Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 86, 2012, стор. 138–149

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 86, 2012, pp. 138–149

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОЇ ЗУПИНКИ ВИПАДКОВИХ БЛУКАНЬ З ПОЛІНОМІАЛЬНИМИ ФУНКЦІЯМИ ВИПЛАТ

УДК 519.21

Ю. С. МІШУРА І В. В. ТОМАШИК

Анотація. В роботі досліджується задача оптимальної зупинки випадкового блукання зі зносом вліво та поліномальною функцією виплат. Встановлено явний вигляд моментів оптимальної зупинки. Використовується техніка поліномів Аппеля.

Abstract. An optimal stopping problem for random walk with the drift to the left and with polynomial reward function is studied using the Appel polynomials. An explicit form of optimal stopping times is obtained.

Аннотация. В работе исследуется проблема оптимальной остановки случайного блуждания со сносом влево и полиномиальной функцией выплат. Получен явный вид моментов оптимальной остановки. Используется техника полиномов Аппеля.

1. Вступ

Актуальність проблеми оптимальної зупинки випадкового процесу зумовлена можливістю застосування її результатів до моделювання оптимальної поведінки фінансових інвесторів на фондових ринках.

Класичний підхід до розв'язання задачі оптимальної зупинки включає використання ексцесивних функцій та відшукання так званої опорної множини, що визначає явний вигляд моменту оптимальної зупинки [1, 2, 3].

В даній роботі використовується альтернативний підхід до розв'язання задачі оптимальної зупинки, що включає використання поліномів Аппеля [4, 5]. Роботу присвячено поширенню результатів, отриманих в [4] та продовженню досліджень, проведених в [6].

Нехай $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots$ — послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин, заданих на ймовірнісному просторі $(\Omega, \Im, \mathsf{P})$ і таких, що $\mathsf{E}\,\xi < 0$. Пов'яжемо з даною послідовністю однорідний ланцюг Маркова $X = (X_1, X_2, X_3, \dots)$ такий, що

$$X_0 = x \in \mathbf{R}, \qquad X_k = x + S_k, \qquad S_0 = 0, \qquad S_k = \sum_{i=1}^{k} \xi_i, \qquad k \geq 1.$$

Через P_x позначимо розподіл ймовірностей, що відповідає процесу X. Таким чином, P_x, $x \in \mathbf{R}$, разом з X задають марковську сім'ю відносно фільтрації $(\Im_k)_{k\geq 0}$, $\Im_0 = \{\varnothing, \Omega\}$, $\Im_k = \sigma\{\xi_1, \dots, \xi_k\}$.

Проблема оптимальної зупинки полягає у відшуканні функції ціни

$$V(x) = \sup_{\tau \in \bar{\mathfrak{M}}_0^\infty} \mathsf{E}_x\, g(X_\tau) I\{\tau < \infty\}, \qquad x \in \mathbf{R},$$

де $g(x)$ — вимірна функція, $I\{\cdot\}$ — індикаторна функція, $\bar{\mathfrak{M}}_0^\infty$ — клас всіх марковських моментів τ зі значеннями в $[0, \infty]$.

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60G40, 60G50, 60L15.
Ключові слова і фрази. Поліноми Аппеля, випадкове блукання, функція виплат, момент зупинки.

Оптимальним моментом зупинки називається випадкова величина

$$\tau^* = \operatorname*{argmax}_{\tau\in\bar{\mathfrak{M}}_0^\infty} \mathsf{E}_x\, g(X_\tau) I\{\tau < \infty\}.$$

В роботі [4] розглянуто випадок степеневої функції виплат $g(x) = (x^+)^k$. Ми розглянемо функції виплат $g(x)$ вигляду:

$$g(x) = \sum_{k=1}^{N} C_k (x^+)^k, \qquad C_k \in \mathbf{R}.$$

В роботі [6] розглянуто задачу оптимальної зупинки випадкового блукання X у випадку поліноміальних функцій виплат довільного степеня з невід'ємними коефіцієнтами та знайдено явний вигляд моментів оптимальної зупинки та функцій ціни. Зараз нашою метою є відшукання моментів оптимальної зупинки випадкового блукання $X = (X_1, X_2, X_3, \ldots)$ з поліноміальною функцією виплат та функції ціни. Щодо поліноміальних функцій виплат з коефіцієнтами довільних знаків, задача відшукання оптимальних моментів зупинки процесу X для таких функцій виплат є досить громіздкою з технічної точки зору, тому в даній роботі ми сформулюємо загальний результат, а детально розглянемо поліноміальні функції виплат не вище третього степеня.

2. Допоміжні твердження та означення

Для доведення основного результати роботи нам знадобляться наступні твердження та означення.

Означення 1. Нехай η — випадкова величина така, що $\mathsf{E}\exp(\lambda|\eta|) < \infty$ для деякого $\lambda > 0$. Поліномами Аппеля (або поліномами Шеффера) [5] називається сім'я поліномів $Q_k(y) = Q_k(y, \eta)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, що визначається з розкладу

$$\frac{\exp(uy)}{\mathsf{E}\exp(u\eta)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{k!} Q_k(y).$$

Поліноми $Q_k(y)$ виражаються через кумулянти $\chi_1, \chi_2, \ldots$ випадкової величини η наступним чином:

$$Q_0(y) = 1, Q_1(y) = y - \chi_1, \qquad Q_2(y) = (y - \chi_1)^2 - \chi_2,$$
$$Q_3(y) = (y - \chi_1)^3 - 3\chi_2(y - \chi_1) - \chi_3,$$

де $\chi_1 = \mu_1$, $\chi_2 = -\mu_1^2 + \mu_2$, $\chi_3 = 2\mu_1^3 - 3\mu_1\mu_2 + \mu_3$, $\mu_k = \mathsf{E}\,\eta^k$.

Зауважимо, що для однозначного визначення поліномів $Q_k(y)$, $k = 1, \ldots, n$, достатньо вимагати, щоб $\mathsf{E}\,|\eta|^n < \infty$. При цьому матиме місце рівність, що інколи береться за означення поліномів Аппеля [4]:

$$\frac{d}{dy} Q_k(y) = k Q_{k-1}(y), \qquad k \le n. \tag{1}$$

Зауважимо, що поліноми Аппеля $Q_k(y)$ є поліномами рівно степеня k [5]. Тому будь-який набір з n поліномів $Q_1(y), Q_2(y), \ldots, Q_n(y)$ є системою з n лінійно незалежних функцій.

Надалі в даній роботі працюємо з поліномами Аппеля, породженими випадковою величиною $M = \sup_{k\ge0} S_k$, тобто $Q_k(y) = Q_k(y, M)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Випадки, коли розподіл M знаходиться в явному вигляді, наведено в [7, 8, 9, 10].

Наступна лема з [4] дає достатні умови, за яких коректно визначені поліноми Аппеля, породжені випадковою величиною M.

Лема 1. *a) Нехай* $\mathsf{E}\, e^{\lambda\xi} < 1$ *для деякого* $\lambda > 0$. *Тоді для всіх* $u \le \lambda$ *має місце наступне*

$$\mathsf{E}\, e^{uM} < \infty.$$

b) Для будь-якого $p > 0$ *має місце наступне*

$$\mathsf{E}(\xi^+)^{p+1} < \infty \Longrightarrow \mathsf{E}\, M^p < \infty.$$

Зауваження 1. В [4] встановлено, що $M \ge 0$, $\mathsf{P}\{M < \infty\} = 1$, $\mathsf{P}\{M = 0\} > 0$ та $M \stackrel{law}{=} (M + \xi)^+$.

Доведення наступної леми також наведено в [4].

Лема 2. *1) Нехай* $\mathsf{E}(\xi^+)^{n+1} < \infty$. *Тоді*

a) $\mathsf{E}\, Q_n(M + x) = x^n$;

b) якщо $\tau_a = \inf\{k \ge 0\colon X_k \ge a\}$, *то для всіх* $a \ge 0$ *має місце рівність*

$$\mathsf{E}_x\, I\{\tau_a < \infty\} X^n_{\tau_a} = \mathsf{E}\, I\{M + x \ge a\} Q_n(M + x).$$

2) Нехай $n = 1, 2, \ldots$. *Тоді поліном* $Q_n(y)$ *має єдиний додатний корінь* a^*_n, *причому* $Q_n(y) \le 0$ *для* $0 \le y < a^*_n$, *та* $Q_n(y)$ *зростає для всіх* $y \ge a^*_n$.

3) Нехай $f(x) = \mathsf{E}\, I\{M + x \ge a^*\} G(M + x) < \infty$, *де функція* $G(x)$ *така, що при всіх* $y \ge x \ge a^* \ge 0$ *мають місце нерівності* $G(y) \ge G(x) \ge G(a^*) = 0$. *Тоді для всіх* x *має місце нерівність* $f(x) \ge \mathsf{E}\, f(\xi + x)$.

4) Нехай $f(x)$ *та* $g(x)$ *— невід'ємні функції такі, що для кожного* x

$$f(x) \ge g(x) \tag{2}$$

та $f(x) \ge \mathsf{E}\, f(\xi + x)$.

Тоді для всіх x *має місце нерівність* $f(x) \ge \sup_{\tau \in \bar{\mathfrak{M}}_0^\infty} \mathsf{E}\, I\{\tau < \infty\} g(S_\tau + x)$.

В [4] встановлено, що всі корені a^*_n поліномів $Q_n(y)$ розташовані в порядку зростання, тобто $0 < a^*_1 < a^*_2 < a^*_3 < \ldots$.

Також з явного вигляду поліномів Аппеля через кумулянти та з другого пункту леми 2 випливає, що $\chi_1 \ge 0$, $\chi_2 \ge 0$, $\chi_3 \ge 0$, $\chi_2 \ge \chi_1^2$, $\chi_1^3 - 3\chi_2\chi_1 + \chi_3 \ge 0$. При цьому випадок $\chi_1 = 0$ є виродженим, оскільки тоді блукання рухається лише вліво, значить, $\eta = 0$, і всі поліноми Аппеля перетворюються на степеневі функції. Тому далі всюди $\chi_1 > 0$.

Означення 2. Будемо говорити, що функція $P(y)$ є функцією типу $\mathbf{A}(a)$, якщо для неї існує таке число $a > 0$, що виконується наступне

$$\begin{cases} P(a) = 0, P(y) \le 0 \text{ на } [0, a), \\ P(y) \text{ зростає на } [a, \infty). \end{cases} \tag{3}$$

Простий критерій належності функції $P_2(y) = -C_1 Q_1(y) + C_2 Q_2(y)$, $C_1, C_2 > 0$ до типу $\mathbf{A}(a)$ містить наступна лема.

Лема 3. *Нехай* $\chi_2 > \chi_1^2$. *Поліном*

$$P_2(y) = -C_1 Q_1(y) + C_2 Q_2(y), \qquad C_1, C_2 > 0$$

є поліномом типу $\boldsymbol{A}(a)$ *тоді і лише тоді, коли коефіцієнти* C_1, C_2 *задовольняють умову*

$$\frac{C_1}{C_2} \le \frac{\chi_2}{\chi_1} - \chi_1.$$

При цьому число a *для полінома* $P_2(y)$ *має вигляд*

$$a = a^*_2 = \frac{1}{2}\frac{C_1}{C_2} + \sqrt{\frac{1}{4}\frac{C_1^2}{C_2^2} + \chi_2} + \chi_1.$$

Доведення. Запишемо поліном $P_2(y)$ в явному вигляді через кумулянти

$$P_2(y) = C_2(y-\chi_1)^2 - C_1(y-\chi_1) - C_2\chi_2.$$

Його корені мають наступний вигляд

$$a^*_{1,2} = \chi_1 + \frac{1}{2}\frac{C_1}{C_2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}\frac{C_1^2}{C_2^2} + \chi_2}.$$

Оскільки більший корінь даного полінома є додатним, а функція $P_2(y)$ після нього монотонно зростає, то система (3) еквівалентна нерівності $a_1^* \le 0$. Запишемо цю умову:

$$\chi_1 + \frac{1}{2}\frac{C_1}{C_2} - \sqrt{\frac{1}{4}\frac{C_1^2}{C_2^2} + \chi_2} \le 0,$$

або, що те саме

$$C_2(\chi_2 - \chi_1^2) \ge C_1\chi_1. \tag{4}$$

Ліва частина (4) за умовами леми є додатною. Отже, отримано умови на коефіцієнти C_1, C_2:

$$\frac{C_1}{C_2} < \frac{\chi_2}{\chi_1} - \chi_1,$$

і лему доведено. □

Теорема 1. *Нехай* $\mathsf{E}\xi < 0$, $\mathsf{E}(\xi^+)^k < \infty$ *для* $k \in \{1,2\}$, $\chi_2 > \chi_1^2$, *а коефіцієнти* C_1, C_2 *задовольняють умови леми 3. Тоді момент зупинки* $\tau_2^* = \inf\{k \ge 0 \mid X_k \ge a_2^*\}$ *є оптимальним для випадкового блукання* $X = (X_0, X_1, X_2, \ldots)$ *та функції виплат* $g(x) = -C_1x^+ + C_2(x^+)^2$.

Доведення даної теореми наведено в [6].

3. Основні результати

Розглянемо функцію виплат наступного вигляду

$$g(x) = C_1x^+ + C_2(x^+)^2 + \ldots + C_n(x^+)^n, \qquad C_n > 0.$$

З даною функцією виплат пов'яжемо лінійну комбінацію поліномів Аппеля

$$P_n(y) = C_1Q_1(y) + C_2Q_2(y) + \ldots + C_nQ_n(y), \qquad C_n > 0.$$

Коефіцієнт C_n обраний додатним з тих міркувань, що надалі нам знадобиться приналежність полінома $P_n(y)$ до функцій типу $\mathbf{A}(a)$, а при від'ємному коефіцієнті це неможливо.

Встановимо умови на коефіцієнти $C_1, C_2, \ldots C_n$ полінома $P_n(y)$, за яких даний поліном буде функцією типу $\mathbf{A}(a)$, а також явний вигляд функції ціни та оптимального моменту зупинки для випадкового блукання $X = (X_1, X_2, X_3, \ldots)$ з функцією виплат $g(x)$.

Наступна теорема дає необхідні і достатні умови на коефіцієнти, за яких поліном $P_n(y)$ є функцією типу $\mathbf{A}(a)$. Теорема подається без доведення.

Теорема 2. *Поліном* $P_n(y)$ *є поліномом типу* $\boldsymbol{A}(a)$ *тоді і лише тоді, коли виконується одне з наступних тверджень:*

а) Похідна полінома $P_n(y)$ *не має коренів на* $[0,\infty)$ *та* $P_n(0) < 0$.

б) Похідна полінома $P_n(y)$ *має корені на* $[0,\infty)$, *які не є точками локальних екстремумів полінома* $P_n(y)$, *та виконується нерівність* $P_n(0) < 0$.

в) *Похідна полінома $P_n(y)$ має корені на $[0,\infty)$, серед яких є локальні екстремуми полінома $P_n(y)$. Перший з локальних екстремумів на $[0,\infty)$ є мінімумом, причому в кожному з максимумів на $[0,\infty)$, якщо вони існують, функція $P_n(y)$ є від'ємною. Також виконується нерівність $P_n(0) \le 0$.*

г) *Похідна полінома $P_n(y)$ має корені на $[0,\infty)$, серед яких є локальні екстремуми полінома $P_n(y)$. Перший з локальних екстремумів на $[0,\infty)$ є максимумом, причому в кожному з максимумів на $[0,\infty)$ функція $P_n(y)$ є від'ємною.*

Оскільки записати умови теореми 2 в явному вигляді через коефіцієнти C_1, C_2, $\ldots$, C_n полінома $P_n(y)$ у випадку $n>3$ є задачею громіздкою технічно, то обмежимось детальним розглядом випадку $n=3$. Наступна теорема дає необхідні і достатні умови на коефіцієнти C_1, C_2, C_3, за яких поліном $P_3(y)$ є функцією типу $\mathbf{A}(a)$.

Теорема 3. *Поліном $P_3(y) = C_1Q_1(y) + C_2Q_2(y) + C_3Q_3(y)$, $C_3>0$, є функцією типу $\boldsymbol{A}(a)$ з деяким $a>0$ тоді і лише тоді, коли виконується одна з наступних чотирьох систем нерівностей*

$$\begin{cases} \frac{C_2^2}{C_3^2} - 3\frac{C_1}{C_3} + 9\chi_2 \le 0, \\ \frac{C_2}{C_3}[\chi_1^2 - \chi_2] - \frac{C_1}{C_3}\chi_1 \\ \qquad < \chi_1^3 - 3\chi_2\chi_1 + \chi_3. \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{C_2^2}{C_3^2} - 3\frac{C_1}{C_3} + 9\chi_2 > 0, \\ \sqrt{\frac{C_2^2}{C_3^2} - 3\frac{C_1}{C_3} + 9\chi_2} < \frac{C_2}{C_3} - 3\chi_1, \\ \frac{C_2}{C_3}[\chi_1^2 - \chi_2] - \frac{C_1}{C_3}\chi_1 < \chi_1^3 - 3\chi_2\chi_1 + \chi_3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{C_2^2}{C_3^2} - 3\frac{C_1}{C_3} + 9\chi_2 > 0, \\ \sqrt{\frac{C_2^2}{C_3^2} - 3\frac{C_1}{C_3} + 9\chi_2} > 3\chi_1 - \frac{C_2}{C_3}, \\ \sqrt{\frac{C_2^2}{C_3^2} - 3\frac{C_1}{C_3} + 9\chi_2} \ge \frac{C_2}{C_3} - 3\chi_1, \\ \frac{C_2}{C_3}[\chi_1^2 - \chi_2] - \frac{C_1}{C_3}\chi_1 \le \chi_1^3 - 3\chi_2\chi_1 + \chi_3. \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{C_2^2}{C_3^2} - 3\frac{C_1}{C_3} + 9\chi_2 > 0, \\ \sqrt{\frac{C_2^2}{C_3^2} - 3\frac{C_1}{C_3} + 9\chi_2} \le 3\chi_1 - \frac{C_2}{C_3}, \\ 2\left(\frac{C_2^2}{C_3^2} - 3\frac{C_1}{C_3} + 9\chi_2\right)^{\frac{3}{2}} \\ \qquad < 9\frac{C_1}{C_3}\frac{C_2}{C_3} - 2\frac{C_2^3}{C_3^3} + 27\chi_3. \end{cases}$$

Доведення. Запишемо в явному вигляді похідну функції $P_3(y)$, скориставшись властивістю (1) поліномів Аппеля та їх записом через кумулянти

$$\frac{dP_3(y)}{dy} = C_1 + 2C_2Q_1(y) + 3C_3Q_2(y) = 3C_3(y-\chi_1)^2 + 2C_2(y-\chi_1) + C_1 - 3C_3\chi_2.$$

Оскільки $C_3>0$, то графік похідної є параболою гілками вгору відносно $(y-\chi_1)$, причому корені похідної мають наступний вигляд

$$y_{1,2} = \chi_1 + \frac{-C_2 \pm \sqrt{C_2^2 - 3C_1C_3 + 9C_3^2\chi_2}}{3C_3}.$$

Позначимо через $D = C_2^2 - 3C_1C_2 + 9C_3^2\chi_2$ дискримінант похідної $dP_3(y)/dy$.

Запишемо твердження, на які перетворюються умови теореми 2 у випадку полінома третього степеня $P_3(y)$.

Пункт а) рівносильний виконанню одного з наступних трьох тверджень:

1) Дискримінант D похідної $dP_3(y)/dy$ є від'ємним та $P_3(0)<0$.
2) Дискримінант D похідної $dP_3(y)/dy$ дорівнює нулю, $y_1<0$ та $P_3(0)<0$.
3) Дискримінант D похідної $dP_3(y)/dy$ є додатним, $y_2<0$ та $P_3(0)<0$.

Пункт б) еквівалентний наступному твердженню:

4) Дискримінант D похідної $dP_3(y)/dy$ дорівнює нулю, $y_1 \ge 0$ та $P_3(0)<0$.

Пункт в) рівносильний виконанню наступного твердження:

5) Дискримінант D похідної $dP_3(y)/dy$ є додатним, $y_1<0$, $y_2\ge 0$ та $P_3(0)\le 0$.

Пункт г) виконується тоді і лише тоді, коли справедливе наступне твердження:

6) Дискримінант D похідної $dP_3(y)/dy$ є додатним, $y_1 \ge 0$ та $P_3(y_1)<0$.

Якщо об'єднати твердження 1), 2) та 4), то отримаємо наступну систему:

$$\begin{cases} D \leq 0, \\ P_3(0) < 0, \end{cases}$$

що еквівалентна першій системі у формулюванні теореми.

Твердження 3), 5) та 6) після проведення необхідних спрощень та перетворень є в точності другою, третьою та четвертою системами у формулюванні теореми відповідно.

Таким чином, всі можливі випадки розглянуто і теорему доведено. □

Дослідимо на розв'язність системи з умов теореми 3 в різних випадках.

Зауваження 2. а) Нехай $\chi_2 - \chi_1^2 = 0$, $\chi_1^3 - 3\chi_1\chi_2 + \chi_3 = 0$. Тоді області, для яких виконуються системи нерівностей з умов теореми 3, зображені на рис. 1, а. Переконаємось, що при цьому не існує таких поліномів $P_3(y)$ типу $\mathbf{A}(a)$, для яких $C_1 < 0$. Дійсно, останні нерівності першої та другої систем теореми 3 перетворюються на $C_1/C_3 > 0$, а остання нерівність третьої системи набуває вигляду $C_1/C_3 \geq 0$. Також для останньої нерівності четвертої системи чисельно встановлено, що вона не має місця для таких C_1, C_3, що $C_1/C_3 < 0$.

б) Нехай $\chi_2 - \chi_1^2 > 0$, $\chi_1^3 - 3\chi_1\chi_2 + \chi_3 = 0$. Тоді області існування розв'язків систем нерівностей з теореми 3 наведені на рис. 1, б. Слід зазначити, що в даному випадку не існує таких поліномів $P_3(y)$ типу $\mathbf{A}(a)$, для яких $C_1 < 0$ та $C_2 < 0$ одночасно. Це випливає з того, що останні нерівності першої та другої систем теореми 3 набувають вигляду $C_2 > \chi_1/(\chi_1^2 - \chi_2)C_2$. Остання нерівність третьої системи перетворюється на $C_2 \geq \chi_1/(\chi_1^2 - \chi_2)C_2$. Також чисельно встановлено, що остання нерівність четвертої системи не виконується, якщо $C_1 < 0$ та $C_2 < 0$ одночасно.

в) Нехай $\chi_2 - \chi_1^2 = 0$, $\chi_1^3 - 3\chi_1\chi_2 + \chi_3 > 0$. Тоді області існування розв'язків систем з умов теореми 3 зображені на рис. 1, в. Зауважимо, що в даному випадку існують такі поліноми $P_3(y)$ типу $\mathbf{A}(a)$, коефіцієнти C_1 та C_2 яких можуть бути обидва додатні, обидва від'ємні, а також такі, що $C_1 \cdot C_2 < 0$. Це випливає з першої та третьої систем в умовах теореми 3.

г) Нехай $\chi_2 - \chi_1^2 > 0$, $\chi_1^3 - 3\chi_1\chi_2 + \chi_3 > 0$. Області, для яких виконуються системи з умов теореми 3 в даному випадку, подано на рис. 1, г. Аналогічно, як і в попередньому випадку, існують такі поліноми $P_3(y)$ типу $\mathbf{A}(a)$, коефіцієнти C_1 та C_2 яких можуть бути обидва додатні, обидва від'ємні, а також такі, що $C_1 \cdot C_2 < 0$.

Слід зазначити, що області I, II та III рис. 1 отримані точно, тоді як область IV отримана чисельно.

На рис. 1 для випадків з зауваження 2 зображені області, точки яких задовольняють системи з умов теореми 3.

Римськими цифрами позначено номери відповідних систем, яким відповідають позначені області.

Рис. 1 побудований за наступними даними:

а) $\chi_2 - \chi_1^2 = 0$, $\chi_1^3 - 3\chi_1\chi_2 + \chi_3 = 0$, $(\chi_1 = 1, \chi_2 = 1, \chi_2 = 2)$.

б) $\chi_2 - \chi_1^2 > 0$, $\chi_1^3 - 3\chi_1\chi_2 + \chi_3 = 0$, $(\chi_1 = 1, \chi_2 = 2, \chi_2 = 5)$.

в) $\chi_2 - \chi_1^2 = 0$, $\chi_1^3 - 3\chi_1\chi_2 + \chi_3 > 0$, $(\chi_1 = 1, \chi_2 = 1, \chi_2 = 3)$.

г) $\chi_2 - \chi_1^2 > 0$, $\chi_1^3 - 3\chi_1\chi_2 + \chi_3 > 0$, $(\chi_1 = 1, \chi_2 = 2, \chi_2 = 6)$.

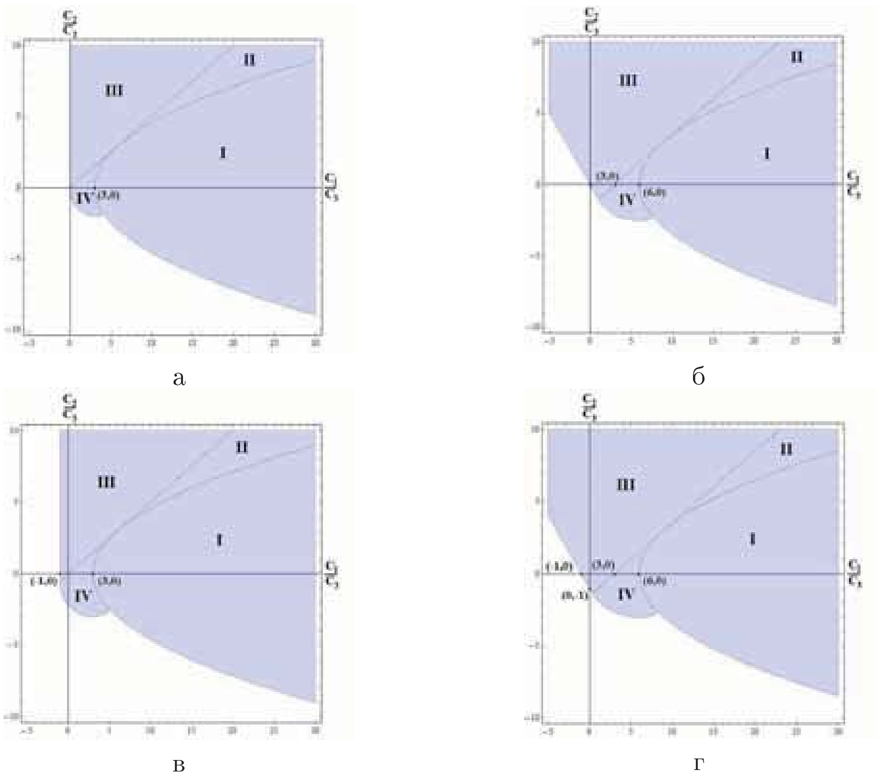

Рис. 1. Області розв'язків систем з теореми 3 в різних випадках.

Зауваження 3. В роботі [6] встановлено, що якщо $C_1 > 0, C_2 > 0, C_3 > 0$, то поліном $P_3(y) = C_1Q_1(y) + C_2Q_2(y) + C_3Q_3(y)$ завжди є функцією типу $\mathbf{A}(a)$. Зауважимо, що це узгоджується з результатом теореми 3. Зокрема, з рис. 1 видно, що область розв'язків систем теореми 3 повністю покриває правий верхній квадрант.

Наступна теорема дає явний вигляд оптимальних моментів зупинки та функцій ціни для випадкового блукання $X = (X_1, X_2, X_3, \ldots)$ з поліноміальною функцією виплат степеня n.

Теорема 4. *Нехай* $\mathsf{E}\xi < 0$, $\mathsf{E}(\xi^+)^{k+1} < \infty$ *для* $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, *а коефіцієнти* $C_1, C_2, \ldots, C_n$ *полінома* $g(x) = C_1x^+ + C_2(x^+)^2 + \ldots + C_n(x^+)^n$, $C_n > 0$ *такі, що поліном* $P_n(y) = C_1Q_1(y) + C_2Q_2(y) + \ldots + C_nQ_n(y)$, $C_n > 0$ *є функцією типу* $\boldsymbol{A}(a)$. *Нехай* a_n^* *— додатний корінь полінома* $P_n(y)$.

Тоді момент зупинки $\tau_n^* = \inf\{k \geq 0 \mid X_k \geq a_n^*\}$ *є оптимальним для випадкового блукання* $X = (X_0, X_1, X_2, \ldots)$ *та функції виплат* $g(x)$. *Крім того має місце рівність*

$$V_n(x) := \sup_{\tau \in \bar{\mathfrak{M}}_0^\infty} \mathsf{E}_x\, g(X_\tau)I\{\tau < \infty\} = \mathsf{E}_x\, g(X_{\tau_n^*})I\{\tau_n^* < \infty\},$$

при цьому

$$V_n(x) = \mathsf{E}\, P_n(M + x)I\{M + x \geq a_n^*\}.$$

Доведення. Розглянемо функції $\widehat{g}(x) = C_1x + C_2x^2 + \ldots + C_nx^n$, $C_n > 0$ та $\widehat{V}_n(x) := \sup_{\tau \in \hat{\mathfrak{M}}_0^\infty} \mathsf{E}_x\, \widehat{g}(X_\tau)I\{\tau < \infty\}$, де $\hat{\mathfrak{M}}_0^\infty$ – клас моментів зупинки спеціального вигляду: $\hat{\tau} = \tau_a$, $a \geq 0$, де $\tau_a = \inf\{k \geq 0 | X_k \geq a\}$. Оскільки на множині $\{\tau_a < \infty\}$ має місце рівність $\hat{g}(X_{\tau_a}) = g(X_{\tau_a})$, то $\hat{V}_n(x) \leq V_n(x)$, тому що $V_n(x)$ визначається по більш широкому класу моментів зупинки $\bar{\mathfrak{M}}_0^\infty$

Покажемо, що виконується рівність

$$\hat{V}_n(x) = \mathsf{E}\, P_n(M+x) I\{M+x \geq a_n^*\}. \tag{5}$$

Справді, з пункту b) першого пункту леми 2 маємо наступне

$$\mathsf{E}_x\, I\{\tau_a < \infty\} X_{\tau_a}^k = \mathsf{E}\, I\{M+x \geq a\} Q_k(M+x), \qquad k \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

Помноживши попередню рівність для відповідних поліномів Аппеля на коефіцієнти $C_1, C_2, \ldots, C_n$ та додавши отримані рівності, одержимо

$$\mathsf{E}_x\, I\{\tau_a < \infty\} \hat{g}(X_{\tau_a}) = \mathsf{E}\, I\{M+x \geq a\} P_n(M+x),$$

де $P_n(M+x) \geq 0$ на множині $\{M+x \geq a\}$ для будь-якого $a \in [a_n^*, \infty)$. Тому $\mathsf{E}\, P_n(M+x) I\{M+x \geq a\}$ є спадною функцією на $[a_n^*, \infty)$.

Нехай тепер $a \in [0, a_n^*]$. Тоді отримаємо:

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\, P_n(M+x) I\{M+x \geq a\} = \mathsf{E}\, P_n(M+x) - \mathsf{E}\, P_n(M+x) I\{M+x < 0\} \\ - \mathsf{E}\, P_n(M+x) I\{0 \leq M+x < a\},\end{aligned}$$

де з пункту a) першого пункту леми 2 маємо, що

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\, P_n(M+x) &= \mathsf{E}(C_1 Q_1(M+x) + C_2 Q_2(M+x) + \ldots + C_n Q_n(M+x)) \\ &= C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_n x^n.\end{aligned}$$

З теореми 2 випливає, що $P_n(M+x) I\{0 \leq M+x < a\} \leq 0$, тому

$$P_n(M+x) I\{0 \leq M+x < a\}$$

є спадною функцією, а отже функція $P_n(M+x) I\{M+x \geq a\}$ зростає на $[0, a_n^*]$. Оскільки остання функція є також неперервною і спадає на $[a_n^*, \infty)$, то вона досягає максимума в точці $a = a_n^*$. Таким чином, рівність (5) доведено і оптимальним моментом зупинки для функції виплат $\widehat{g}(x)$ в класі $\hat{\mathfrak{M}}_0^\infty$ є момент зупинки $\widehat{\tau}_n = \tau_{a_n^*}$.

Для завершення доведення залишилось показати, що $\hat{V}_n \geq V_n(x)$. Для цього розглянемо функцію $f(x) = \hat{V}_n(x) = \mathsf{E}\, P_n(M+x) I\{M+x \geq a_n^*\}$ і застосуємо четвертий пункт леми 2, поклавши $g(x) = C_1 x^+ + C_2 (x^+)^2 + \ldots + C_n (x^+)^n$. Перевіримо спочатку виконання умови (2) при $x \in (0, a_n^*)$. Для цього помітимо, що за теоремою 3 при $x \in (0, a_n^*)$ маємо

$$I\{M+x \geq a_n^*\} P_n(M+x) = (P_n(M+x))^+.$$

Тоді з нерівності Йенсена та з пункту a) другого пункту леми 2 маємо:

$$f(x) = \mathsf{E}(P_n(M+x))^+ \geq (\mathsf{E}\, P_n(M+x))^+ = C_1 x^+ + C_2 (x^+)^2 + \ldots + C_n (x^+)^n = g(x).$$

Друга умова в четвертому пункті леми 2 виконується для функції $G(y) = P_n(y)$ в силу третього пункту леми 2.

Таким чином, функція $f(x)$ є ексцесивною мажорантою функції

$$g(x) = C_1 x^+ + C_2 (x^+)^2 + \ldots + C_n (x^+)^n,$$

а отже $f(x) \geq V_n(x)$. Оскільки $f(x) = \hat{V}_n(x)$, то $\hat{V}_n \geq V_n(x)$. Таким чином, $\hat{V}_n = V_n(x)$, а отже момент зупинки $\widehat{\tau}_n = \tau_{a_n^*}$ є оптимальним в класі $\bar{\mathfrak{M}}_0^\infty$ для функції виплат $g(x)$. Теорему доведено. □

4. Приклади

В лемі 3, а також при дослідженні на розв'язність систем теореми 3 (зауваження 2) виникають умови $\chi_2 - \chi_1^2 > 0$, $\chi_1^3 - 3\chi_1\chi_2 + \chi_3 > 0$ та $\chi_2 - \chi_1^2 = 0$, $\chi_1^3 - 3\chi_1\chi_2 + \chi_3 = 0$ на кумулянти χ_1, χ_2, χ_3 супремума випадкового блукання $M = \sup_{k\geq 0} S_k$, де $S_0 = 0$, $S_k = \sum_{i=1}^{k} \xi_i$, $k \geq 1$.

В літературі основну увагу в дослідженні розподілів максимумів випадкових блукань приділено вивченню поведінки хвостів розподілів [11], а також асимптотики розподілів [12, 13, 14]. Щодо точного розподілу максимума випадкових блукань, результатів відомо не багато [7, 8, 9, 10]. Приклади випадкових блукань з необхідними нам властивостями вдалося побудувати, застосувавши розподіл максимума цілочисельного блукання з [10], а також випадкове блукання з експоненційним розподілом, що використовується в теорії масового обслуговування [7].

Нехай $\nu_1, \nu_2, \nu_3 \ldots$ — незалежні однаково розподілені випадкові величини, що приймають значення 2 та 0 з імовірностями p та $1-p$ відповідно, де $p \in [0, \frac{1}{2})$.

Розглянемо випадкові блукання $N_r = \sum_{i=1}^{r} \nu_i$ та $S_r = N_r - r = \sum_{i=1}^{r} (\nu_i - 1)$, $S_0 = 0$. Випадкове блукання S_r має прирости 1 та -1 з ймовірностями p та $1-p$ відповідно, а математичне сподівання його стрибка дорівнює $\mathsf{E}[\nu_i - 1] = 2p - 1 < 0$, для всіх $p \in [0, \frac{1}{2})$, тобто блукання має зсув вліво.

Розподіл блукання N_r, $r \geq 1$ має вигляд:

$$\mathsf{P}(N_r = k) = \begin{cases} 0 & \text{для } k < 0 \text{ або } k \text{ — непарного,} \\ (1-p)^r & \text{для } k = 0, \\ 0 & \text{для } k \text{ –парного та якщо } r < \frac{k}{2}, \\ p^{\frac{k}{2}}(1-p)^{r-\frac{k}{2}} & \text{для } k \text{ –парного та якщо } r \geq \frac{k}{2}. \end{cases}$$

В роботі [10] встановлено, що розподіл випадкової величини $M = \sup_{k\geq 1} S_k$ має наступний вигляд

$$\mathsf{P}(M < k) = \begin{cases} 1 - (1-2p)\sum_{j=1}^{\infty} \mathsf{P}(N_j = j + k) & \text{для } k > 0, \\ 0 & \text{інакше.} \end{cases} \tag{6}$$

Оскільки ймовірнісні характеристики максимума випадкового блукання M залежать від ймовірності p, то надалі для кумулянт та моментів даного максимума будемо використовувати позначення $\chi_i(p)$, $i \geq 1$ та $\mu_i(p)$, $i \geq 1$ відповідно.

Теорема 5. *Існує* $p_0 \in (0, \frac{1}{2})$ *таке, що для всіх* $p \in (0, p_0]$ *виконуються наступні нерівності для кумулянт* $\chi_1(p)$, $\chi_2(p)$, $\chi_3(p)$ *супремума випадкового блукання* $M = \sup_{k\geq 0} S_k$

$$\chi_2(p) - \chi_1^2(p) > 0, \chi_1^3(p) - 3\chi_1(p)\chi_2(p) + \chi_3(p) > 0.$$

Доведення. Неважко переконатись, що мають місце наступні рівності

$$\mu_1(p) = \sum_{k=1}^{\infty} k\,\mathsf{P}(M = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}(M \geq k),$$

$$\mu_2(p) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2\,\mathsf{P}(M = k) = 2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty} \mathsf{P}(M \geq j),$$

$$\mu_3(p) = \sum_{k=1}^{\infty} k^3\,\mathsf{P}(M = k) = 6\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty}\sum_{l=j}^{\infty} \mathsf{P}(M \geq l).$$

При $p = 0$ супремум M випадкового блукання S_k буде дорівнювати 0, а отже всі моменти та кумулянти даного супремума також дорівнюватимуть нулю.

Розглянемо функцію $f_1(p) = \chi_2(p) - \chi_1^2(p) = \mu_2(p) - 2\mu_1^2(p)$ та знайдемо її похідну в точці $p = 0$:

$$\frac{df_1(p)}{dp} = \frac{d\mu_2(p)}{dp} - 4\mu_1(p) \cdot \frac{d\mu_1(p)}{dp}. \tag{7}$$

Другий доданок попереднього виразу дорівнює нулю при $p = 0$, оскільки в цьому випадку $\mu_1(0) = 0$.

Розглянемо окремо перший доданок, скориставшись формулою (6).

$$\frac{d\mu_2(p)}{dp} = \left(2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty}\mathsf{P}(M \geq j)\right)_p' = 2\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}(1-2p)\,\mathsf{P}(N_l = l+j)\right)_p'. \tag{8}$$

Оскільки ряд під знаком диференціалу є степеневим відносно p, то за теоремою про диференціювання степеневих рядів його можна почленно диференціювати в області збіжності.

Обчислимо, чому дорівнює похідна $d\mu_2(p)/dp$ при $p = 0$. Для цього здійснимо наступні перетворення

$$\begin{aligned}\frac{d\mu_2(p)}{dp} &= 2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty}\left((1-2p)\sum_{l=1}^{\infty}\mathsf{P}(N_l = l+j)\right)_p' \\ &= 2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty}(1-2p)\sum_{l=1}^{\infty}\left(\mathsf{P}(N_l = l+j)\right)_p' - 4\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\mathsf{P}(N_l = l+j).\end{aligned}$$

З явного вигляду розподілу $N_r, r \geq 1$ видно, що при $p = 0$ остання сума попереднього виразу дорівнює нулю.

Щодо першої суми, то при $p = 0$ всі її члени дорівнюють нулю, окрім одного, що дорівнює 1. Цей доданок відповідає індексам $k = l = j = 1$. Отже, $f_1'(p)\big|_{p=0} = 2$.

Таким чином, функція $f_1(p) = \chi_2(p) - \chi_1^2(p)$ при $p = 0$ дорівнює 0, а оскільки $f_1'(p)|_{p=0} = 2 > 0$, то дана функція зростає в околі нуля. Тому існує $p_0^1 \in (0, \frac{1}{2})$ таке, що для всіх $p \in (0, p_0^1]$ має місце $f_1(p) > 0$.

Розглянемо тепер функцію $f_2(p) = \chi_1^3(p) - 3\chi_1(p)\chi_2(p) + \chi_3(p)$. Слід зазначити, що $f_2(0) = 0$. Знайдемо чому дорівнює похідна функції $f_2(p)$ в нулі:

$$\frac{df_2(p)}{dp} = 3\chi_1^2(p)\frac{d\chi_1(p)}{dp} - 3\left(\chi_1(p)\frac{d\chi_2(p)}{dp} + \chi_2(p)\frac{d\chi_1(p)}{dp}\right) + \frac{d\chi_3(p)}{dp}.$$

Перші два доданки при $p = 0$ дорівнюють нулю, оскільки всі моменти випадкової величини M дорівнюють нулю. Перепишемо третій доданок у наступному вигляді

$$\begin{aligned}\frac{d\chi_3(p)}{dp} &= \left(2\mu_1^3(p) - 3\mu_1(p)\mu_2(p) + \mu_3(p)\right)_p' \\ &= 6\mu_1^2(p)\frac{d\mu_1(p)}{dp} - 3\frac{\mu_1(p)}{dp}\mu_2(p) - 3\frac{\mu_2(p)}{dp}\mu_1(p) + \frac{d\mu_3(p)}{dp}.\end{aligned}$$

Всі доданки в правій частині попереднього виразу, окрім останнього, при $p = 0$ дорівнюють нулю.

Розглянемо останній доданок $\frac{d\mu_3(p)}{dp}$ та перепишемо його наступним чином

$$\frac{d\mu_3(p)}{dp} = \left(6\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty}\sum_{l=j}^{\infty}\mathsf{P}(M \geq l)\right)_p' = 6\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty}\sum_{l=j}^{\infty}\sum_{h=1}^{\infty}(1-2p)\,\mathsf{P}(N_h = l+h)\right)_p'.$$

Зауважимо, що можливість почленного диференціювання в останньому виразі випливає з теореми про диференціювання степеневих рядів. Тому можемо записати наступне

$$\begin{aligned}\frac{d\mu_3(p)}{dp} &= 6\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty}\sum_{l=j}^{\infty}\sum_{h=1}^{\infty}\left((1-2p)\,\mathsf{P}(N_h=l+h)\right)'_p\\ &= 6\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty}\sum_{l=j}^{\infty}\sum_{h=1}^{\infty}(1-2p)\left(\mathsf{P}(N_h=l+h)\right)'_p - 12\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty}\sum_{l=j}^{\infty}\sum_{h=1}^{\infty}\mathsf{P}(N_h=l+h).\end{aligned}$$

Останній доданок правої частини попередньої рівності при $p=0$ перетворюється на нуль. Всі доданки в першій сумі правої частини при $p=0$ дорівнюють нулю, окрім одного, що дорівнює 1. Цей доданок відповідає індексам $k=j=l=h=1$.

Таким чином, можна зробити висновок, що функція

$$f_2(p) = \chi_1^3(p) - 3\chi_1(p)\chi_2(p) + \chi_3(p)$$

при $p=0$ дорівнює 0, $f_2'(p)\big|_{p=0} > 0$, отже дана функція зростає в околі нуля, тому існує $p_0^2 \in (0,\frac{1}{2})$ таке, що для $\forall p \in (0, p_0^2]$ має місце $f_2(p) > 0$.

Покладемо $p_0 = \min\{p_0^1, p_0^2\}$. Теорему доведено. □

В зауваженні 2 в одному з випадків також виникає умова

$$\chi_2 - \chi_1^2 = 0, \qquad \chi_1^3 - 3\chi_1\chi_2 + \chi_3 = 0$$

на кумулянти максимума випадкового блукання M.

Зауваження 4. В роботі [7] встановлено, що якщо прирости ξ випадкового блукання S_k мають вигляд $\xi = \xi^+ - \xi^-$ та розподіл ξ^+ є експоненційним, тобто

$$\mathsf{P}(\xi^+ > x) = c\cdot\exp(-\alpha x), \qquad \alpha > 0,\ x > 0,$$

то розподіл супремума випадкового блукання $M = \sup_{k\ge 0} S_k$ також є експоненційним і має вигляд $\mathsf{P}(M > x) = \mathrm{Const}\cdot\exp(-\lambda_1 x)$. В цьому випадку виконуються рівності $\chi_2 - \chi_1^2 = 0$, $\chi_1^3 - 3\chi_1\chi_2 + \chi_3 = 0$. Це, зокрема, видно з вигляду графіків поліномів Аппеля Q_2 та Q_3. Кумулянти максимума випадкового блукання у випадку експоненційного розподілу матимуть вигляд $\chi_1 = \frac{1}{\lambda_1}$, $\chi_2 = \frac{1}{\lambda_1^2}$, $\chi_3 = \frac{2}{\lambda_1^3}$. На рисунку 2 зображені поліноми Аппеля Q_2 та Q_3 для випадку $\lambda_1 = 10$. Видно, що $Q_2(0) = Q_3(0) = 0$, що еквівалентно умові $\chi_2 - \chi_1^2 = 0$, $\chi_1^3 - 3\chi_1\chi_2 + \chi_3 = 0$.

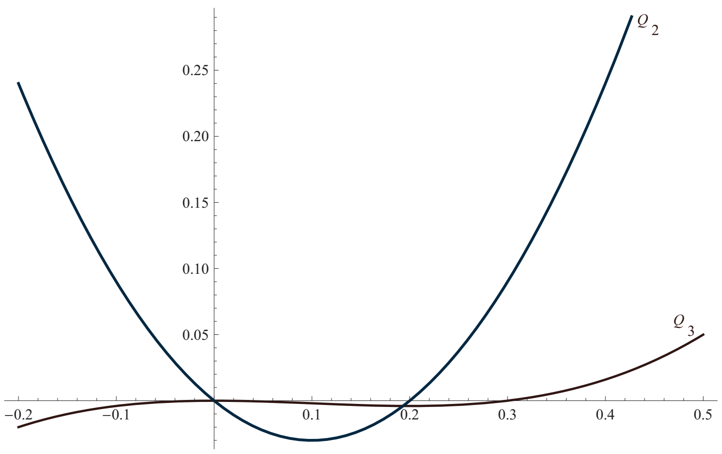

Рис. 2. Поліноми Аппеля у випадку експоненційного розподілу супремума випадкового блукання.

5. Висновок

Розглянуто задачу оптимальної зупинки випадкового блукання зі зсувом вліво для поліноміальних функцій виплат. Встановлені необхідні і достатні умови, за яких відповідна лінійна комбінація поліномів Аппеля, що відповідає функції виплат, має єдиний додатний корінь. Знайдено явний вигляд моменту оптимальної зупинки та функції ціни для випадкового блукання через найбільший додатний корінь лінійної комбінації поліномів Аппеля. Оптимальним моментом зупинки буде перший момент перетину випадковим блуканням рівня, що визначається як найбільший додатний корінь відповідної лінійної комбінації поліномів Аппеля. Наведено приклади випадкових блукань, для яких виконуються результати роботи.

Література

1. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Управляемые случайные процессы*, "Наукова Думка", Киев, 1977.
2. Е. Б. Дынкин, А. А. Юшкевич, *Теоремы и задачи о процессах Маркова*, "Наука", Москва, 1967.
3. D. A. Darling, T. Ligget, and H. M. Taylor, *Optimal stopping for partial sums*, Ann. Math. Statist. **43** (1972), 1363–1368.
4. А. А. Новиков, А. Н. Ширяев, *Об одном эффективном случае решения задачи об оптимальной остановке для случайных блужданий*, Теория вероятн. и ее примен. **49** (2004), № 2, 373–382.
5. W. Schoutens, *Stochastic Processes and Orthogonal Polynomials*, Lecture Notes in Statist., Springer-Verlag, New York, 2004.
6. В. В. Томашик, Ю. С. Мішура, *Оптимальні моменти зупинки випадкового блукання для поліноміальних функцій виплат*, Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика (2008), № 1–2, 101–110.
7. А. А. Боровков, *Вероятностные процессы в теории массового обслуживания*, "Наука", Москва, 1972.
8. О. В. Висков, *Случайное блуждание с непрерывной вверх компонентой и формулой обращения Лагранжа*, Теория вероятн. и ее примен. **45** (2000), № 1, 166–175.
9. W. Stadje, *An iterative approximation procedure for the distribution of the maximum of a random walk*, Statist. Probab. Lett. **50** (2000), № 4, 375–381.
10. Л. Такач, *Комбинаторные методы в теории случайных процессов*, "Мир", Москва, 1971.
11. D. Korshunov, *On distribution tail of the maximum of a random walk*, Stochastic Processes and their Applications **72** (1997), 97–103.
12. А. А. Боровков, *О субэкспоненциальных распределениях и асимптотике распределения максимума последовательных сумм*, Сибирский математический журнал **43** (2002), № 6, 1235–1264.
13. С. Захари, С. Г. Фосс, *О точной асимптотике максимума случайного блуждания с приращениями из одного класса распределений с тонкими хвостами*, Сибирский математический журнал **47** (2006), № 6, 1265–1274.
14. Д. А. Коршунов, *Критический случай теоремы Крамера-Лундберга об асимптотике распределения максимума случайного блуждания с отрицательным сносом*, Сибирский математический журнал **46** (2005), № 6, 1335–1340.

01601, Київ, вул. Володимирська, 64, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, механіко-математичний факультет, кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики

Адреса електронної пошти: myus@univ.kiev.ua

01601, Київ, вул. Володимирська, 64, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, механіко-математичний факультет, кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики

Адреса електронної пошти: vladdislav@gmail.com

Надійшла 11/05/2011