\alpha\}\} \le 2$, то

$$\langle\langle\xi\rangle\rangle_{U_1} \ge \left(\mathsf{E}\,|\xi|^n\right)^{1/n} \frac{1}{2^{1/n}\left(\frac{n}{\alpha}\right)^{1/\alpha} \exp\left\{-\frac{1}{\alpha}\right\}} \ge \frac{\left(\mathsf{E}\,|\xi|^n\right)^{1/n}}{n^{1/\alpha}} \alpha^{1/\alpha} e^{1/\alpha}. \quad \square$$

Лема 3.3. *Справджується нерівність*

$$\langle\langle\xi\rangle\rangle_{U_1} \le \left(1 + \frac{e^{1/12}}{\sqrt{2\pi}}\right)^{1/\alpha} e^{1/\alpha} \left(\sup_{n\ge1} \frac{\left(\mathsf{E}\,|\xi|^n\right)^{1/n}}{n^{1/\alpha}}\right),$$

при $0 < \alpha < 1$.

Доведення. З нерівності Ляпунова випливає, що при $0 < \alpha < 1$ має місце нерівність

$$\mathsf{E}\,|\xi|^{n\alpha} \le \left(\mathsf{E}\,|\xi|^n\right)^\alpha.$$

Позначимо $J_\alpha = \mathsf{E}\exp\{|\xi|^\alpha / r^\alpha\} - 1$. Отже,

$$J_\alpha = \sum_{n=1}^\infty \frac{\mathsf{E}\,|\xi|^{n\alpha}}{n! r^{\alpha n}} \le \sum_{n=1}^\infty \frac{\left(\mathsf{E}\,|\xi|^n\right)^\alpha}{n! r^{\alpha n}}.$$

Нехай $\hat{z} = \sup_{n\ge1} \left(\mathsf{E}\,|\xi|^n\right)^{1/n} / n^{1/\alpha}$. Оскільки $\mathsf{E}\,|\xi|^n \le \hat{z}^n n^{n/\alpha}$, то

$$J_\alpha \le \sum_{n=1}^\infty \frac{\hat{z}^{n\alpha} n^n}{n!\, r^{\alpha n}}.$$

З формули Стірлінга випливає, що

$$J_\alpha \le \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{\hat{z}^\alpha e}{r^\alpha}\right)^n \frac{e^{1/12n}}{\sqrt{2\pi n}} \le \frac{e^{1/12}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{\hat{z}^\alpha e}{r^\alpha}\right)^n.$$

Покладемо $r = \frac{1}{s^{1/\alpha}} \hat{z} e^{1/\alpha}$, де $0 < s < 1$, тоді

$$J_\alpha \le \frac{e^{1/12}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^\infty s^n = \frac{e^{1/12}}{\sqrt{2\pi}} \frac{s}{1-s}.$$

Якщо покласти $s = \left(1 + e^{1/12}/\sqrt{2\pi}\right)^{-1}$, то отримаємо

$$\mathsf{E}\exp\left\{\frac{|\xi|^\alpha}{\left(\frac{1}{s^{1/\alpha}} \hat{z} e^{1/\alpha}\right)^\alpha}\right\} \le 2.$$

Отже, виконується твердження леми. $\square$

Теорема 3.1. *Простори Орліча $L_U(\Omega)$, де функція $U(x)$ задана як (20) містять ті ж самі елементи, що і простори $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, де $\psi(u) = u^{1/\alpha}$, причому норми в цих просторах еквівалентні.*

Теорема випливає з лем 3.1, 3.2 і 3.3 та теореми 2.3.

Інші випадки еквівалентності просторів Орліча і $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ розглянуто в книжці [4] і в роботі [6].

4. Випадкові процеси

Означення 4.1. Нехай $\mathbf{F}^*_\psi(\Omega)$ — це один з просторів Банаха випадкових величин $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, $\check{\mathbf{F}}_\psi(\Omega)$ або $\mathbf{F}_{S_k,\psi}(\Omega)$. Норму в цих просторах будемо позначати $\|\cdot\|$.

Нехай $X = \{X(t), t \in \mathbf{T}\}$ — випадковий процес, $\mathbf{T} = (\mathbf{T}, \rho)$ — компактний метричний простір, ρ — метрика. Розглянемо $N(u)$ — метричну масивність простору $(\mathbf{T}, \rho)$ і $\gamma = \sigma\left(\sup_{t,s\in\mathbf{T}} \rho(t,s)\right)$, то $\varepsilon_k = \sigma^{(-1)}\left(\gamma p^k\right)$, де $k = 0, 1, 2, \dots$, а $p \in (0,1)$. $\mathbf{V}_{\varepsilon_k}$ — множина центрів замкнених куль радіуса не більше ε_k, що покривають $(\mathbf{T}, \rho)$ причому число цих куль мінімальне (мінімальна ε_k сітка), тобто $\mathbf{V} = \bigcup_{k=0}^\infty \mathbf{V}_{\varepsilon_k}$. Коли $k = 0$, то $\varepsilon_0 = \sigma^{(-1)}(\gamma) = \sigma^{(-1)}\left(\sigma\left(\sup_{t,s\in\mathbf{T}} \rho(t,s)\right)\right) = \sup_{t,s\in\mathbf{T}} \rho(t,s)$.

Означення 4.2. Випадковий процес $X \in \mathbf{F}^*_\psi(\Omega)$, якщо для всіх t випадкова величина $X(t) \in \mathbf{F}^*_\psi(\Omega)$.

Теорема 4.1. *Нехай $X(t)$ — сепарабельний процес на $(\mathbf{T}, \rho)$ з простору $\mathbf{F}^*_\psi(\Omega)$ і виконується умова*
$$\sup_{\rho(t,s)\le h} \|X(t) - X(s)\| \le \sigma(h),$$
де $\sigma(h)$ неперервна монотонно зростаюча функція, така що $\sigma(0) = 0$. Якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ виконується умова
$$\int_0^\varepsilon \varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right) du < \infty$$
та $\sup_{t\in\mathbf{T}} |X(t)| \in \mathbf{F}^*_\psi(\Omega)$, то
$$\left\|\sup_{t\in\mathbf{T}} |X(t)|\right\| \le B(p),$$
де
$$B(p) = \inf_{t\in\mathbf{T}} \|X(t)\| + \frac{1}{p(1-p)} \int_0^{\gamma p} \varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right) du,$$
де $\varkappa(n)$ — мажоруюча характеристика.

Доведення. При деякому $u > 1$ справедливо
$$\mathsf{P}\{|X(t) - X(s)| > \varepsilon\} \le \frac{\mathsf{E}|X(t) - X(s)|^u}{\varepsilon^u} \le \frac{\left\|X(t) - X(s)\right\|^u_{\mathbf{F}_\psi} (\psi(u))^u}{\varepsilon^u}$$
$$\le \frac{\sigma(\rho(t,s))(\psi(u))^u}{\varepsilon^u}.$$

При будь-якому $\varepsilon > 0$
$$\mathsf{P}\{|X(t) - X(s)| > \varepsilon\} \to 0 \quad \text{при } \rho(t,s) \to 0.$$

Отже, це процес неперервний за ймовірністю, тому $\mathbf{V}$ — сепаранта та
$$\sup_{t\in\mathbf{T}} |X(t)| = \sup_{t\in\mathbf{V}} |X(t)|.$$

Введемо відображення $\alpha_k(t)$, де $t \in \mathbf{V}$. $\alpha_k(t)$ — це точка з $\mathbf{V}_{\varepsilon_k}$, така що $\rho(t, \alpha_k(t)) \le \varepsilon_k$ (якщо $t \in \mathbf{V}_{\varepsilon_k}$ то $\alpha_k(t) = t$).

Нехай t — довільна точка з $\mathbf{V}$, тоді $t \in \mathbf{V}_{\varepsilon_m}$ (де m — деяке число). Тоді покладемо $t_m = t$, тоді $t_{m-1} = \alpha_{m-1}(t_m)$, $t_{m-2} = \alpha_{m-2}(t_{m-1})$, $\ldots$, $t_1 = \alpha_1(t_2)$, $t_0 = \alpha_0(t_1)$ і

$$\begin{aligned}X(t) &= X(t_m)\\ &= X(t_m) - X(t_{m-1}) + X(t_{m-1}) - X(t_{m-2}) + X(t_{m-2}) - \ldots\\ &\quad - X(t_1) - X(t_0) + X(t_0),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|X(t)| &\le |X(t_m) - X(t_{m-1})| + |X(t_{m-1}) - X(t_{m-2})| + \cdots + |X(t_1) - X(t_0)| + |X(t_0)|\\ &\le \max_{t\in\mathbf{V}_{\varepsilon_m}} |X(t) - X(\alpha_{m-1}(t))| + \max_{t\in\mathbf{V}_{\varepsilon_m}} |X(t) - X(\alpha_{m-2}(t))| + \ldots\\ &\quad + \max_{t\in\mathbf{V}_{\varepsilon_m}} |X(t) - X(t_0)| + |X(t_0)|\,.\end{aligned}$$

Розглянемо

$$\begin{aligned}\sup_{t\in\mathbf{T}} |X(t)| = \sup_{t\in\mathbf{V}} |X(t)| &\le |X(t_0)| + \sum_{l=1}^{m} \max_{t\in\mathbf{V}_{\varepsilon_l}} |X(t) - X(\alpha_{l-1}(t))|\\ &\le |X(t_0)| + \sum_{l=1}^{\infty} \max_{t\in\mathbf{V}_{\varepsilon_l}} |X(t) - X(\alpha_{l-1}(t))|\,,\end{aligned}$$

то

$$\left\|\sup_{t\in\mathbf{T}} |X(t)|\right\| \le \|X(t_0)\| + \sum_{l=1}^{\infty} \left\|\max_{t\in\mathbf{V}_{\varepsilon_l}} |X(t) - X(\alpha_{l-1}(t))|\right\|,$$

тоді випливає, що

$$\begin{aligned}\left\|\sup_{t\in\mathbf{T}} |X(t)|\right\| &\le \inf_{t\in\mathbf{T}} \|X(t)\| + \sum_{l=1}^{\infty} \varkappa\left(N(\varepsilon_l)\right) \max_{t\in\mathbf{V}_{\varepsilon_l}} \|X(t) - X(\alpha_{l-1}(t))\|\\ &\le \inf_{t\in\mathbf{T}} \|X(t)\| + \sum_{l=1}^{\infty} \varkappa\left(N(\varepsilon_l)\right) \sigma(\varepsilon_l)\\ &\le \inf_{t\in\mathbf{T}} \|X(t)\| + \sum_{l=1}^{\infty} \varkappa\Big(N\left(\sigma^{(-1)}(\gamma p^k)\right)\Big) \gamma p^{k-1}.\end{aligned}$$

Оцінемо

$$\begin{aligned}\int_{\gamma p^{k+1}}^{\gamma p^k} \varkappa\Big(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\Big)\, du &\ge \varkappa\Big(N\left(\sigma^{(-1)}(\gamma p^k)\right)\Big) \left(\gamma p^k - \gamma p^{k+1}\right)\\ &= \varkappa\Big(N\left(\sigma^{(-1)}(\gamma p^k)\right)\Big) \gamma p^{k-1}(p - p^2)\end{aligned}$$

і отримаємо, що

$$\gamma p^k \varkappa\Big(N\left(\sigma^{(-1)}(\gamma p^k)\right)\Big) \le \frac{\int_{\gamma p^{k+1}}^{\gamma p^k} \varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right) du}{p(1-p)},$$

то підставляючи в попередню нерівність, отримаємо

$$\begin{aligned}\left\|\sup_{t\in\mathbf{T}} |X(t)|\right\| &\le \inf_{t\in\mathbf{T}} \|X(t)\| + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{p(1-p)} \int_{\gamma p^{l+1}}^{\gamma p^l} \varkappa\Big(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\Big)\, du\\ &= \inf_{t\in\mathbf{T}} \|X(t)\| + \frac{1}{p(1-p)} \int_0^{\gamma p} \varkappa\Big(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\Big)\, du. \quad \square\end{aligned}$$

Наслідок 4.1. *Нехай $X = \{X(t), t \in \mathbf{T}\}$ — випадковий процес і $\sup_{t\in\mathbf{T}} |X(t)| \in \mathbf{F}_\psi^*(\Omega)$, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ виконується нерівність*

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{t\in\mathbf{T}} |X(t)| > \varepsilon\right\} \le \inf_{u\ge 1} \frac{B^u(p)(\psi(u))^u}{\varepsilon^u}.$$

Приклад 4.1. Якщо $\psi(u) = u^\alpha$, то

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{t\in\mathbf{T}}|X(t)| > x\right\} \le \exp\left\{-\frac{\alpha}{e}\left(\frac{x}{B(p)}\right)^{1/\alpha}\right\}.$$

Приклад 4.2. Якщо $\psi(u) = e^{au}$, де $a > 0$, то

$$\mathsf{P}\{|\xi| > x\} \le \exp\left\{-\frac{\left(\ln\frac{x}{B(p)}\right)^2}{4a}\right\},$$

коли $x \ge B(p)$.

Приклад 4.3. Якщо $\psi(u) = e^{u^2}$, то

$$\mathsf{P}\left\{|\xi| > x\right\} \le \exp\left\{-\frac{2\left(\ln\frac{x}{B(p)}\right)^{3/2}}{3^{3/2}}\right\},$$

коли $x \ge B(p)$.

Наслідок 4.2. *Нехай $X = \{X(t), t \in [0,T]\}$, де $T > 0$ сепарабельний процес з простору $\mathbf{F}^*_\psi(\Omega)$. Нехай виконується умова*

$$\sup_{|t-s|\le h}\big\|X(t) - X(s)\big\| \le \sigma(h), \tag{23}$$

де $\sigma = \{\sigma(h), h > 0\}$ — неперервна монотонно зростаюча функція, така що $\sigma(0) = 0$. Для будь-якого $z > 0$ виконується умова

$$\int_0^z \varkappa\left(\frac{T}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1\right)du < \infty$$

тоді з ймовірністю одиниця $\sup_{t\in[0,T]}|X(t)| \in \mathbf{F}^*_\psi(\Omega)$, та для будь-якого $0 < p < 1$ справджується нерівність

$$\left\|\sup_{t\in[0,T]}|X(t)|\right\| \le \widetilde{B}(p), \tag{24}$$

де

$$\widetilde{B}(p) = \inf_{t\in[0,T]}\|X(t)\| + \frac{1}{p(1-p)}\int_0^{\gamma p}\varkappa\left(\frac{T}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1\right)du,$$

$\gamma = \sigma(T)$. Крім того, для будь-якого $\varepsilon > 0$ справедливо

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{t\in[0,T]}|X(t)| > \varepsilon\right\} \le \inf_{u\ge 1}\frac{\widetilde{B}^u(p)(\psi(u))^u}{\varepsilon^u}. \tag{25}$$

Доведення. Наслідок випливає з теореми 4.1. Оскільки метрична масивність інтервалу $[0,T]$ оцінюється у такий спосіб

$$N(u) \le \frac{T}{2u} + 1. \quad \square$$

Наслідок 4.3. *Нехай $X = \{X(t), t \in [0,T]\}$, де $T > 0$ сепарабельний процес з простору $\mathbf{F}^*_\psi(\Omega)$. Нехай для деякого $\beta < 1$ виконується умова*

$$\sup_{|t-s|\le h}\big\|X(t) - X(s)\big\| \le \frac{C}{\left(\varkappa\left(\frac{T}{2h} + 1\right)\right)^{1/\beta}}. \tag{26}$$

Тоді з ймовірністю одиниця $\sup_{t\in[0,T]}|X(t)| \in \mathbf{F}_\psi^*(\Omega)$ *та справджується нерівність*

$$\left\|\sup_{t\in[0,T]}|X(t)|\right\| \le \inf_{t\in[0,T]}\|X(t)\| + \frac{C^\beta}{(1-\beta)}\left(\frac{C^\beta}{\varkappa\left(\frac{3}{2}\right)}\right)^{(1-\beta)/\beta}\frac{(1+\beta)^{\beta+1}}{\beta^\beta} = \widetilde{B}.$$

Крім того, для будь-якого $\varepsilon > 0$ *справедливо*

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{t\in[0,T]}|X(t)| > \varepsilon\right\} \le \inf_{u\ge 1}\frac{\widetilde{B}^u(\psi(u))^u}{\varepsilon^u}. \tag{27}$$

Доведення. Наше твердження випливає з попереднього наслідку. Дійсно,

$$\sigma(h) = \frac{C}{\left(\varkappa\left(\frac{T}{2h}+1\right)\right)^{1/\beta}},$$

то легко бачити, що

$$\frac{1}{p(1-p)}\int_0^{\gamma p}\varkappa\left(\frac{T}{2\sigma^{(-1)}(u)}+1\right)du = \frac{1}{p(1-p)}\int_0^{\gamma p}\frac{C^\beta}{u^\beta}\,du = \frac{C^\beta}{1-\beta}\gamma^{1-\beta}\frac{1}{(1-p)p^\beta}.$$

Якщо цей вираз мінімізувати по p, то з нерівності (24) отримаємо наше твердження. □

Позначимо

$$B(\beta) = \frac{C^\beta}{(1-\beta)}\left(\frac{C^\beta}{\varkappa\left(\frac{3}{2}\right)}\right)^{(1-\beta)/\beta}\frac{(1+\beta)^{\beta+1}}{\beta^\beta}.$$

Приклад 4.4. Розглянемо простір $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ і $\psi(u) = u^\alpha$ і покладемо

$$\sigma(h) = \frac{C}{\left(\ln\left(\frac{T}{2h}+1\right)\frac{e}{\alpha}\right)^{\alpha/\beta}},$$

тоді

$$\left\|\sup_{t\in[0,T]}|X(t)|\right\| \le \inf_{0\le t\le T}\sup_{u\ge 1}\frac{\left(\mathsf{E}\,|X(t)|^u\right)^{1/u}}{u^\alpha} + B(\beta) = B_{u^\alpha}.$$

І для будь-якого $\varepsilon > 0$ справедливо

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{t\in[0,T]}|X(t)| > \varepsilon\right\} \le \exp\left\{-\frac{\alpha}{e}\left(\frac{x}{B_{u^\alpha}}\right)^{1/\alpha}\right\}$$

Приклад 4.5. Розглянемо простір $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ і $\psi(u) = e^{au}$, де $a > 0$ і покладемо

$$\sigma(h) = \frac{C}{\exp\left\{\left(2\sqrt{a\ln\left(\frac{T}{2h}+1\right)}-a\right)\frac{1}{\beta}\right\}}$$

і

$$\left\|\sup_{t\in[0,T]}|X(t)|\right\| \le \inf_{0\le t\le T}\sup_{u\ge 1}\frac{\left(\mathsf{E}\,|X(t)|^u\right)^{1/u}}{e^{au}} + B(\beta) = B_{e^{au}}.$$

І для будь-якого $\varepsilon > 0$ справедливо

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{t\in[0,T]}|X(t)| > \varepsilon\right\} \le \exp\left\{-\frac{\left(\ln\frac{x}{B_{e^{au}}}\right)^2}{4a}\right\}.$$

5. Висновки

В роботі вивчаються властивості випадкових величин та процесів з просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$. Надалі планується публікація, де результати цієї роботи використовуються для вивчення методів Монте-Карло і підрахунку кратних інтегралів із заданою точністю.

Література

1. Yu. V. Kozachenko and Yu. Yu. Mlavets, *Probability of large deviations of sums of random processes from Orlicz space*, Monte Carlo Methods Appl. **17** (2011), no. 17, 155–168.
2. O. Kurbanmuradov and K. Sabelfeld, *Exponential bounds for the probability deviations of sums of random fields*, Monte Carlo Methods Appl. **12** (2006), no. 3–4, 211–229.
3. С. В. Ермаков, Е. И. Островский, *Условия непрерывности, экспоненциальные оценки и центральная предельная теорема для случайных полей*, Деп. в ВИНИТИ №3752-В.86.0., 1986.
4. V. V. Buldygin and Yu. V. Kozachenko, *Metric Characterization of Random Variables and Random Processes*, AMS, Providence, RI, 2000.
5. E. A. Abzhanov and Yu. V. Kozachenko, *Some properties of random processes in Banach K_σ-spaces*, Ukrain. Math. J. **37** (1985), no. 3, 275–280.
6. Yu. V. Kozachenko and E. I. Ostrovskij, *Banach spaces of random variables of subgaussian type*, Theory Probab. Math. Statist. **32** (1985), 45–56.

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, проспект Глушкова, 6, Київ 03127, Україна

Адреса електронної пошти: `ykoz@ukr.net`

Кафедра кібернетики і прикладної математики, математичний факультет, Державний вищий навчальний заклад "Ужгородський національний університет", вул. Університетська, 14, Ужгород 88000, Україна

Адреса електронної пошти: `yura-mlavec@ukr.net`

Надійшла 17/11/2011