Теорія ймовір. та матем. статист. Вип. 86, 2012, стор. 81–91

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst. No. 86, 2012, pp. 81–91

МАКСИМАЛЬНЕ СКЛЕЮВАННЯ ТА СТІЙКІСТЬ ДИСКРЕТНИХ ЛАНЦЮГІВ МАРКОВА. I

УДК 519.21

М. В. КАРТАШОВ І В. В. ГОЛОМОЗИЙ

Анотація. Ми розглядаємо два дискретні ланцюги Маркова, перехідні ймовірності яких за один крок мало відрізняються у рівномірній нормі повної варіації, чи у V-нормі. Досліджується задача стійкості перехідних імовірностей за довільне число кроків. Для цього припускається виконання умови рівномірного перемішування або V-перемішування. Зокрема, доведено, що рівномірна відстань між розподілами ланцюгів у довільний час не перевищує $\varepsilon/(1-\rho)$, де ε — рівномірна відстань між перехідними матрицями, а ρ — рівномірний коефіцієнт перемішування. Наведено ряд прикладів загального характеру. Доведення грунтуються на методі максимального склеювання, що максимізує ймовірності склеювання при переходах за один крок.

Abstract. We consider two discrete Markov chains with close one-step transition probabilities — in the uniform total variation norm or in the V-norm. The problem of the stability of the transition probabilities for arbitrary number of steps is investigated. The main assumption is the uniform mixing or the V-mixing. For example, we prove that the difference between distributions of chains after any number of steps not exceeds the value $\varepsilon/(1-\rho)$, where ε is the uniform distance between transition matrixes, and ρ is the uniform mixing coefficient. The number of examples are considered. Proofs are based on the maximal coupling procedure that maximize the one-step coupling probabilities.

Аннотация. Мы рассматриваем две дискретные цепи Маркова, переходные вероятности которых за один шаг мало отличаются в равномерной норме полной вариации, или в V-норме. Исследуется задача устойчивости переходных вероятностей за произвольное число шагов. Для этого используется условие равномерного перемешивания или V-перемешивания. В частности, доказано, что равномерное расстояние между распределениями цепей в произвольное время не превышает $\varepsilon/(1-\rho)$, где ε — равномерное расстояние между переходными матрицами, а ρ — равномерный коэффициент перемешивания. Приведен ряд примеров общего характера. Доказательства основываются на методе максимального склеивания, который максимизует вероятности склеивания при переходах за один шаг.

1. Вступ

Дослідження стійкості розподілів загальних ланцюгів Маркова при широких припущеннях на характер перемішування детально висвітлене у монографії першого автора [3], де наведено також ряд застосувань. Основу доведень складали аналітичні операторні методи, включно з рядом нових нерівностей для асимптотики процесів відновлення та розв'язків рівняння відновлення.

Основи теорії стійкості стохастичних моделей викладені у монографії В. Золотарева [12]. Важливі досягнення у теорії стійкості наведені у книзі С. Мейна, Р. Твіді [15].

Одночасно у роботах багатьох авторів для аналізу асимптотичних властивостей марковських процесів було розвинуто теорію склеювання на базі класичного методу одного ймовірнісного простору, яка на практиці довела свою ефективність.

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60J45; Secondary 60A05, 60K05.

Ключові слова і фрази. Coupling theory, coupling method, maximal coupling, discrete Markov chains, stability of distributions, дискретні ланцюги Маркова, стійкість розподілів, метод склеювання, теорія склеювання.

Метод склеювання — на сьогодні широко вживаний метод для доведення граничних теорем широкого спектру, зокрема, для процесів Маркова. Вперше ідея склеювання була запропонована У. Дьобліним у середині двадцятого століття [1].

Ця ідея була значно розвинена, починаючи з семидесятих років минулого століття, в роботах Е. Нуммеліна, Р. Твіді [5, 6, 10, 11], Т. Ліндвала [7], І. Коваленка при аналізі суттєво багатовимірних систем масового обслуговування [8], П. Неєм для аналізу процесів відновлення [9].

Основи методу склеювання викладені у монографії Т. Ліндвала [14], яка є класичним підручником з методу склеювання. В цій книзі введено поняття абстрактного склеювання, а також описано ряд різних конструкцій склеювання таких як: слабке склеювання, максимальне склеювання, склеювання Орнштейна, склеювання Мінеки та ін. Іншою відомою монографією, що присвячена склеюванню, є робота Г. Торрісона [18].

Метод склеювання у своїх роботах використовували також П. Туомінен [16], Р. Твіді [17].

В книзі [15] наряду з методом склеювання використовується також метод розщеплення, який ідейно близький до склеювання. Метод розщеплення було запропоновано Е. Нуммеліном в роботі [5].

Останнім часом вийшла серія робіт, що присвячені аналізу ергодичності та стійкості ланцюгів Маркова [19]–[24], де основним інструментом дослідження є метод склеювання. Використовується C-склеювання, яке можна описати наступним чином: виберемо деяку множину C, поза C розклеєні ланцюги рухаються незалежно, попадаючи в C, вони склеюються з ймовірністю α, та з ймовірністю $1-\alpha$ розходяться з певним розподілом. Такий тип склеювання вивчався в книзі Г. Торрісона [18]. Коротко опишемо основні результати, що викладені в цій серії робіт. В роботі С. Джарнера та Г. Робертса [19] розвиваються результати фундаментальної роботи П. Туомінена та Р. Твіді [16], присвяченої субгеометричній ергодичності. В роботі [19] отримано результати, які дозволяють проводити дослідження субгеометричної ергодичності (або в їхньому випадку - поліноміальної ергодичності) методом пробних функцій, шляхом розв'язання певних рівнянь.

Результати С. Джарнера та Г. Робертса були узагальнені у роботі Р. Дука, Е. Молінеса та Ф. Сульєра [23]. Ця робота присвячена стійкості однорідних ланцюгів Маркова, у рівномірній та f-нормах. Під стійкістю тут розуміють близькість перехідних ймовірностей за n кроків для ланцюгів, які мають однакові перехідні ймовірністі але різні початкові розподіли. Основним методом дослідження був метод C-склеювання, що описаний вище.

Метод склеювання застосовувався не лише для однорідних ланцюгів Маркова. В роботі Р. Дука [21], за допомогою методу склеювання отримано оцінки стійкості для неоднорідних ланцюгів Маркова.

Варто зазначити, що у всіх цитованих вище роботах метод склеювання застосовувався для склеювання двох копій одного ланцюга (можливо, з іншим початковим розподілом). У роботі [25] модифікацію C-склеювання вперше було застосовано для аналізу стійкості різних ланцюгів Маркова. Під стійкістю тут розуміють близькість перехідних ймовірностей за n кроків, для двох різних ланцюгів Маркова, перехідні ймовірності за один крок яких є в певному сенсі близькими. Результати роботи [25] були узагальнені в роботі [26] для випадку не рівномірно ергодичних ланцюгів.

У роботі [28] викладено теореми, які дозволяють обчислювати моменти склеювання процесів відновлення, що необхідні для теорем про стійкість.

У даній статті метод склеювання застосовано для аналізу стійкості розподілів різних дискретних ланцюгів Маркова, у схемі, де малими припускаються збурення ймовірностей переходу за один крок, а стійкість виводиться для переходів за довільний час.

Максимальність склеювання полягає у тому, що в кожний момент переходу за один крок ланцюги продовжують рух синхронно (тобто склеєним способом) з максимально можливою імовірністю, що дорівнює повній вазі максимальної спільної компоненти відповідних розподілів переходів із поточних станів, а сам синхронний розподіл формується вказаною спільною компонентою. З доповнюючою імовірністю ланцюги рухаються незалежно один від одного.

Перша частина роботи містить формулювання результатів та приклади.

2. Основні результати, наслідки та приклади

Розглянемо дискретний простір $E = \{i, j, k, \dots\}$ з сигма-алгеброю всіх підмножин $\mathcal{E} = 2^E$. Основним вихідним об'єктом дослідження є пара стохастичних матриць $P = (P_{ij}, i, j \in E)$, $P' = (P'_{ij}, i, j \in E)$. Позначимо через P_i, E_i умовні ймовірності та математичні сподівання на ймовірнісному просторі, де заданий ланцюг Маркова $X = (X_n, n \geq 0)$ з перехідною матрицею P за один крок, з початковою умовою $X_0 = i$. Аналогічний зміст мають позначення $\mathsf{P}'_i, \mathsf{E}'_i$ для ланцюга $X' = (X'_n, n \geq 0)$ з перехідною матрицею P'.

Надалі підсумовування та обчислення верхньої межі без вказівки на множину індексів поширюється на простір E. Для матриці $Q = (Q_{ij})$ запис $Q^{(n)}$ є n-ю ступінню, а $Q_{i\bullet} = (Q_{ij}, j \in E)$ означає i-й рядок матриці Q. Позначення $x^{\pm}$ є додатною та від'ємною частиною числа x, $\delta_{ij} = 1_{i=j}$ — символи Кронекера.

2.1. **Рівномірна стійкість.** Позначимо через $\|\mu\| = \sum_j |\mu_j|$ норму повної варіації на просторі сумованих послідовностей $l_1(E) = \{\mu = (\mu_j, j \in E)\colon \|\mu\| < \infty\}$, $\mu Q_j = \sum_i \mu_i Q_{ij}$ — добуток міри μ на матрицю Q.

Умова рівномірної стійкості за один крок полягає у зближенні перехідних матриць P та P' у рівномірній нормі:

$$\exists \varepsilon \in (0,1)\colon \quad r(P, P') \equiv \sup_i \|P_{i\bullet} - P'_{i\bullet}\| /2 \leq \varepsilon. \tag{1}$$

Ця умова еквівалентна нерівності $\|\mu P - \mu P'\| \leq 2\varepsilon \|\mu\|$ для всіх мір μ.

У подальшому у схемі серій можна припускати, що $P' \to P$ при $\varepsilon \to 0$, однак наведені нижче результати мають форму нерівностей та можуть бути застосовані і для фіксованих $\varepsilon > 0$.

Умова рівномірного перемішування зводиться до відділення від одиниці взаємного коефіцієнта перемішування:

$$\exists \rho \in (0,1)\colon \quad \rho(P, P') \equiv \sup_{i \neq k} \|P_{i\bullet} - P'_{k\bullet}\| /2 \leq \rho. \tag{2}$$

Зауваження 1. Для виконання (2) при малих ε у (1) необхідно і достатньо виконання звичайної умови рівномірного перемішування на P вигляду $\rho(P, P) \leq \rho_0 < 1$, оскільки $|\rho(P', P) - \rho(P, P)| \leq r(P, P')$, та $\rho(P, P') \leq \rho_0 + \varepsilon < 1$ при достатньо малому $\varepsilon > 0$. У свою чергу, вказана умова на P еквівалентна нерівності операторного стискання

$$\|\mu P\| \leq \rho_0 \|\mu\|, \qquad \forall \mu \in l_1^0(E) \equiv l_1(E) \cap \{\mu\colon \mu(E) = 0\}. \tag{3}$$

Теорема 1. *Нехай виконана умова стійкості за крок* (1), *рівномірного перемішування* (2), *та* $\varepsilon < 1 - \rho$. *Тоді для кожного* $n \geq 1$ *рівномірно за* $i \in E$ *виконуються* *нерівності*

$$\sup_{B\subset E}\left|\mathsf{P}_i(X_n\in B)-\mathsf{P}'_i(X'_n\in B)\right|\le \varepsilon(1-\rho^n)/(1-\rho)<\varepsilon/(1-\rho). \tag{4}$$

Наслідок 1. *В умовах Теореми 1 для кожного* $n\ge 1$

$$\sup_{i,k}\sup_{B\subset E}\left|\mathsf{P}_i(X_n\in B)-\mathsf{P}'_k(X'_n\in B)\right|\le \rho^n+\varepsilon(1-\rho^n)/(1-\rho). \tag{5}$$

Наслідок 2. *В умовах Теореми 1 ланцюги* X, X' *є ергодичними з інваріантними та граничними мірами* π, π', *причому*

$$\sup_{B\subset E}|\pi(B)-\pi'(B)|\le \varepsilon/(1-\rho). \tag{6}$$

У наступному твердженні наведено оцінку стійкості через дещо більш точний показник.

Теорема 2. *Нехай матриці* T *та* h *визначені нижче при побудові склеєного ланцюга у* (30), (35), *ланцюг* X *має інваріанту міру* π, *та виконана умова мінімального перемішування*

$$\forall i,k\in E\colon\quad \lim_{n\to\infty}T^{(n)}1_{ik}=0. \tag{7}$$

Тоді для всіх $n\ge 1$ *виконуються нерівності*

$$\sup_{B\subset E}\left|\mathsf{P}'_\pi(X'_n\in B)-\pi(B)\right|\le \sup_{B\subset E}\sum_i \pi_i\left|\mathsf{P}_i(X_n\in B)-\mathsf{P}'_i(X'_n\in B)\right|\le \varepsilon_T, \tag{8}$$

де

$$\varepsilon_T\equiv \pi h(I-T)^{-1}1. \tag{9}$$

В умовах Теореми 1 має місце (7) *та з* (8) *випливають нерівності*

$$\sup_{B\subset E}|\pi(B)-\pi'(B)|\le \varepsilon_T\le \varepsilon/(1-\rho). \tag{10}$$

Зауваження 2. Умова (7) означає, що склеювання відбувається майже напевне з кожного початкового розклеєного стану. Показник (9) дорівнює усередненому часу до склеювання на події, що полягає у розклеюванні за один крок. Внаслідок (1) можна очікувати на малість ε_T. Скінченність ε_T є достатньою умовою справедливості (8), а (7) — необхідною.

Приклад 1. Нехай $E=\{1,2\}$, $P_{12}=\alpha_1$, $P_{21}=\alpha_2$, $\alpha_i\in(0,1)$, та $P'_{12}=\alpha_1-\varepsilon d_1$, $P'_{21}=\alpha_2-\varepsilon d_2$. Для виконання умови (1) на $\varepsilon>0$ необхідно і достатньо, щоб $|d_i|\le 1$. Нерівність (6) з точністю до $O(\varepsilon^2)$ має вигляд

$$\varepsilon(d_2\alpha_1-d_1\alpha_2)/(\alpha_1+\alpha_2)^2\le \varepsilon/(1-|1-\alpha_1-\alpha_2|).$$

Оцінка (6) у даному прикладі є точною за порядком ε (першого порядку), а при $\alpha_1+\alpha_2\le 1$ стала при ε для максимально можливої похибки ($d_1=-1$, $d_2=1$) також набуває точного значення $1/(\alpha_1+\alpha_2)$.

У випадку ж, коли $\alpha_1+\alpha_2>1$, відносна похибка у сталій може бути зроблена як завгодно великою при $\alpha_1+\alpha_2\uparrow 2$. Це свідчить про ту обставину, що нерівність (6) для граничних імовірностей не має самостійного значення, а є наслідком стійкості допграничних імовірностей (4). А остання якраз для перехідної матриці $P_{ij}=1-\delta_{ij}$ з $\alpha_1+\alpha_2=2$ порушується внаслідок періодичності: при збуренні $P'_{12}=1-\varepsilon<1$ маємо

$$\sup_{n>0}\left(P_{11}^{(2n)}-P_{11}^{\prime(2n)}\right)=\sup_{n>0}\left(1-\left(1+(1-\varepsilon)^{2n+1}\right)/(2-\varepsilon)\right)=(1-\varepsilon)/(2-\varepsilon),$$

що не прямує до нуля при $\varepsilon\to 0$, на відміну від перехідних імовірностей за один крок.

Отже, можливі похибки у сталій є наслідком неоптимальності використання коефіцієнта перемішування в оцінці стійкості саме граничних імовірностей. Більш точні аналітичні методи для цього викладені у [3].

Зауваження 3. Якщо умову рівномірного перемішування (2) замість матриць P та P' задовольняють їх степені $P^{(m)}$, $P'^{(m)}$, то нерівності теореми 1 та наслідків 1 та 2 залишаються справедливими, після заміни у їх правих частинах величину ε на показник $r\big(P^{(m)}, P'^{(m)}\big) \le m\varepsilon$, та додавання до них поправки $(m-1)\varepsilon$.

Приклад 2. Нехай ланцюги X, X' задовольняють умову Колмогорова: існують $o \in E$, $m \ge 1$, $d > 0$ такі, що $P^{(m)}_{io} \ge d$, $P'^{(m)}_{io} \ge d$, для всіх $i \in E$. Тоді

$$\sup_{n\ge 1}\sup_{i}\sup_{B\subset E}\big|\mathsf{P}_i(X_n \in B) - \mathsf{P}'_i(X'_n \in B)\big| \le \varepsilon m/d + \varepsilon(m-1).$$

2.2. V**-стійкість.** Нехай $V = (V_j, j \in E)$ — деяка додатна пробна функція, обмежена чи необмежена. В подальшому будемо вважати, що

$$V_i \ge 1, \qquad \sum_j P_{ij}V_j < \infty, \qquad \sum_j P'_{ij}V_j < \infty, \qquad i \in E. \tag{11}$$

Умова V-стійкості за один крок полягає у малості операторної норми [3, p. 1]

$$\exists \varepsilon_V > 0\colon\ \|P - P'\|_V \equiv \sup_i V_i^{-1}\sum_j \big|P_{ij} - P'_{ij}\big|\, V_j \le \varepsilon_V. \tag{12}$$

Замість умови рівномірного перемішування будемо використовувати *умову сильного перемішування* в термінах функції V:

$$\exists \rho_V < 1\colon \quad \sum_j \big|P_{ij} - P'_{kj}\big|\, V_j \le \rho_V(V_i + V_k), \qquad \forall i \ne k \in E. \tag{13}$$

Зауваження 4. У загальному випадку умови (12) і (13) не випливають відповідно з (1), (2). Однак при $V \equiv 1$ ці пари умов еквівалентні. Крім того, наведене у Зауваженні 1 твердження залишається змістовним і у даному випадку: умову (13) можна при малих $\varepsilon_V > 0$ накладати лише на матрицю P.

Теорема 3. *Нехай виконується умова V-стійкості за крок* (12)*, та сильного перемішування* (13)*. Тоді для всіх $i \in E$ та $n \ge 1$ виконується нерівність*

$$\sup_{|f|\le V}\big|\mathsf{E}_i\, f(X_n) - \mathsf{E}'_i\, f(X'_n)\big| \le \varepsilon_V K_i^{(n)}(1 - \rho_V^n)/(1 - \rho_V), \tag{14}$$

де

$$K_i^{(n)} = \sup_{t<n}\mathsf{E}_i\, V(X_t). \tag{15}$$

Зауваження 5. З припущення (11) випливає, що ліва частина (4) не перевищує $1/2$ від лівої (та правої) частини (14).

Приклад 3. Існують навіть скінченні ланцюги Маркова, для яких умова рівномірного перемішування (1) порушується, однак виконана умова сильного перемішування (13) при належному виборі пробної функції V. Так, для ланцюга з $E = \{0, 1, 2\}$ з перехідною матрицею

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

показник $r(P, P) = 1$, однак при виборі $V = (1, 1, v)$, де стала $v \in (1, 1 + 2\beta/\gamma)$, виконуються умова (13) при $P' = P$.

Наслідок 3. *Нехай для ланцюга X з перехідною матрицею P знайдеться множина станів $O \subset E$ та стала $\rho_O < 1$ такі, що для деякої пробної функції*

$$V = (V_j, j \in O \cup \overline{O})$$

виконуються умови:

$$\sum_{j \in O} P_{ij} V_j + \sum_{j \notin O} P_{ij} V_j \le \rho_O V_i, \qquad \forall i \notin O,\ V_i \ge 1,\ i \in E, \tag{16}$$

$$\sum_j |P_{ij} - P_{kj}|\, V_j \le \rho_O (V_i + V_k), \qquad \forall i \in E,\ k \in O,\ i \ne k. \tag{17}$$

Якщо виконується умова V-стійкості за крок (12), *та $\varepsilon_V < 1 - \rho_O$, то для всіх $i \in E$ та $n \ge 1$ виконується нерівність*

$$\sup_{|f| \le V} \left| \mathsf{E}_i f(X_n) - \mathsf{E}'_i f(X'_n) \right| \le \varepsilon_V K_i^{(n)} / (1 - \rho_O - \varepsilon_V), \tag{18}$$

де

$$K_i^{(n)} = \sup_{t<n} \mathsf{E}_i V(X_t) \le \max\left(V_i, \sup_{i \in O} \sum_j P_{ij} V_j / (1 - \rho_O) \right). \tag{19}$$

Зауваження 6. У випадку, коли $E = \mathbb{Z}_+$, нерівності (16) перетворюються на рівності при $V_i = \mathsf{E}_i v^{\theta_0}$, $i \notin O$, для деякого $v > 1$, та $V_i = 1$, $i \in O$, де момент досягнення $\theta_0 = \inf(n \ge 1\colon X_n \in O)$, а $\rho_O = v^{-1}$, у припущенні скінченності V_i. У загальному випадку форма умов (16), (17) обумовлена доцільним методом їх перевірки. На першому етапі фіксуємо значення $(V_i, i \in O)$, що входять у ліву частину, та розв'язуємо систему нерівностей (16) відносно $(V_i, i \notin O)$ — наприклад, через моменти першого досягнення множини O. А на другому етапі перевіряємо виконання (17), як це зроблено у наступному прикладі.

Приклад 4. Знайдемо достатні умови для виконання тверджень Наслідку 3 у випадку, коли $E = \mathbb{Z}_+$, а $O = \{0\}$.

Припустимо, ланцюг X має характер неоднорідного за простором випадкового блукання з мажорованими стрибками:

$$\exists \beta > 1\colon \quad \sup_{i \ne 0} \sum_j P_{ij} \left(\beta^{j-i} + (i-j)^+ \right) < \infty. \tag{20}$$

В такому разі можна розраховувати, що для часу досягнення

$$\theta_0 = \inf(n \ge 1\colon X_n = 0)$$

існує геометричний момент: $V_i(u) = \mathsf{E}_i u^{\theta_0} < \infty$ для деякого $u > 1$. Визначена функція задовольняє систему рівнянь $V_i(u) u^{-1} = P_{i0} + \sum_{j \ne 0} P_{ij} V_j(u)$, $i \ne 0$. Якщо припустити також, що ланцюг однорідний за простором та неперервний знизу, то має місце зображення $V_i(u) = v^i$, $i \ne 0$, де $v = \mathsf{E}_1 u^{\tau_{10}}$, а моменти $\tau_{i,i-1}$ досягнення стану $i-1$ зі стану i незалежні однаково розподілені, причому $\theta_0 = \sum_{i=1}^{X_0} \tau_{i,i-1}$. Отже, функція $V = (V_i = v^i, i \ne 0)$ задовольняє умову (16) Наслідку 3 зі сталою $\rho_O = u^{-1} < 1$. З (16) виводимо, що $\sum_j P_{ij} V_j \le \rho_O V_i$ для всіх $i \ne 0$, якщо обрати $V_0 = 1$. Замість усіх наведених припущень просто постулюємо, що

$$\exists \beta_0 > 1\colon \quad \sup_{i \ne 0} \beta_0^{-i} \sum_j P_{ij} \beta_0^j < 1. \tag{21}$$

Для виконання (21) достатньо [3, 4], щоб одночасно з (20) виконувалась умова

$$\sup_{i \ne 0} \Delta_i < 0, \quad \text{де } \Delta_i \equiv \sum_j (j-i) P_{ij}. \tag{22}$$

Внаслідок опуклості за β_0 виразу у (21) функція $V = (v^i, i \geq 0)$ задовольняє нерівності (21) при кожному $v \in (1, \beta_0]$.

Нарешті, припустимо, що при виході зі стану $i \neq 0$ ланцюг X повинен або рухатися до 0 з позитивною швидкістю, або ж відповідний розподіл виходу має 'склеюватися' з розподілом виходу з 0 :

$$\sup_{i\neq 0} \min \left(\Delta_i + \Delta_0, \sum_j |P_{ij} - P_{0j}| - 2 \right) < 0. \tag{23}$$

За умов (20), (21), (22), (23) виконуються всі припущення Наслідку 3, та для всіх достатньо малих $v - 1 > 0$ та деяких $\rho_v < 1$ мають місце нерівності

$$\rho_i(v) \equiv (1 + v^i)^{-1} \sum_j |P_{ij} - P_{0j}|\, v^j \leq \rho_v, \qquad i \neq 0. \tag{24}$$

Тому має місце стійкість (18).

Зокрема, згадані умови виконуються для однорідного за простором ланцюга народження та загибелі з м'яким відбиттям: $P_{00} = q$, $P_{01} = p = 1 - q$, при $q > 2/3$, оскільки $\Delta_i + \Delta_0 = 2p - q < 0$, $i > 2$. Якщо ж має місце повне відбиття: $P_{00} = 0$, $P_{01} = 1$, $q \in (0, 1)$, то умова (23) порушена: $\Delta_i + \Delta_0 = p - q + 1 > 0$. Пряма перевірка свідчить, що у кожному з зазначених випадків виконання (23) еквівалентне умові (13) Теореми 3.

2.3. **Стійкість скінченновимірних розподілів.** Наведені вище нерівності стосуються стійкості одновимірних маргінальних розподілів $P_i(X_n \in B)$. У загальному випадку суттєво розширити цей клас із збереженням стійкості без додаткових умов неможливо. Дійсно, нехай P, P' — різні перехідні матриці незвідних ланцюгів з рівномірним перемішуванням. Розглянемо випадкові події

$$A_{ij} = \left\{ \lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{t<n} 1_{\{X_t = j\}} = P_{ij} \right\},$$

та аналогічні події A'_{ij} с заміною X_t на X'_t. Тоді $\mathsf{P}_i(A_{ij}) = 1$ та $\mathsf{P}'_i(A'_{ij}) = 0$ при $P_{ij} \neq P'_{ij}$. Отже, не можна розраховувати на стійкість імовірностей всіх подій $A \in \sigma[X_t, t \geq 1]$ при малих збуреннях (1) без додаткових умов.

Визначимо сигма-алгебри $\mathfrak{F}_n = \sigma[X_t, t \leq n]$, $\mathfrak{F}'_n = \sigma[X'_t, t \leq n]$ на просторах, де реалізовані траєкторії ланцюгів X, X'.

Нехай $(\mathfrak{F}_t)$-момент зупинки θ та $\mathfrak{F}_\theta$-вимірна величина φ задаються невипадковими множинами $B_n \subset E^n$ та функціями $\varphi_n \colon E^n \to \mathbb{R}$ так, що

$$\{\theta = n\} = \{(X_1, \dots, X_n) \in B_n\}, \qquad \varphi 1_{\{\theta = n\}} = \varphi_n(X_1, \dots, X_n). \tag{25}$$

Означення. Пара (θ', φ') з $(\mathfrak{F}'_t)$-момента зупинки θ' та $\mathfrak{F}'_{\theta'}$-вимірної випадкової величини φ' відповідна до пари (θ, φ), якщо події $\{\theta' = n\}$ та величини $\varphi' 1_{\{\theta' = n\}}$ задаються тими самими B_n та φ_n, що і у (25). Аналогічно, пара (θ', A') з $(\mathfrak{F}'_t)$-момента зупинки θ' та події $A' \in \mathfrak{F}'_{\theta'}$ відповідна до пари (θ, A), якщо відповідними є пари $(\theta', 1_{A'})$ та $(\theta, 1_A)$.

Теорема 4. *Нехай виконується умова стійкості за крок* (1), $\theta \geq 1$ — *інтегрований* $(\mathfrak{F}_t)$*-момент зупинки, сталі* $\alpha, \beta \geq 1$ — *спряжені* ($1/\alpha + 1/\beta = 1$)*, а випадкова величина* φ — *невід'ємна,* $\mathfrak{F}_\theta$*-вимірна та* $\varphi \in L_\alpha(\mathsf{P}_i)$. *Якщо пара* (θ', φ') *з* $(\mathfrak{F}'_t)$*-момента зупинки* θ' *та* $\mathfrak{F}'_{\theta'}$*-вимірної випадкової величини* φ' *відповідна до пари* (θ, φ), *то*

$$\left| \mathsf{E}_i\, \varphi - \mathsf{E}'_i\, \varphi' \right| \leq (\varepsilon\, \mathsf{E}_i\, \theta)^{1/\beta}\, K_i^{(\alpha)}(\varphi), \tag{26}$$

де

$$K_i^{(\alpha)}(\varphi) = \left(\max(\mathsf{E}_i\, \varphi^\alpha, \mathsf{E}'_i\, \varphi'^\alpha) \right)^{1/\alpha}.$$

Наслідок 4. *Нехай виконується умова стійкості за крок (1), $\theta \geq 1$ — інтегрований $(\mathfrak{F}_t)$-момент зупинки, а подія $A \in \mathfrak{F}_\theta$. Якщо пара (θ', A') з $(\mathfrak{F}'_t)$-момента зупинки θ' та події $A' \in \mathfrak{F}'_{\theta'}$ відповідна до пари (θ, A), то*

$$\left|\mathsf{P}_i(A) - \mathsf{P}'_i(A')\right| \leq \varepsilon\, \mathsf{E}_i\, \theta. \tag{27}$$

Приклад 5. Якщо виконується умова стійкості (1), $o \in E$ м.н. поглинаючий стан для ланцюгів X, X', а момент зупинки $\theta = \inf(t \geq 1\colon X_t = o)$, то для всіх $A \in \mathfrak{F}_\infty$ та відповідних $A' \in \mathfrak{F}'_\infty$ має місце нерівність (27).

Приклад 6. За умови (1) для $A \in \mathfrak{F}_m$ та відповідної події $A' \in \mathfrak{F}'_m$ виконується нерівність $\left|\mathsf{P}_i(A) - \mathsf{P}'_i(A')\right| \leq \varepsilon m$.

3. Максимальне склеювання ланцюгів

Позначимо множину $D = \{0, 1\}$ та визначимо ймовірність переходу за крок та траєкторії 'склеєного' ланцюга Маркова $\overline{X}$ зі станами вигляду

$$\overline{X}_n = (X_n, X'_n, d_n) \in E \times E \times D$$

так, щоб його координати X_n, X'_n були ланцюгами Маркова з перехідними матрицями P, P' та мали б найбільшу імовірність склеювання $\{X_n = X'_n\}$. Умовні імовірності та умовні сподівання для такого ланцюга за умови $\overline{X}_0 = (i, k, d)$ будемо позначати через P_{ikd}, E_{ikd} відповідно.

У наведених нижче означеннях може зустрітися розподіл на E вигляду a_j/a, де $a = 0$. За означенням оберемо його рівним фіксованому розподілу, наприклад, δ_{oj}, $j \in E$. Цей вибір не впливає на результат, оскільки гарантується, що $a = \sum a_j$, тобто відповідні події не відбудуться м.н.

Визначимо початковий стан $\overline{X}_0 = (i, k, \delta_{ik})$.

3.1. **Розклеювання за крок.** Визначимо субстохастичну матрицю $Q = (Q_{ij})$ та вектор вагів:

$$Q_{ij} = \min(P_{ij}, P'_{ij}), \qquad q_i = \sum_j Q_{ij}. \tag{28}$$

Розглянемо субстохастичні матриці

$$\begin{gathered} R = (R_{ij}) = P - Q, \qquad R' = (R'_{ij}) = P' - Q, \\ R_{ij} = (P_{ij} - P'_{ij})^+, \qquad R'_{ij} = (P'_{ij} - P_{ij})^+, \end{gathered} \tag{29}$$

де використано тотожність $x = \min(x, y) + (x - y)^+$.

Визначимо також субстохастичну $E \times E^2$ матрицю

$$h_{i,jl} = R_{ij} R'_{il} / (1 - q_i), \qquad i, j, l \in E. \tag{30}$$

Оберемо перехідні ймовірності ланцюга $\overline{X}$ за один крок зі станів з $d_0 = 1$:

$$\mathsf{P}_{ii1}(\overline{X}_1 = (j, l, 1)) = Q_{ij} \delta_{jl}, \qquad j, l \in E, \tag{31}$$

$$\mathsf{P}_{ii1}(\overline{X}_1 = (j, l, 0)) = h_{i,jl}, \qquad j, l \in E. \tag{32}$$

Нескладний підрахунок показує, що

$$\begin{gathered} \mathsf{P}_{ii1}(X_1 = j, X'_1 \in E, d_1 \in D) = P_{ij} = \mathsf{P}_i(X_1 = j), \\ \mathsf{P}_{ii1}(X_1 \in E, X'_1 = l, d_1 \in D) = P'_{il} = \mathsf{P}'_i(X'_1 = l), \end{gathered} \tag{33}$$

тобто маргінальні імовірності переходів для координат X_1, X'_1 задаються матрицями P, P'. Крім того, з рівності $h_{i,jj} = 0$, що випливає з (29), виводимо, що при даному переході $\{d_1 = 1\} = \{X_1 = X'_1\}$.

3.2. **Склеювання за крок.** Визначимо при $i \neq k$ субстохастичні матриці та вектор вагів

$$g_{ik,j} = \min(P_{ij}, P'_{kj}), \qquad q_{ik} = \sum_j g_{ik,j},$$

$$S_{ik,j} = P_{ij} - g_{ik,j} = (P_{ij} - P'_{kj})^+, \qquad S'_{ik,l} = P'_{kl} - g_{ik,l} = (P'_{kl} - P_{il})^+, \tag{34}$$

а також субстохастичну $E^2 \times E^2$ матрицю

$$T_{ik,jl} = S_{ik,j} S'_{ik,l}/(1 - q_{ik}). \tag{35}$$

Оберемо при $d_0 = 0$, $i \neq k$

$$\mathsf{P}_{ik0}(\overline{X}_1 = (j,l,1)) = g_{ik,j}\delta_{jl}, \tag{36}$$

$$\mathsf{P}_{ik0}(\overline{X}_1 = (j,l,0)) = T_{ik,jl}, \tag{37}$$

Як і вище, підсумовуванням знаходимо

$$\mathsf{P}_{ik0}(X_1 = j, X'_1 \in E, d_1 \in D) = P_{ij} = \mathsf{P}_i(X_1 = j),$$

$$\mathsf{P}_{ik0}(X_1 \in E, X'_1 = l, d_1 \in D) = P'_{kl} = \mathsf{P}'_k(X'_1 = l). \tag{38}$$

З тотожності $T_{ik,jj} = 0$, що випливає з (34), виводимо, що $\{d_1 = 1\} = \{X_1 = X'_1\}$.

3.3. **Побудова траєкторій.** Позначимо через $\mathfrak{P}$ зліченну сім'ю типів дискретних розподілів на E, склад якої визначається формулами (31), (32), (36), (37).

Розглянемо послідовність незалежних у сукупності випадкових величин

$$\mathfrak{C} = \bigcup_{n \geq 1} \mathfrak{C}_n,$$

де множина

$$\mathfrak{C}_n = \{(\chi_i^n, \varkappa_{ik}^n, i,k \in E), (\lambda_n(p), \lambda'_n(p), p \in \mathfrak{P})\}. \tag{39}$$

містить незалежні у сукупності випадкові величини такі, що

$$\chi_i^n, \varkappa_{ik}^n \in \{0,1\}, \mathsf{P}(\chi_i^n = 1) = q_i, \mathsf{P}(\varkappa_{ik}^n = 1) = q_{ik},$$

$$\mathsf{P}(\lambda_n(p) = j) = \mathsf{P}(\lambda'_n(p) = j) = p_j, j \in E. \tag{40}$$

Визначимо початковий стан $\overline{X}_0 = (X_0, X'_0, d_0) = (i, k, \delta_{ik})$, $i,k \in E$, а далі за індукцією при $n \geq 1$:

(0) на множині $\{X_{n-1} = i, X'_{n-1} = i, d_{n-1} = 1\}$ оберемо

$$Y_n = \lambda_n(Q_{i\bullet}/q_i),$$

$$X_n = \chi_i^n Y_n + (1 - \chi_i^n)\lambda_n(R_{i\bullet}/\ (1 - q_i)),$$

$$X'_n = \chi_i^n Y_n + (1 - \chi_i^n)\lambda'_n(R'_{i\bullet}/(1 - q_i)),$$

$$d_n = \chi_i^n = 1_{\{X_n = X'_n\}}. \tag{41}$$

(1) на множині $\{X_{n-1} = i, X'_{n-1} = k, d_{n-1} = 0\}$, $i \neq k$, оберемо

$$Y_n = \lambda_n(g_{ik,\bullet}/q_{ik}),$$

$$X_n = \varkappa_{ik}^n Y_n + (1 - \varkappa_{ik}^n)\lambda_n(S_{ik,\bullet}/(1 - q_{ik})),$$

$$X'_n = \varkappa_{ik}^n Y_n + (1 - \varkappa_{ik}^n)\lambda'_n(S'_{ik,\bullet}/(1 - q_{ik})),$$

$$d_n = \varkappa_{ik}^n = 1_{\{X_n = X'_n\}}. \tag{42}$$

З цього означення випливає, що послідовність $\overline{X}$ задовольняє рекурентне рівняння вигляду $\overline{X}_n = f(\overline{X}_{n-1}, \mathfrak{C}_n)$ з невипадковою функцією f. Враховуючи незалежність величин у системі $\mathfrak{C}$ при різних n, звідси виводимо марковську властивість послідовності $\overline{X}$, а з однакової розподіленості векторів $\mathfrak{C}_n$ — однорідність за часом ланцюга $\overline{X}$. Нарешті, формули (31), (32), (36), (37) за означенням збігаються з імовірностями переходів за один крок у (41), (42).

Далі, з урахуванням співвідношень (33), (38) за індукцією виводимо, що для всіх $n \geq 1$, $i, k, j, l \in E$, $d = \delta_{ik}$ мають місце рівності

$$\begin{gathered} \mathsf{P}_{ikd}(X_n = j, X'_n \in E, d_n \in D) = P_{ij}^{(n)} = \mathsf{P}_i(X_n = j), \\ \mathsf{P}_{ikd}(X_n \in E, X'_n = l, d_n \in D) = P_{kl}^{\prime(n)} = \mathsf{P}'_k(X'_n = l), \\ \mathsf{P}_{ikd}(\{X_n = X'_n\} \Delta \{d_n = 1\}) = 0. \end{gathered} \tag{43}$$

З цих рівностей випливає таке твердження.

Зауваження 7. Послідовність $\widetilde{X} = (X_n, X'_n) \in E^2$ є ланцюгом Маркова, що належить класу ланцюгів $\widetilde{Y} = (Y_n, Y'_n)$ таких, що

$$\mathsf{P}(Y_1 = j \mid \widetilde{Y}_0 = (i,k)) = P_{ij}, \mathsf{P}(Y'_1 = l \mid \widetilde{Y}_0 = (i,k)) = P'_{kl}.$$

Максимальна властивість $\widetilde{X}$ полягає у тому, що при однакових початкових імовірностях $\mathsf{P}(\widetilde{Y}_0 = (i,k)) = \mathsf{P}(\widetilde{X}_0 = (i,k))$ виконуються нерівності

$$\mathsf{P}(Y_1 = Y'_1) \leq \mathsf{P}(X_1 = X'_1). \tag{44}$$

Автори щиро вдячні рецензенту за цінні поради та зауваження.

Література

1. W. Doeblin, *Expose de la theorie des chaines simples constantes de Markov a un nomber fini d'estats*, Mathematique de l'Union Interbalkanique **2** (1938), 77–105.
2. W. Feller, *An Intoduction to Probability Theory and its Applications*, vol. 1, John Wiley & Sons, New York, 1966.
3. N. V. Kartashov, *Strong Stable Markov Chains*, VSP, Utrecht, The Netherlands, 1996.
4. Н. В. Карташов, *Экспоненциальная асимптотика матрицы марковского восстановления*, Асимптотические задачи для случайн. процессов, Препр. Ин-та матем. АНУ, № 77-24, Киев, 1977, стр. 2–43.
5. E. Nummelin, *A splitting technique for Harris recurrent chains*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie and Verw. Geb. **43** (1978), 309–318.
6. E. Nummelin and R. L. Tweedie, *Geometric ergodicity and R-positivity for general Markov chains*, Ann. Probab. **6** (1978), 404–420.
7. T. Lindvall, *On coupling of discrete renewal sequences*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **48** (1979), 57–70.
8. И. Н. Коваленко, Н. Ю. Кузнецов, *Построение вложенного процесса восстановления для существенно многомерных процессов теории массового обслуживания и его применение к получению предельных теорем*, Препринт АН УССР, № 80-12, Институт кибернетики, Киев, 1980.
9. P. Ney, *A refinement of the coupling method in renewal theory*, Stochastic Processes Appl. **11** (1981), 11–26.
10. E. Numemelin and P. Tuominen, *Geometric ergodicity of Harris recurrent Markov chains with applicatoins to renewal theory*, Stoch. Proc. Appls. **12** (1982), 187–202.
11. E. Nummelin, *General Irreducible Markov Chains and Nonnegative Operators*, Cambridge University Press, Cambridge, 1984.
12. В. М. Золотарев, *Современная теория суммирования независимых случайных величин*, "Наука", Москва, 1986.
13. С. Т. Рачев, *Задача Монжа–Канторовича о перемещении масс и ее применения в стохастике*, Теория вероятностей и примен., **29** (1984), № 4, 625–653.
14. T. Lindvall, *Lectures on the Coupling Method*, John Wiley and Sons, 1991.
15. S. P. Mayn and R. L. Tweedie, *Markov chains and Stochastic Stability*, Springer-Verlag, 1993.
16. P. Tuominen and R. Tweedie, *Subgeometric rates of convergence of f-ergodic Markov chains*, Adv. in Appl. Probab. **26** (1994), 775–798.
17. R. L. Tweedie and J. N. Corcoran, *Perfect sampling of ergodic Harris chains*, Annals of Applied Probability **11** (2001), no. 2, 438–451.
18. H. Thorisson, *Coupling, Stationarity, and Regeneration*, Springer, New York, 2000.

19. S. F. Jarner and G. O. Roberts, *Polynomial convergence rates of Markov chains*, Annals of Applied Probability **12** (2001), 224–247.
20. R. Douc, E. Moulines, and J. S. Rosenthal, *Quantitative bounds for geometric convergence rates of Markov chains*, Annals of Applied Probability **14** (2004), 1643–1664.
21. R. Douc, E. Mouliness, and J. S. Rothenthal, *Quantitative bounds on convergence of Time-inhomogeneous Markov chains*, Annals of Applied Probability **14** (2004), no. 4, 1643–1665.
22. R. Douc, E. Moulines, and P. Soulier, *Practical drift conditions for subgeometric rates of convergence*, Annals of Applied Probability **14** (2004), no. 4, 1353–1377.
23. R. Douc, E. Moulines, and P. Soulier, *Computable convergence rates for subgeometrically ergodic Markov Chains*, Bernoulli **13** (2007), no. 3, 831–848.
24. R. Douc, G. Fort, and A. Guillin, *Subgeometric rates of convergence of f-ergodic strong Markov processes*, Stochastic Processes and their Applications **119** (2009), no. 3, 897–923.
25. В. В. Голомозий, *Стійкість неоднорідних ланцюгів Маркова*, Вісник Київського університету, Серія: фіз.-мат. науки **4** (2009), 10–15.
26. В. В. Голомозий, *Субгеометрична оцінка стійкості для однорідних ланцюгів Маркова*, Теорія ймовір. та матем. статист. **81** (2010), 31–46.
27. М. В. Карташов, *Обмеженість, границі та стійкість розв'язків неоднорідного збурення рівняння відновлення на півосі*, Теорія ймовір. та матем. статист. **81** (2009), 65–75.
28. М. В. Карташов, В. В. Голомозий, *Середній час склеювання незалежних дискретних процесів відновлення*, Теорія ймовір. та матем. статист. **84** (2011), 78–85.

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Національний університет ім. Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, 01033, Київ, Україна
Адреса електронної пошти: nkartashov@skif.com.ua

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Національний університет ім. Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, 01033, Київ, Україна

Надійшла 07/10/2011