Теорія ймовір. та матем. статист. Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
Вип. 87, 2012, стор. 120–135 No. 87, 2012, pp. 120–135

ОЦІНКИ ЙМОВІРНОСТІ ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМИ ВИПАДКОВИХ РІВНЯНЬ У ЗАДАНІЙ МНОЖИНІ ВЕКТОРІВ НАД ПОЛЕМ GF(3)

УДК 519.21

В. І. МАСОЛ І Л. О. РОМАШОВА

Анотація. Знайдено необхідну і достатню умову, за якою ймовірність існування розв'язків системи нелінійних випадкових рівнянь 2-го порядку над полем $\mathbf{GF}(3)$ у заданій множині векторів прямує до нуля за $n \to \infty$, де n — кількість невідомих у вихідній системі. Отримано оцінки швидкості збіжності до нуля зазначеної ймовірності та наведено приклади їх використання.

Abstract. The system of non-lineary random equations of the second order over the field is considered. The necassary and sufficient condition that, as, the probability that this system has solutions in the given set of vectors tends to zero is found, where is the number of unknowns in the initial system of equations. The estimates of the speed of convergence of the above probability to zero are found, and examples of their applications are given.

Аннотация. Найдено необходимое и достаточное условие, при котором вероятность существования решений системы нелинейных случайных уравнений 2-го порядка над полем в заданном множестве векторов стремится к нулю при, где — количество неизвестных в исходной системе. Получены оценки скорости сходимости к нулю указанной вероятности и приведены примеры их применения.

1. Постановка задачі. Формулювання основних результатів

Нехай задана система нелінійних випадкових рівнянь 2-го порядку

$$\sum\nolimits_3_{1 \le j_1 < j_2 \le n} a^{(\mu)}_{j_1 j_2} x_{j_1} x_{j_2} = \mathbf{0}, \qquad \mu \in J, \tag{1}$$

над полем $\mathbf{GF}(3)$, що складається з трьох елементів, де $\sum_3$ позначає сумування у полі $\mathbf{GF}(3)$, $J = \{1, \dots, T\}$, $T = T(n)$.

Будемо вважати, що система (1) задовольняє умову (A), а саме: коефіцієнти $a^{(\mu)}_{j_1 j_2}$, $1 \le j_1 < j_2 \le n$, $\mu \in J$ — незалежні випадкові величини, кожна з яких приймає значення у полі $\mathbf{GF}(3)$ з ймовірністю $\mathsf{P}\{a^{(\mu)}_{j_1 j_2} = \mathbf{1}\} = \mathsf{P}\{\mathbf{a}^{(\mu)}_{\mathbf{j_1 j_2}} = \mathbf{2}\} = \mathbf{p}_\mu$ та значення $\mathbf{0} \in \mathbf{GF}(3)$ з ймовірністю $\mathsf{P}\{a^{(\mu)}_{j_1 j_2} = \mathbf{0}\} = 1 - 2p_\mu$.

Позначимо V_n — сукупність усіх n-вимірних векторів $\bar{x}$, $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, компоненти яких належать полю $\mathbf{GF}(3)$, та $V_n' = V_n \setminus \{\bar{x}\colon\ |\bar{x}| \le 1\}$, де $|\bar{x}|$ — число ненульових компонент вектора $\bar{x}$.

Для довільних векторів $\bar{x}^{(1)}$, $\bar{x}^{(2)}$, де $\bar{x}^{(q)} \in V_n$, $\bar{x}^{(q)} = \big(x_1^{(q)}, \dots, x_n^{(q)}\big)$, $q = 1, 2$, введемо у розгляд число $i_{c_1 c_2}$, що дорівнює кількості пар компонент виду (c_1, c_2) серед n можливих пар $\big(x_j{}^{(1)}, x_j{}^{(2)}\big)$, $1 \le j \le n$, де $c_1, c_2 \in \mathbf{GF}(3)$.

Нехай $i = i_{\mathbf{01}} + i_{\mathbf{02}}$, $l = i_{\mathbf{10}} + i_{\mathbf{20}}$.

Ключові слова і фрази. Система нелінійних випадкових рівнянь, ймовірність існування розв'язків, швидкість збіжності, поле з трьох елементів.

Позначимо M_n довільну максимальну за включенням підмножину множини V_n' таку, що довільні вектори $\bar{x}^{(1)}$, $\bar{x}^{(2)} \in V_n'$ належать M_n тоді і тільки тоді, коли

$$i + l \geq 1. \tag{2}$$

Наприклад, для $n = 3$ маємо $M_3 = \{(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{0}), (\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{2}), (\mathbf{0},\mathbf{2},\mathbf{2}), (\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{1})\}$.

Нехай випадкова величина θ_n дорівнює кількості розв'язків системи (1), які належать множині M_n.

У подальшому будемо вважати, що ймовірність p_μ змінюється в інтервалі

$$\frac{c \ln n}{n} \leq p_\mu \leq \frac{1}{2} - \frac{c \ln n}{n}, \tag{3}$$

де $\ln 3 / \ln 2 < a_1 \leq c = c(n) \leq a_2 < \infty$, $\{a_r \colon r = 1, 2, \dots\}$ — послідовність обмежених додатних сталих.

Теорема 1.1. *Нехай виконуються умови* (A) *та* (3).

Тоді умова

$$T = n \frac{\ln 2}{\ln 3} + A_n, \tag{4}$$

де $A_n \to \infty$, $n \to \infty$, є необхідною та достатньою для того, щоб мало місце співвідношення

$$\mathsf{P}\{\theta_n > 0\} = o(1), n \to \infty. \tag{5}$$

Зауваження 1.1. Питання про існування розв'язків у заданій множині векторів системи рівнянь, що відрізняється від (1) правою частиною, розглянуто в [2]. В роботі [1] вивчення спеціальних розв'язків однорідної системи лінійних випадкових рівнянь над скінченним полем поєднується з дослідженням спеціальних розв'язків випадкового лінійного включення.

Теорема 1.2. *Нехай виконуються умови* (A), (3), (4) *і параметри* ε_1, $\varepsilon_1 \in (0,1)$, *та* c *змінюються таким чином, що*

$$0 < \gamma_1 \leq \varepsilon_1 c \leq \gamma_0 < \frac{4}{3}\left(1 - \frac{\ln 3}{c \ln 2}\right),$$

де γ_0 і γ_1 фіксовані числа.

Тоді знайдуться число ε_2, $\varepsilon_2 \in (0,1)$, та натуральне число n_0, $n_0 = n_0(\varepsilon_1, \varepsilon_2, c)$, що для $n \geq n_0$ має місце наступна нетривіальна оцінка $\mathsf{P}\{\theta_n > 0\} \leq Z_1$, де

$$Z_1 = \sum_{t=2}^{\left[\sqrt{\frac{\varepsilon_1 n}{\ln n}}\right]} \frac{1}{t!} \left(\frac{1}{n^{c \frac{\ln 2}{\ln 3}\left(1 - \frac{\ln 3}{c \ln 2} - \frac{3}{4}\gamma_0\right)}} \right)^t \left(\frac{1}{n^{c \frac{A_n}{n}\left(1 - \frac{3}{4}\gamma_0 + \frac{3}{4} c \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \ln n}{n}} + \frac{3}{4} c \frac{\ln 2}{\ln 3} \frac{\sqrt{\varepsilon_1 n \ln n}}{A_n}\right)}} \right)^t$$
$$+ 2^{n\sigma(\varepsilon_2)} \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3 e^{\frac{3}{2}\gamma_1\left(1 + \sqrt{\frac{\ln n}{\varepsilon_1 n}}\right)}} \right)^{n \frac{\ln 2}{\ln 3} + A_n}$$
$$+ \left(\frac{\exp\left\{ \frac{2}{n^{\frac{3}{2} n c \varepsilon_2^2 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_2 n}\right)}} \right\}}{3} \right)^{A_n} \exp\left\{ \frac{2 \ln 2}{n^{\frac{3}{2} n c \varepsilon_2^2 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_2 n}\right) - 1} \ln 3} \right\},$$

$\sigma(\varepsilon_2) = -\varepsilon_2 \log_2 \varepsilon_2 - (1 - \varepsilon_2) \log_2 (1 - \varepsilon_2)$.

Теорема 1.3. *Нехай виконуються умови* (A), (3), (4) *і параметри* ε_1 *та* c *змінюються таким чином, що*

$$0 < \beta_1 \leq \varepsilon_1 c \leq \beta_0 < \frac{4}{3}\left(1 - \frac{(1+\alpha)\ln 3}{c \ln 2}\right),$$

де α, β_0 і β_1 фіксовані числа такі, що $\alpha > 0$,

$$\alpha + \frac{3}{4}\beta_0 < 1 - \frac{\ln 3}{a_1 \ln 2}.$$

Тоді для довільного фіксованого ε_2, $\varepsilon_2 \in (0,1)$, існує натуральне число n_0, $n_0 = n_0(\varepsilon_1, \varepsilon_2, c)$, таке що для $n \ge n_0$ має місце наступне співвідношення $\mathsf{P}\{\theta_n > 0\} \le Z_2$, де

$$Z_2 = \frac{e}{n^{2\alpha}} + 2^{n\sigma(\varepsilon_2)}\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3e^{\frac{3}{2}\beta_1}}\right)^{n\frac{\ln 2}{\ln 3}} + \left(\frac{\exp\left\{\frac{2}{n^{\frac{3}{2}nc\varepsilon_2^2}}\right\}}{3}\right)^{A_n} \exp\left\{\frac{2\ln 2}{n^{\frac{3}{2}nc\varepsilon_2^2-1}\ln 3}\right\}.$$

Зауваження 1.2. В умовах теореми 1.2 (теореми 1.3) оцінка Z_1 (Z_2) прямує до 0, якщо $n \to \infty$.

2. Явний вигляд перших двох факторіальних моментів випадкової величин θ_n

Лема 2.1. *Якщо виконується умова* (A), *то*

$$\mathsf{E}\,\theta_n = 3^{-T}\sum_{t=2}^{n}\binom{n}{t}Q_t, \tag{6}$$

де

$$Q_t = \prod_{\mu=1}^{T}\left(1 + 2(1-3p_\mu)^{\binom{t}{2}}\right). \tag{7}$$

Доведення. Нехай $\xi(\bar{x})$ — індикатор події, яка полягає у тому, що вектор $\bar{x}$, $\bar{x} \in M_n$, є розв'язком системи (1). Враховуючи умову (A), отримуємо

$$\mathsf{E}\,\theta_n = \sum_{\bar{x}:\bar{x}\in M_n}\mathsf{E}\,\xi(\bar{x}) = \sum_{\bar{x}:\bar{x}\in M_n}\prod_{\mu=1}^{T}\mathsf{P}\left(\sum\nolimits_{3}{}_{1\le j_1<j_2\le n} a_{j_1j_2}^{(\mu)}x_{j_1}x_{j_2} = \mathbf{0}\right). \tag{8}$$

Позначимо через t число ненульових компонент довільного фіксованого вектора $\bar{x} \in M_n$. Далі нам потрібно буде співвідношення, яке наведено в [2], а саме:

$$\mathsf{P}\{\xi = a\} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(1-3p^*)^k, \qquad a \in \mathbf{GF}(3),\ a \ne \mathbf{0}, \tag{9}$$

де $\xi = \xi_1 +_3 \cdots +_3 \xi_k$, $\xi_1, \ldots, \xi_k$ — незалежні однаково розподілені випадкові величини, $\mathsf{P}\{\xi_s = a\} = p^*$, $a \in \mathbf{GF}(3)$, $a \ne \mathbf{0}$, $\mathsf{P}\{\xi_s = \mathbf{0}\} = 1 - 2p^*$, $s = 1, \ldots, k$, $1 \le k < \infty$, $+_3$ — операція сумування в полі $\mathbf{GF}(3)$. Використовуючи (9), отримуємо

$$\prod_{\mu=1}^{T}\mathsf{P}\left(\sum\nolimits_{3}{}_{1\le j_1<j_2\le n} a_{j_1j_2}^{(\mu)}x_{j_1}x_{j_2} = \mathbf{0}\right) = 3^{-T}Q_t. \tag{10}$$

Кількість векторів у множині M_n, які мають t ненульових компонент, дорівнює біноміальному коефіцієнту $\binom{n}{t}$. Отже, за допомогою (10) рівність (8) можна переписати у вигляді (6). □

Нехай $I = \{i_{\mathbf{01}}, i_{\mathbf{02}}, i_{\mathbf{10}}, i_{\mathbf{20}}, i_{\mathbf{11}}, i_{\mathbf{22}}, i_{\mathbf{12}}, i_{\mathbf{21}}\}$.

Лема 2.2. *Якщо виконується умова (A), то*

$$\mathsf{E}\,\theta_n^{[2]} = 9^{-T}\sum_{t=3}^{n}\binom{n}{t}\sum_{i+l+h=t}\frac{t!}{h!\,i!\,l!}Q_t^*, \tag{11}$$

де

$$Q_t^* = \prod_{\mu=1}^{T}\left(1+2\left(\sum_{r=1}^{4}(1-3p_\mu)^{\Gamma^{(r)}}\right)\right), \tag{12}$$

сумування $\sum$ *відбувається за всіма* i, l, h *такими, що* $i+l+h=t$, $t-i\geq 2$, $t-l\geq 2$ *та* $i+l\geq 1$; *параметри* $\Gamma^{(r)}$, $r=1,\ldots,4$, *визначаються відповідно рівностями*

$$\Gamma^{(1)} = \binom{l}{2}+\binom{i}{2}+(i+l)(t-l-i), \tag{13}$$

$$\Gamma^{(2)} = \binom{t-l}{2}, \tag{14}$$

$$\Gamma^{(3)} = \binom{t-i}{2}, \tag{15}$$

$$\Gamma^{(4)} = \binom{l}{2}+\binom{i}{2}+\binom{t-l-i}{2}+(i+l)(t-l-i). \tag{16}$$

Доведення. Користуючись умовою (A), визначенням $\mathsf{E}\,\theta_n^{[2]} = \mathsf{E}\,\theta_n(\theta_n-1)$ та представленням $\theta_n = \sum_{\bar{x}:\bar{x}\in M_n}\xi(\bar{x})$, отримуємо співвідношення

$$\mathsf{E}\,\theta_n^{[2]} = \sum\nolimits_1 \mathsf{E}\,\xi(\bar{x}^{(1)})\xi(\bar{x}^{(2)}), \tag{17}$$

де сумування $\sum_1$ виконується за всіма парами векторів $\left(\bar{x}^{(1)},\bar{x}^{(2)}\right)$ такими, що $\bar{x}^{(q)}\in M_n$, $q=1,2$, $\bar{x}^{(1)}\neq\bar{x}^{(2)}$. За допомогою (17) знаходимо

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\,\theta_n^{[2]} &= \sum\nolimits_1 \prod_{\mu=1}^{T}\mathsf{P}\left\{\bigcup\left\{A^{(\mu)}\left(\bar{x}^{(k)}\right)=y_k, A^{(\mu)}\left(\bar{x}^{(1)},\bar{x}^{(2)}\right)=y_{12}, k=1,2\right\}\right\}\\ &= \sum\nolimits_1 \prod_{\mu=1}^{T}\sum\nolimits_2 \mathsf{P}\left\{A^{(\mu)}\left(\bar{x}^{(1)},\bar{x}^{(2)}\right)=y_{12}\right\}\prod_{k=1,2}\mathsf{P}\left\{A^{(\mu)}\left(\bar{x}^{(k)}\right)=y_k\right\},\end{aligned} \tag{18}$$

де символ $\bigcup$ ($\sum_2$) об'єднання (сумування) розповсюджується на всі розв'язки двох наступних рівнянь $y_1 +_3 y_{12} = \mathbf{0}$, $y_2 +_3 y_{12} = \mathbf{0}$ над полем $\mathbf{GF}(3)$; для $\mu\in J$

$$A^{(\mu)}\left(\bar{x}^{(1)},\bar{x}^{(2)}\right) = \sum\nolimits_{\substack{3\\ \omega\in E^{(12)}}} a_\omega^{(\mu)}, A^{(\mu)}\left(\bar{x}^{(q)}\right) = \sum\nolimits_{\substack{3\\ \omega\in E^{(q)}}} a_\omega^{(\mu)}, \qquad q=1,2,$$

де

$$E^{(12)} = \left\{(j_1,j_2), 1\leq j_1<j_2\leq n : x_{j_1}^{(q)}x_{j_2}^{(q)}\neq\mathbf{0}, q=1,2\right\},$$

$$E^{(q)} = \left\{(j_1,j_2), 1\leq j_1<j_2\leq n : x_{j_1}^{(q)}x_{j_2}^{(q)}\neq\mathbf{0}, x_{j_1}^{(q^*)}x_{j_2}^{(q^*)}=\mathbf{0}\right\},$$

$q\in\{1,2\}$, $q^*\in\{1,2\}$, $q^*\neq q$.

Нехай $\gamma^{(1)}$, $\gamma^{(2)}$ та $\gamma^{(3)}$ — кількість елементів відповідно множин $E^{(1)}$, $E^{(2)}$ та $E^{(12)}$.

Позначимо

$$\Gamma^{(1)} = \gamma^{(1)}+\gamma^{(2)}, \qquad \Gamma^{(2)} = \gamma^{(2)}+\gamma^{(3)}, \tag{19}$$

$$\Gamma^{(3)} = \gamma^{(1)}+\gamma^{(3)}, \qquad \Gamma^{(4)} = \gamma^{(1)}+\gamma^{(2)}+\gamma^{(3)}. \tag{20}$$

Зважаючи на умову (A) та використовуючи рівність (9), співвідношення (18) можна переписати у вигляді

$$\mathsf{E}\,\theta_n^{[2]} = 9^{-T}\sum\nolimits_1 \prod_{\mu=1}^{T}\left(1+2\left(\sum_{r=1}^{4}(1-3p_\mu)^{\Gamma^{(r)}}\right)\right). \tag{21}$$

Для довільних векторів $\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)} \in M_n$ позначимо через t загальну кількість пар виду (c_1, c_2), $(c_3, \mathbf{0})$, $(\mathbf{0}, c_4)$ серед n можливих $\left(x_j{}^{(1)}, x_j{}^{(2)}\right)$, $1 \le j \le n$, де $c_1c_2c_3c_4 \ne \mathbf{0}$, $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbf{GF}(3)$. Тоді $t = i + l + h$, а кількість пар векторів $\left(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}\right)$, для яких виконується остання рівність, визначається співвідношенням

$$\sum_{i+l+h=t} \frac{n!}{h!\, i!\, l!(n-t)!} = \binom{n}{t} \sum_{i+l+h=t} \frac{t!}{h!\, i!\, l!}.$$

Сумування $\sum_1$ у правій частині (21) за всіма парами векторів $\left(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}\right)$ такими, що $\bar{x}^{(1)} \ne \bar{x}^{(2)}$, $\bar{x}^{(q)} \in M_n$, $q = 1, 2$, еквівалентно сумуванню за всіма параметрами i, l, h, наведеного у правій частині (11). Нерівності $t - i \ge 3$, $t - l \ge 3$ та $i + l \ge 1$ гарантують виконання відповідно співвідношень $\left|\bar{x}^{(1)}\right| \ge 1$, $\left|\bar{x}^{(2)}\right| \ge 1$ та $\bar{x}^{(1)} \ne \bar{x}^{(2)}$.

Далі перевіримо рівність (13). З цією метою знайдемо явні вирази для параметрів $\gamma^{(1)}$ та $\gamma^{(2)}$.

Покажемо, що

$$\gamma^{(1)} = \left|E^{(1)}\right| = \binom{l}{2} + l\,(t - l - i)\,. \tag{22}$$

Дійсно, представимо $\gamma^{(1)}$ у вигляді суми двох доданків, а саме

$$\gamma^{(1)} = \left|E_1^{(1)}\right| + \left|E_2^{(1)}\right|, \tag{23}$$

де

$$E_1^{(1)} = \left\{(j_1, j_2), 1 \le j_1 < j_2 \le n : x_{j_1}^{(1)}, x_{j_2}^{(1)} \ne \mathbf{0}; x_{j_1}^{(2)} = x_{j_2}^{(2)} = \mathbf{0}\right\},$$
$$E_2^{(1)} = \left\{(j_1, j_2), 1 \le j_1 < j_2 \le n : x_{j_1}^{(1)}, x_{j_2}^{(1)} \ne \mathbf{0}; x_{j}^{(2)} = \mathbf{0}, x_{j^*}^{(2)} \ne \mathbf{0}\right\},$$

$j \in \{j_1, j_2\}$, $j^* \in \{j_1, j_2\}$, $j \ne j^*$.

Далі, користуючись тим, що сума $i_{\mathbf{10}} + i_{\mathbf{20}}$ — це кількість ненульових компонент вектора $\bar{x}^{(1)}$, яким відповідають нульові компоненти вектора $\bar{x}^{(2)}$ та тим, що $i_{\mathbf{11}} + i_{\mathbf{22}} + i_{\mathbf{12}} + i_{\mathbf{21}}$ — це кількість ненульових компонент вектора $\bar{x}^{(1)}$, яким відповідають ненульові компоненти вектора $\bar{x}^{(2)}$, знаходимо

$$\left|E_1^{(1)}\right| = \binom{l}{2}, \tag{24}$$

$$\left|E_2^{(1)}\right| = l\,(t - l - i)\,. \tag{25}$$

Зважаючи на (23)–(25), отримуємо (22).

Аналогічно маємо

$$\gamma^{(2)} = \left|E^{(2)}\right| = \binom{i}{2} + i\,(t - l - i)\,. \tag{26}$$

Отже, беручи до уваги (19), (22) та (26), приходимо до співвідношення (13). Нарешті, визначення множини $E^{(12)}$ дозволяє записати

$$\gamma^{(3)} = \left|E^{(12)}\right| = \binom{t - i - l}{2}. \tag{27}$$

Враховуючи (19), (26) та (27), знаходимо (14). Із (20), (23) та (27) випливає (15). Використовуючи (20), (23), (26) та (27), отримуємо (16). □

Зауваження 2.1. Із доведення леми 2.2 випливає, що сума $i + l + h$ (див. (11)) представляє собою суму елементів множини I. Зокрема, $h = i_{\mathbf{11}} + i_{\mathbf{22}} + i_{\mathbf{12}} + i_{\mathbf{21}}$, $l = i_{\mathbf{10}} + i_{\mathbf{20}}$.

3. Допоміжні твердження

Лема 3.1. *Якщо виконується умова* (A) *та*

$$p_\mu \leq \frac{1}{2} - \upsilon, \tag{28}$$

де $0 < \upsilon \leq \frac{1}{2}$, $\mu \in J$, *то для довільного* $n \geq 2$

$$\mathsf{E}\,\theta_n > 0. \tag{29}$$

Доведення. З урахуванням (6) та (7) для доведення співвідношення (29) достатньо показати, що для $n \geq 2$ виконується наступна нерівність

$$Q_t > 0. \tag{30}$$

З цією метою подамо добуток Q_t, визначений рівністю (7), у вигляді

$$Q_t = \prod_{r=1}^{3} Q_{t;r}, \tag{31}$$

де $Q_{t;r}$ позначає добуток усіх множників з правої частини (7), для яких параметр μ належить множині W_r, $r = 1, 2, 3$. Тут

$$W_1 = \left\{\mu, 1 \leq \mu \leq T \colon p_\mu \leq \frac{1}{3}\right\},$$
$$W_2 = \left\{\mu, \quad 1 \leq \mu \leq T \colon \frac{1}{3} < p_\mu \leq \frac{1}{2} - \upsilon, \binom{t}{2} \text{ — парне}, t \geq 2\right\},$$
$$W_3 = \left\{\mu, \quad 1 \leq \mu \leq T \colon \frac{1}{3} < p_\mu \leq \frac{1}{2} - \upsilon, \binom{t}{2} \text{ — непарне}, t \geq 2\right\}.$$

Позначимо η_r — кількість елементів множини W_r, $\eta_r = |W_r|$, $r = 1, 2, 3$. Тоді

$$\sum_{r=1}^{3} \eta_r = T. \tag{32}$$

Із означень добутків $Q_{t;1}$ та $Q_{t;2}$ отримуємо, очевидно,

$$Q_{t;1} \geq 1, \qquad Q_{t;2} \geq 1. \tag{33}$$

Зважаючи на умову (28), знаходимо

$$Q_{t;3} \geq (6\upsilon)^{\eta_3}. \tag{34}$$

Із (31)–(34) випливає, що $Q_t \geq (6\upsilon)^{\eta_3}$, звідки маємо (30), а отже (29). □

Лема 3.2. *Нехай виконуються умови* (A), (3) *та за* $n \to \infty$

$$T \leq n\frac{\ln 2}{\ln 3} + m_0, \tag{35}$$

де m_0 *— стале число.*

Тоді для довільного $t \in F$, *де*

$$F = \left[\left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n}{\ln n}\right]; n\right],$$

має місце співвідношення

$$Q_t \geq a_3, \qquad n \to \infty. \tag{36}$$

Доведення. Зважаючи на представлення (31), для доведення (36)) достатньо показати, що для $t \in F$ та $n \to \infty$ існує таке a_4, що

$$Q_{t;r} \geq a_4, \qquad r = 1, 2, 3. \tag{37}$$

Аналогічно (33) для $t \in F$, $\mu \in W_1$ та $\mu \in W_2$ відповідно маємо $Q_{t;1} \geq 1$, $Q_{t;2} \geq 1$, якщо $n > 1$.

Перевіримо співвідношення (37) для $r = 3$. Дійсно, беручи до уваги (3) та $\mu \in W_3$, для $t \in F$ знаходимо, що за $n \to \infty$

$$(1 - 3p_\mu)^{\binom{t}{2}} \geq -2^{-\frac{n^2}{8}(1+o(1))} \exp\left\{-\frac{3}{4} cn \left(1 + o(1)\right) \ln n\right\}, \tag{38}$$

де $c > \ln 3 / \ln 2$.

Використовуючи (7), (35) та (38), отримуємо

$$Q_{t;3} \geq a_5 \left(1 - a_6 2^{-\frac{n^2}{8}(1+o(1))} \exp\left\{-\frac{3}{4} cn \left(1 + o(1)\right) \ln n\right\}\right)^{n^{\frac{\ln 2}{\ln 3}}}, \qquad n \to \infty.$$

Звідки випливає (37) для $r = 1, 2, 3$. Співвідношення (31) та (37) доводять (36)). □

Лема 3.3. *Нехай b, c — фіксовані цілі числа, такі що $0 < b < c$, та ψ_n — послідовність цілих чисел з властивістю $\psi_n / n \to 0$ за $n \to \infty$. Тоді*

$$\binom{n}{\left[\frac{b}{c} n\right] - \psi_n} < \frac{c^n \exp\left\{-\frac{\psi_n^2}{n}\left(\frac{c^2}{2b(c-b)} + O\left(\frac{\psi_n}{n}\right)\right)\right\}}{b^{\frac{b}{c} n - \psi_n} (c - b)^{\frac{c-b}{c} n + \psi_n}}, \qquad n \to \infty. \tag{39}$$

Доведення. За допомогою формули Стірлінга [4] нескладно отримати співвідношення (39). □

Лема 3.4. *Нехай виконується умова (A). Тоді для довільного $t \geq 4$ серед чотирьох параметрів $\Gamma^{(l_0)}$, $l_0 = 1, \ldots, 4$, які визначаються співвідношеннями (13)–(16), існує принаймні три $\Gamma^{(l_1)}$, $\Gamma^{(l_2)}$, $\Gamma^{(l_3)}$, $l_1, l_2, l_3 \in \{1, 2, 3, 4\}$, $l_1 \neq l_2$, $l_2 \neq l_3$, $l_1 \neq l_3$, таких що $\Gamma^{(l_r)} \geq \frac{t}{2} - 1$, $r = 1, 2, 3$, причому серед цих трьох параметрів існує принаймні один $\Gamma^{(l^*)}$ такий, що $\Gamma^{(l^*)} \geq \binom{\frac{t}{2}}{2}$, $l^* \in \{l_1, l_2, l_3\}$.*

Доведення. Нехай $i \geq \frac{t}{2}$. Тоді, користуючись співвідношеннями (13)–(16), знаходимо, що існує принаймні три параметри $\Gamma^{(l_1)}$, $\Gamma^{(l_2)}$, $\Gamma^{(l_3)}$, $l_1, l_2, l_3 \in \{1, 2, 3, 4\}$, $l_1 \neq l_2$, $l_2 \neq l_3$, $l_1 \neq l_3$, таких що $\Gamma^{(l_r)} \geq \binom{\frac{t}{2}}{2}$, $t \geq 4$, $r = 1, 2, 3$.

Нехай тепер

$$i < \frac{t}{2}. \tag{40}$$

Розглянемо всі можливі випадки, тобто

1) якщо виконується (40) і $l \geq \frac{t}{2}$, то з урахуванням (13), (15) та (16) отримуємо $\Gamma^{(1)} \geq \binom{l}{2} \geq \binom{\frac{t}{2}}{2}$, $\Gamma^{(3)} \geq \binom{l}{2} \geq \binom{\frac{t}{2}}{2}$, $\Gamma^{(4)} \geq \Gamma^{(1)} \geq \binom{\frac{t}{2}}{2}$;

2) якщо виконується (40) і $h \geq \frac{t}{2}$, де $t = i + l + h$, $h = i_{\mathbf{11}} + i_{\mathbf{22}} + i_{\mathbf{12}} + i_{\mathbf{21}}$, то за допомогою співвідношень (14), (15) та (16) приходимо до оцінок $\Gamma^{(2)} \geq \binom{h}{2} \geq \binom{\frac{t}{2}}{2}$, $\Gamma^{(3)} \geq \binom{h}{2} \geq \binom{\frac{t}{2}}{2}$, $\Gamma^{(4)} \geq \binom{t-l-i}{2} = \binom{h}{2} \geq \binom{\frac{t}{2}}{2}$;

3) якщо виконується (40) і $l + h \geq \frac{t}{2}$, $l \geq 1$ та $h \geq 1$ (випадки, коли $l \geq \frac{t}{2}$, $h = 0$ або $l = 0$, $h \geq \frac{t}{2}$ розглянуті в пунктах 1) та 2)), то $lh \geq \frac{t}{2} - 1$.

Дійсно, нехай $l + h = \beta$, де $\beta \geq \frac{t}{2}$. Тоді $lh = l(\beta - l) \geq \beta - 1 \geq \frac{t}{2} - 1$ (передостання нерівність має місце, оскільки функція $f(x)$, де $f(x) = x(\beta - x)$ зростає на відрізку $[1; \beta/2]$ і спадає на інтервалі $[\beta/2; \beta - 1]$ досягаючи мінімального значення при $x = 1$ або при $x = \beta - 1$ (не порушуючи загальності, вважаємо, що $1 \leq x \leq \beta - 1$)).

Отже, використовуючи (13), (15), (16) та нерівності $lh \geq \frac{t}{2} - 1$, $l + h \geq \frac{t}{2}$ знаходимо $\Gamma^{(1)} \geq (i+l)(t-l-i) = (i+l)h \geq lh \geq \frac{t}{2} - 1$, $\Gamma^{(3)} = \binom{h+l}{2} \geq \binom{\frac{t}{2}}{2}$, $\Gamma^{(4)} \geq \Gamma^{(1)} \geq \frac{t}{2} - 1$. □

Нехай $p_{\min} = \min\limits_{1\leq\mu\leq T} p_\mu$. У подальшому ε_q — додатне фіксоване число, значення якого уточнюється для кожного q, $q \geq 1$.

Введемо у розгляд суми

$$D_z = 3^{-T} \sum_{t\in\mathbb{R}_z} \binom{n}{t} Q_t,$$

де $z = 1, 2, 3$,

$$R_1 = \left[2; \left[\sqrt{\frac{\varepsilon_1 n}{\ln n}}\right]\right], \qquad R_2 = \left[\left[\sqrt{\frac{\varepsilon_1 n}{\ln n}}\right] + 1; [\varepsilon_2 n]\right], \qquad R_3 = [[\varepsilon_2 n] + 1; n].$$

Лема 3.5. *Нехай виконуються умови* (A), (3), (4) *і параметри* ε_1, c *змінюються таким чином, що*

$$\varepsilon_1 c \leq \gamma_0 < \frac{4}{3}\left(1 - \frac{\ln 3}{c\ln 2}\right).$$

Тоді має місце співвідношення

$$D_1 \leq \sum_{t=2}^{\left[\sqrt{\frac{\varepsilon_1 n}{\ln n}}\right]} \frac{1}{t!}\left(\frac{1}{n^{c\frac{\ln 2}{\ln 3}\left(1-\frac{\ln 3}{c\ln 2}-\frac{3}{4}\gamma_0\right)}}\right)^t \left(\frac{1}{n^{c\frac{A_n}{n}\left(1-\frac{3}{4}\gamma_0+\frac{3}{4}c\sqrt{\frac{\varepsilon_1 \ln n}{n}}+\frac{3}{4}c\frac{\ln 2}{\ln 3}\frac{\sqrt{\varepsilon_1 n \ln n}}{A_n}\right)}}\right)^t. \tag{41}$$

Доведення. З урахуванням (3) та (7) для $t \in \left[2; \left[\sqrt{\frac{\varepsilon_1 n}{\ln n}}\right]\right]$ отримуємо

$$Q_t \leq 3^T \left(1 - 2p_{\min}\binom{t}{2} + 3\left(p_{\min}\binom{t}{2}\right)^2\right)^T. \tag{42}$$

Використовуючи (42), для всіх $t \in \left[2; \left[\sqrt{\frac{\varepsilon_1 n}{\ln n}}\right]\right]$ знаходимо

$$D_1 \leq \sum_{t=2}^{\left[\sqrt{\frac{\varepsilon_1 n}{\ln n}}\right]} \frac{n^t}{t!} \exp\left\{-Ttp_{\min}\left(1 - \frac{3}{4}\frac{\varepsilon_1 n}{\ln n}\left(1 - \sqrt{\frac{\ln n}{\varepsilon_1 n}}\right)p_{\min}\right)\right\}. \tag{43}$$

Умови (3), (4) та нерівність (43) дозволяють прийти до оцінки (41). □

Лема 3.6. *Нехай виконуються умови* (A), (3), (4) *і параметри* ε_1, c *змінюються таким чином, що* $\varepsilon_1 c \geq \gamma_1 > 0$. *Тоді існує* ε_2, $0 < \varepsilon_2 < 1$, *таке що має місце співвідношення*

$$D_2 \leq 2^{n\sigma(\varepsilon_2)}\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3e^{\frac{3}{2}\gamma_1\left(1+\sqrt{\frac{\ln n}{\varepsilon_1 n}}\right)}}\right)^{n\frac{\ln 2}{\ln 3}+A_n}, \tag{44}$$

$\sigma(\varepsilon_2) = -\varepsilon_2 \log_2 \varepsilon_2 - (1-\varepsilon_2)\log_2(1-\varepsilon_2)$.

Доведення. Для $t \in \left[\left[\sqrt{\frac{\varepsilon_1 n}{\ln n}}\right] + 1, [\varepsilon_2 n]\right]$ знаходимо

$$Q_t \leq \left(1 + 2\exp\left\{-3p_{\min}\binom{\left[\sqrt{\frac{\varepsilon_1 n}{\ln n}}\right]+1}{2}\right\}\right)^T. \tag{45}$$

Використовуючи співвідношення (3), (4) та (45), маємо

$$D_2 \leq \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3e^{\frac{3}{2}c\varepsilon_1\left(1+\sqrt{\frac{\ln n}{\varepsilon_1 n}}\right)}}\right)^{n\frac{\ln 2}{\ln 3}+A_n} \sum_{t=\left[\sqrt{\frac{\varepsilon_1 n}{\ln n}}\right]+1}^{[\varepsilon_2 n]} \binom{n}{t}. \tag{46}$$

За допомогою наступної нерівності [3] $\sum_{t=0}^{[\varepsilon_2 n]} \binom{n}{t} \leq 2^{n\sigma(\varepsilon_2)}$, де

$$\sigma(\varepsilon_2) = -\varepsilon_2 \log_2 \varepsilon_2 - (1-\varepsilon_2)\log_2(1-\varepsilon_2),$$

та з урахуванням (46) отримуємо (44). □

Лема 3.7. *Нехай виконуються умови* (A), (3) *та* (4). *Тоді для* $\varepsilon_2 > 0$ *має місце співвідношення*

$$D_3 \leq \left(\frac{\exp\left\{ \frac{2}{n^{\frac{3}{2}nc\varepsilon_2^2\left(1+\frac{1}{\varepsilon_2 n}\right)}} \right\}}{3} \right)^{A_n} \exp\left\{ \frac{2\ln 2}{n^{\frac{3}{2}nc\varepsilon_2^2\left(1+\frac{1}{\varepsilon_2 n}\right)-1}\ln 3} \right\}. \tag{47}$$

Доведення. Для $t \in [[\varepsilon_2 n]+1, n]$ знаходимо

$$Q_t \leq \left(1 + 2\exp\left\{ -3p_{\min}\binom{[\varepsilon_2 n]+1}{2} \right\} \right)^T. \tag{48}$$

Використовуючи (3) та (48), отримуємо

$$D_3 \leq \frac{2^n}{3^T} \exp\left\{ \frac{2T}{\exp\left\{ \frac{3}{2}c\varepsilon_2^2 n\,(\ln n)\left(1+\frac{1}{\varepsilon_2 n}\right) \right\}} \right\}. \tag{49}$$

Із (4) та (49) маємо

$$D_3 \leq \frac{2^n}{3^{\frac{\ln 2}{\ln 3}n + A_n}} \exp\left\{ \frac{2n\frac{\ln 2}{\ln 3} + 2A_n}{n^{\frac{3}{2}nc\varepsilon_2^2\left(1+\frac{1}{\varepsilon_2 n}\right)}} \right\}.$$

Звідки приходимо до нерівності (47). □

4. Доведення теореми 1.1

Доведення. Достатність. Покажемо, що за виконання співвідношення (4) має місце рівність

$$\mathsf{E}\,\theta_n = o(1), \qquad n \to \infty. \tag{50}$$

Беручи до уваги (6) та (7), математичне сподівання $\mathsf{E}\,\theta_n$ можна подати у вигляді

$$\mathsf{E}\,\theta_n = \sum_{h=1}^{3} D_h, \tag{51}$$

де D_1, D_2, D_3 визначені вище.

Зважаючи на (51), для доведення (50) достатньо переконатися, що

$$D_h = o(1), \qquad n \to \infty \tag{52}$$

для $h = 1, 2, 3$. Використовуючи (41), (44) та (47), неважко отримати (52) для $h = 1$, $h = 2$ та $h = 3$ відповідно.

Із (51) та (52) випливає (50). Враховуючи (50) та нерівність Чебишева, отримуємо (5).

Необхідність. Нехай $\mathsf{P}\{\theta_n > 0\} \to 0$, $n \to \infty$. Покажемо, що тоді виконується (4). Припустимо, що рівність (4) не виконується, і, отже, має місце співвідношення (35). Переконаємося, що у такому випадку існує додатня стала C, для якої

$$\mathsf{P}\{\theta_n > 0\} \geq C > 0, \qquad n \to \infty, \tag{53}$$

тобто з додатньою ймовірністю існують розв'язки, які належать множині M_n. З цією метою перевіримо наступні оцінки за $n \to \infty$

$$(\mathsf{E}\,\theta_n)^{-1} \le a_5, \tag{54}$$

$$\mathsf{E}\,\theta_n^{[2]}\,(\mathsf{E}\,\theta_n)^{-2} \le a_6 \tag{55}$$

з подальшим використанням їх в нерівності [5]

$$\mathsf{P}\left\{\theta_n > 0\right\} \ge \left((\mathsf{E}\,\theta_n)^{-1} + \mathsf{E}\,\theta_n^{[2]}\,(\mathsf{E}\,\theta_n)^{-2}\right)^{-1}. \tag{56}$$

Зважаючи на співвідношення (6), (29) та лему 3.2, знаходимо

$$(\mathsf{E}\,\theta_n)^{-1} \le 3^T 2^{-n} \delta_n, \tag{57}$$

де

$$\delta_n \le a_3^{-1}\left(2^{-n}\sum_{t\in F}\binom{n}{t}\right)^{-1}, \qquad n \to \infty. \tag{58}$$

Лема 3.3 для $b = 1$, $c = 2$ і $\psi_n = [n/\ln n]$ дозволяє отримати співвідношення $2^{-n}\sum_{t\in F}\binom{n}{t} \to 1$, $n \to \infty$, яке разом із (35), (57) та (58) дає (54).

Аналогічно (54) переконуємося у тому, що

$$\left(3^T 2^{-n}\,\mathsf{E}\,\theta_n\right)^{-1} \le a_7, \qquad n \to \infty. \tag{59}$$

Із (59) випливає, що для доведення (55) достатньо показати справедливість співвідношення

$$9^T 4^{-n}\,\mathsf{E}\,\theta_n^{[2]} \le a_8, \qquad n \to \infty. \tag{60}$$

Зважаючи на (11), ліву частину (60) перепишемо у вигляді

$$9^T 4^{-n}\,\mathsf{E}\,\theta_n^{[2]} = 4^{-n} S\left(n; Q_t^*\right), \tag{61}$$

де

$$S\left(n; Q_t^*\right) = \sum_{t=3}^{n}\binom{n}{t}\sum_{i+l+h=t}\frac{t!}{i!\,l!\,h!}Q_t^*. \tag{62}$$

Суму $S\left(n; Q_t^*\right)$ подамо у вигляді двох сум $S_1\left(n; Q_t^*\right)$ та $S_2\left(n; Q_t^*\right)$, а саме:

$$S\left(n; Q_t^*\right) = S_1\left(n; Q_t^*\right) + S_2\left(n; Q_t^*\right), \tag{63}$$

де $S_1\left(n; Q_t^*\right)$ відрізняється від $S\left(n; Q_t^*\right)$ тим, що сумування у правій частині (62) розповсюджується на i, l, h, такі що

$$\Gamma^{(r)} \ge \binom{\varepsilon n}{2}, \tag{64}$$

де $\varepsilon = const$, $0 < \varepsilon < 1$, $\Gamma^{(r)}$, $r = 1, \ldots, 4$, визначені рівностями (13)–(16); $S_2\left(n; Q_t^*\right)$ — сума доданків із $S\left(n; Q_t^*\right)$, які не увійшли до $S_1\left(n; Q_t^*\right)$.

Враховуючи співвідношення (3), (12), (35) та (64), отримуємо

$$S_1\left(n; Q_t^*\right) \le a_9 S_1\left(n; 1\right), \qquad n \to \infty. \tag{65}$$

Нерівність $S_1\left(n; 1\right) \le 4^n$ у поєднанні з (65) дає

$$S_1\left(n; Q_t^*\right) \le a_9 4^n, \qquad n \to \infty. \tag{66}$$

Суму $S_2\left(n; Q_t^*\right)$ представимо у вигляді

$$S_2\left(n; Q_t^*\right) = \sum_{k=1}^{4} S_{2;k}\left(n; Q_t^*\right), \tag{67}$$

де $S_{2;k}\left(n; Q_t^*\right)$ відрізняється від $S_2\left(n; Q_t^*\right)$ тим, що внутрішнє сумування у правій частині (62) відбувається за всіма елементами множини I такими, що існують

$l_1, \ldots, l_k \in \{1,2,3,4\}$, для яких $\Gamma^{(l_s)} < \binom{\varepsilon n}{2}$, $\Gamma^{(r)} \geq \binom{\varepsilon n}{2}$, де $r \in \{1,2,3,4\} \setminus \{l_1, \ldots, l_k\}$, $s = 1, \ldots, k$, $k = 1, \ldots, 4$.

Для $k = 1, \ldots, 4$ подамо $S_{2;k}(n; Q_t^*)$ у вигляді

$$S_{2;k}(n; Q_t^*) = \sum_{1 \leq t_1 < \cdots < t_k \leq 4} S_{2;k;t_1,\ldots,t_k}(n; Q_t^*), \tag{68}$$

де $S_{2;k;t_1,\ldots,t_k}(n; Q_t^*)$ позначає суму усіх доданків, що належать $S_{2;k}(n; Q_t^*)$ та для яких $\Gamma^{(t_l)} < \binom{\varepsilon n}{2}$, $l = 1, \ldots, k$, $\Gamma^{(t')} \geq \binom{\varepsilon n}{2}$, $t' \in \{1,2,3,4\} \setminus \{t_1, \ldots, t_k\}$.

Покажемо, що для $k = 1$

$$S_{2;k}(n; Q_t^*) \leq a_{10} 4^n (1 + o(1)), \qquad n \to \infty. \tag{69}$$

Використовуючи (3), (12), (35) та означення суми $S_{2;1;1}(n; Q_t^*)$ $(S_{2;1;4}(n; Q_t^*))$, отримуємо за $n \to \infty$

$$S_{2;1;1}(n; Q_t^*) \leq a_{11} 2^n S_{2;1;1}(n; 1) \tag{70}$$

$$(S_{2;1;4}(n; Q_t^*) \leq a_{11} 2^n S_{2;1;4}(n; 1)). \tag{71}$$

Із нерівності $\Gamma^{(1)} < \binom{\varepsilon n}{2}$ $(\Gamma^{(4)} < \binom{\varepsilon n}{2})$ та співвідношення (13) ((16)) випливає, що усі параметри i, l, h, які приймають участь у записі суми $S(n; Q_t^*)$ (див. (62)), не перевищують εn. Звідки, з урахуванням поліноміальної теореми, маємо для $k = 1$

$$S_{2;k;1}(n; 1) \leq \exp\{\sigma_1(\varepsilon) n\} \tag{72}$$

$$(S_{2;k;4}(n; 1) \leq \exp\{\sigma_2(\varepsilon) n\}), \qquad n \to \infty, \tag{73}$$

де $\sigma_r(\varepsilon_0) \to 0$, $\varepsilon_0 \to 0$, $r = 1, 2, \ldots$.

Беручи до уваги (70) та (72) ((71) та (73)), приходимо до оцінки за $n \to \infty$

$$S_{2;1;1}(n; Q_t^*) \leq a_{11} 2^n \exp\{\sigma_1(\varepsilon) n\} \tag{74}$$

$$(S_{2;1;4}(n; Q_t^*) \leq a_{11} 2^n \exp\{\sigma_2(\varepsilon) n\}). \tag{75}$$

Далі, за допомогою нерівностей $\Gamma^{(2)} < \binom{\varepsilon n}{2}$, $t - l = i + h \geq 2$ (див. лему 2.2) та співвідношення (14) суму $S_{2;1;2}(n; Q_t^*)$ запишемо у вигляді

$$S_{2;1;2}(n; Q_t^*) = \sum_{l=1}^{3} S_{2;1;2}^{(l)}(n; Q_t^*), \tag{76}$$

де

$$S_{2;1;2}^{(l)}(n; Q_t^*) = \sum_{t=3}^{n} \binom{n}{t} \sum_{q \in \mathbb{R}_l} \binom{t}{q} \sum_{i+h=q} \frac{q!}{i!\,h!} Q_t^*, \qquad l = 1, 2, 3.$$

Замкнені відрізки R_l, $l = 1, 2, 3$, кінцями яких слугують цілі числа, дорівнюють

$$R_1 = \left[2; \left[\sqrt{\frac{\varepsilon' n}{\ln n}}\right]\right], \qquad R_2 = \left[\left[\sqrt{\frac{\varepsilon' n}{\ln n}}\right] + 1; [\varepsilon'' n]\right], \qquad R_3 = [[\varepsilon'' n] + 1; t],$$

де ε', ε'' — фіксовані додатні числа, $0 < \varepsilon', \varepsilon'' < 1$.

Враховуючи (12), маємо для $q \in \mathbb{R}_1$

$$Q_t^* \leq 3^T \left(1 - 2p_{\min}\binom{q}{2}\left(1 + O\left(p_{\min}\binom{q}{2}\right)\right) + 2\exp\left\{-3p_{\min}\binom{\varepsilon n}{2}\right\}\right)^T. \tag{77}$$

Оцінка (77) разом із співвідношеннями (3) та (35) дає за $n \to \infty$

$$Q_t^* \leq a_{12} 3^{\frac{\ln 2}{\ln 3} n} \left(1 - \frac{qc \ln n}{n}(1 + O(\varepsilon')) + 2n^{-\frac{3}{2}c\varepsilon^2 n(1+o(1))}\right)^{\frac{\ln 2}{\ln 3} n}.$$

Звідки знаходимо для $q \in \mathbb{R}_1$ за $n \to \infty$

$$Q_t^* \le a_{13} 2^n \exp\left\{ \frac{2 \ln 2 \,(1+o(1))}{n^{\frac{3}{2} c \varepsilon^2 n (1+o(1)) - 1} \ln 3} \right\} \left(\frac{1}{n^{c \frac{\ln 2}{\ln 3}(1+o(1)+O(\varepsilon'))}} \right)^q . \tag{78}$$

Із означення суми $S_{2;1;2}^{(1)}(n; Q_t^*)$ та (78) отримуємо

$$S_{2;1;2}^{(1)}(n; Q_t^*) \le a_{14} 4^n \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{q!} \left(\frac{2}{n^{c \frac{\ln 2}{\ln 3}(1+O(\varepsilon')) - 1}} \right)^q, \qquad n \to \infty. \tag{79}$$

Для $q \in \mathbb{R}_2$ маємо, використовуючи (12),

$$Q_t^* \le \left(1 + 2 \exp\left\{ -3 p_{\min} \binom{\left[\sqrt{\frac{\varepsilon' n}{\ln n}}\right] + 1}{2} \right\} + 6 \exp\left\{ -3 p_{\min} \binom{\varepsilon n}{2} \right\} \right)^T . \tag{80}$$

За допомогою (3), (35) та (80) встановлюємо для $q \in \mathbb{R}_2$

$$Q_t^* \le \left(1 + \frac{2}{e^{\frac{3}{2} c \varepsilon' (1+o(1))}} + \frac{6}{n^{\frac{3}{2} c \varepsilon^2 n (1+o(1))}} \right)^{\frac{\ln 2}{\ln 3} n + m_0}, \qquad n \to \infty. \tag{81}$$

Беручи до уваги означення суми $S_{2;1;2}^{(2)}(n; Q_t^*)$, поліноміальну формулу та оцінку (81), отримуємо за $n \to \infty$

$$S_{2;1;2}^{(2)}(n; Q_t^*) \le a_{15} 2^n e^{\sigma_3(\varepsilon'') n} \left(1 + \frac{2}{e^{\frac{3}{2} c \varepsilon' (1+o(1))}} + \frac{6}{n^{\frac{3}{2} c \varepsilon^2 n (1+o(1))}} \right)^{\frac{\ln 2}{\ln 3} n} . \tag{82}$$

Для $q \in \mathbb{R}_3$ з урахуванням (12) аналогічно до (82) приходимо до

$$Q_t^* \le \left(1 + \frac{2}{n^{\frac{3}{2} c (\varepsilon'')^2 n (1+o(1))}} + \frac{6}{n^{\frac{3}{2} c \varepsilon^2 n (1+o(1))}} \right)^{\frac{\ln 2}{\ln 3} n + m_0}, \qquad n \to \infty. \tag{83}$$

Використовуючи співвідношення (83) та поліноміальну формулу, маємо за $n \to \infty$

$$S_{2;1;2}^{(3)}(n; Q_t^*) \le a_{16} 4^n. \tag{84}$$

Поєднуючи (76), (79), (82) та (84), маємо

$$S_{2;1;2}(n; Q_t^*) \le a_{17} 4^n (1 + o(1)), \qquad n \to \infty. \tag{85}$$

Нехай далі $\Gamma^{(3)} < \binom{\varepsilon n}{2}$, $t - i \ge 2$. Тоді співвідношення (15) та представлення

$$S_{2;1;3}(n; Q_t^*) = \sum_{l=1}^{3} S_{2;1;3}^{(l)}(n; Q_t^*),$$

де

$$S_{2;1;3}^{(l)}(n; Q_t^*) = \sum_{t=3}^{n} \binom{n}{t} \sum_{q \in \mathbb{R}_l} \binom{t}{q} \sum_{l+h=q} \frac{q!}{l!\,h!} Q_t^*, \qquad l = 1, 2, 3,$$

дозволяють аналогічно до (85) встановити

$$S_{2;1;3}(n; Q_t^*) \le a_{18} 4^n (1 + o(1)), \qquad n \to \infty. \tag{86}$$

Із (68), (74), (75), (85) та (86) випливає 69 для $k = 1$.

Покажемо, що має місце наступна оцінка для $k = 2$

$$S_{2;k}(n; Q_t^*) \le a_{19} 5^{\frac{\ln 2}{\ln 3} n} e^{\sigma_4(\varepsilon) n}, \qquad n \to \infty. \tag{87}$$

Дійсно, зважаючи на (3), (12), (35) та (68), знаходимо для $k = 2$ за $n \to \infty$

$$S_{2;k}(n; Q_t^*) \le a_{20} 5^{\frac{\ln 2}{\ln 3} n} \left(\sum_{1 \le t_1 < t_2 \le 4} S_{2;k;t_1,t_2}(n; 1) \right). \tag{88}$$

Використовуючи нерівності $\Gamma^{(t_1)} < \binom{\varepsilon n}{2}$, $\Gamma^{(t_2)} < \binom{\varepsilon n}{2}$, де $1 \le t_1 < t_2 \le 4$, та співвідношення (13)–(16), встановлюємо, що у правій частині (62) параметри i, l, h не перевищують εn. Це у свою чергу дозволяє записати наступну оцінку

$$\max_{1 \le t_1 < t_2 \le 4} S_{2;2;t_1,t_2}(n;1) \le a_{21} e^{\sigma_5(\varepsilon) n},$$

звідки

$$\sum_{1 \le t_1 < t_2 \le 4} S_{2;2;t_1,t_2}(n;1) \le a_{22} e^{\sigma_5(\varepsilon) n}. \tag{89}$$

Із (88) та (89) випливає (87) для $k = 2$.

Переконаємось у тому, що для $k = 3$ справедлива оцінка за $n \to \infty$

$$S_{2;k}(n; Q_t^*) \le a_{23} 7^{\frac{\ln 2}{\ln 3} n} e^{\sigma_6(\varepsilon) n}. \tag{90}$$

Дійсно, з урахуванням (3), (12), (35), (68) знаходимо для $k = 3$

$$S_{2;k}(n; Q_t^*) \le a_{24} 7^{\frac{\ln 2}{\ln 3} n} \left(\sum_{1 \le t_1 < t_2 < t_3 \le 4} S_{2;k;t_1,t_2,t_3}(n;1) \right), \qquad n \to \infty. \tag{91}$$

Оцінка

$$\sum_{1 \le t_1 < t_2 < t_3 \le 4} S_{2;3;t_1,t_2,t_3}(n;1) \le a_{25} e^{\sigma_7(\varepsilon) n} \tag{92}$$

встановлюється аналогічно до (89). Співвідношення (91) та (92) доводять (90) для $k = 3$.

Нарешті, переконаємось у тому, що має місце нерівність для $k = 4$

$$S_{2;k}(n; Q_t^*) \le a_{26} 4^n (1 + o(1)), \qquad n \to \infty. \tag{93}$$

Зазначимо, що для параметрів i, l, h із правої частини (62) має місце співвідношення

$$\max(i, l, h) < \varepsilon n, \tag{94}$$

яке випливає з того, що $\Gamma^{(r)} < \binom{\varepsilon n}{2}$, $r = 1, \ldots, 4$, та виконуються (13)–(16).

Зокрема, нерівність (94) дозволяє подати суму $S_{2;4}(n; Q_t^*)$ у вигляді

$$S_{2;4}(n; Q_t^*) = \sum_{p=1}^{4} S_{2;4}^{(p)}(n; Q_t^*), \tag{95}$$

де

$$S_{2;4}^{(p)}(n; Q_t^*) = \sum_{t \in \mathbb{R}_p} \binom{n}{t} \sum_{i+l+h=t} \frac{t!}{i!\, l!\, h!} Q_t^*, \qquad p = 1, \ldots, 4. \tag{96}$$

Замкнені відрізки $\mathbb{R}_p$, $p = 1, \ldots, 4$, кінцями яких слугують цілі числа, відповідно дорівнюють

$$R_1 = [3; 7], \qquad R_2 = \left[8; \left[\frac{n}{\ln^2 n}\right]\right], \qquad R_3 = \left[\left[\frac{n}{\ln^2 n}\right] + 1; \left[\frac{\delta n}{\ln n}\right]\right],$$
$$R_4 = \left[\left[\frac{\delta n}{\ln n}\right] + 1; [\varepsilon n]\right],$$

де $\delta = \mathrm{const}$, $0 < \delta < \frac{2}{3a_2}$.

Перевіримо справедливість наступної оцінки

$$S_{2;4}^{(1)}(n; Q_t^*) \le a_{27} 4^n (1 + o(1)), \qquad n \to \infty. \tag{97}$$

Для $t = 3$, за допомогою співвідношень $i + l \ge 1$, $t - i \ge 2$, $t - l \ge 2$ (див. лему 2.2), знаходимо $i \in \{0, 1\}$, $l \in \{0, 1\}$ та $i + l \ne 0$. Далі розглянемо всі можливі комбінації для параметрів i та l.

1. Якщо $i=1$, $l=0$ або $i=0$, $l=1$, то використовуючи (12) —(16), маємо

$$\begin{aligned}&\binom{n}{3}\sum_{i+l+h=3}\frac{3!}{i!\,l!\,h!}\prod_{\mu=1}^{T}\left(1+2\left(\sum_{r=1}^{4}(1-3p_\mu)^{\Gamma^{(r)}}\right)\right)\\&=\binom{n}{3}\prod_{\mu=1}^{T}\left(1+4\,(1-3p_\mu)^3+2\,(1-3p_\mu)^2+2\,(1-3p_\mu)\right).\end{aligned}\tag{98}$$

З урахуванням (3), (35), (98) отримуємо за $n\to\infty$

$$\binom{n}{3}\sum_{i+l+h=3}\frac{3!}{i!\,l!\,h!}\prod_{\mu=1}^{T}\left(1+2\left(\sum_{r=1}^{4}(1-3p_\mu)^{\Gamma^{(r)}}\right)\right)\le\frac{a_{28}4^n}{n^{\frac{6c\ln 2}{\ln 3}(1+o(1))-3}}.\tag{99}$$

2. Якщо $i=1$, $l=1$, то аналогічно (99) знаходимо за $n\to\infty$

$$\binom{n}{3}\sum_{i+l+h=3}\frac{3!}{i!\,l!\,h!}\prod_{\mu=1}^{T}\left(1+2\left(\sum_{r=1}^{4}(1-3p_\mu)^{\Gamma^{(r)}}\right)\right)\le\frac{a_{29}4^n}{n^{\frac{4c\ln 2}{\ln 3}(1+o(1))-3}}.\tag{100}$$

За допомогою співвідношень (99) та (100) для $t=3$ встановлюємо за $n\to\infty$

$$\binom{n}{t}\sum_{i+l+h=t}\frac{t!}{i!\,l!\,h!}\prod_{\mu=1}^{T}\left(1+2\left(\sum_{r=1}^{4}(1-3p_\mu)^{\Gamma^{(r)}}\right)\right)\le\frac{a_{30}4^n}{n^{a_{31}(1+o(1))}}.\tag{101}$$

Неважко перевірити справедливість оцінки (101) для $t=4,\dots,7$. Звідки маємо (97).

Покажемо, що за $n\to\infty$

$$S^{(2)}_{2;4}\left(n;Q^*_t\right)\le a_{32}4^n\sum_{t=0}^{\infty}\frac{1}{t!}\left(\frac{3}{n^{c\frac{\ln 2}{\ln 3}(1+o(1))-1}}\right)^t.\tag{102}$$

З цією метою позначимо $t_{p,\min}=\min_{t\in\mathbb{R}_p}t$, $t_{p,\max}=\max_{t\in\mathbb{R}_p}t$, p $=2$, 3.

З урахуванням співвідношення (12) та леми 3.4 отримуємо для $t\in\mathbb{R}_p$, $p=2,3$,

$$\begin{aligned}Q^*_t&\le\left(1+2\left(1+(1-3p_{\min})^{\frac{t}{4}\left(\frac{t}{2}-1\right)}+2\,(1-3p_{\min})^{\left(\frac{t}{2}-1\right)}\right)\right)^T\\&\le\left(9-3p_{\min}t\left(1-\frac{2}{t_{p,\min}}\right)H_t\right)^T.\end{aligned}\tag{103}$$

де

$$H_t=\frac{t_{p,\min}}{4}+2-3p_{\min}\left(\frac{t_{p,\max}}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}\left(\frac{t_{p,\min}}{4}\right)^2+1\right).$$

Використовуючи (3), (35) та (103) (для $p=2$), знаходимо для $t\in\mathbb{R}_2$

$$Q^*_t\le a_{33}4^n\left(\frac{1}{n^{c\frac{\ln 2}{\ln 3}(1+o(1))}}\right)^t,\qquad n\to\infty.\tag{104}$$

Із означення суми $S^{(2)}_{2;4}\left(n;Q^*_t\right)$ та (104) маємо (102).

Переконаємось у справедливості наступної оцінки за $n\to\infty$

$$S^{(3)}_{2;4}\left(n;Q^*_t\right)\le a_{34}4^n\left(\frac{3\ln^2 n}{n^{c\frac{\ln 2}{\ln 3}\left(1-\frac{3c\delta}{2}\right)(1+o(1))}}\right)^{\frac{n}{\ln^2 n}}\sum_{t=0}^{\infty}\left(\frac{3\ln^2 n}{n^{c\frac{\ln 2}{\ln 3}\left(1-\frac{3c\delta}{2}\right)(1+o(1))}}\right)^t.\tag{105}$$

Враховуючи (3), (35) та (103) (для $p=3$), отримуємо для $t\in\mathbb{R}_3$

$$Q^*_t\le a_{35}4^n\left(\frac{1}{n^{c\frac{\ln 2}{\ln 3}\left(1-\frac{3c\delta}{2}\right)(1+o(1))}}\right)^t,\qquad n\to\infty.\tag{106}$$

Беручи до уваги (96) та (106), маємо (105).

Покажемо, що має місце нерівність за $n \to \infty$

$$S_{2;4}^{(4)}(n;Q_t^*) \leq a_{36}2^n \exp\{\sigma_8(\varepsilon)n\}\left(1+\frac{2}{\exp\left\{\frac{3}{2}c\delta(1+o(1))\right\}}\right)^{\frac{\ln 2}{\ln 3}n}. \qquad (107)$$

Із співвідношень (3), (35) та леми 3.4 випливає

$$Q_t^* \leq a_{37}2^n\left(1+\frac{2}{\exp\left\{\frac{3}{2}c\delta(1+o(1))\right\}}\right)^{\frac{\ln 2}{\ln 3}n}, \qquad n \to \infty. \qquad (108)$$

Приймаючи до уваги (94) та поліноміальну формулу, маємо

$$S_{2;4}^{(4)}(n;1) \leq a_{38}n^{1/2}\exp\{\sigma_8(\varepsilon)n\}. \qquad (109)$$

Враховуючи (96), (109) та (108), отримуємо (107).

Поєднуючи 95, (97), (102), (105) та (107), знаходимо (93).

Для $S_2(n;Q_t^*)$ з урахуванням (67), (69), (87), (90) та (93) отримуємо

$$S_2(n;Q_t^*) \leq a_{39}4^n(1+o(1)), \qquad n \to \infty. \qquad (110)$$

Із (63), (66) та (110) маємо $S(n;Q_t^*) \leq a_{40}4^n(1+o(1))$, $n \to \infty$. Звідки, зважаючи на (61), знаходимо (60). Нерівності (59) та (60) доводять (55).

Таким чином, припускаючи (35), отримуємо співвідношення (54) та (55), які разом з (56) дозволяють зробити висновок, що має місце співвідношення (53). Це, у свою чергу, суперечить тому, що з імовірністю, яка прямує до нуля ($n \to \infty$), існують розв'язки системи (1), які належать множині M_n. □

5. Доведення теореми 1.2

Доведення. Використовуючи (41), (44), (47) та (51), неважко отримати доведення теореми 1.2. □

Приклади до теореми 1.2.

№ п/п	1.	2.	3.	4.
ε_1	0.1	0.05	0.05	0.01
ε_2	0.02	0.01	0.01	0.01
c	5	10	10	100
γ_0	0.7	1	1	1
γ_1	0.5	0.4	0.4	1
n	500	1000	1000	10000
A_n	$\ln n$	$\ln n$	$\ln\ln n$	$\sqrt{\ln n}$
Z_1	1.1171×10^{-3}	5.1482×10^{-4}	1.1217×10^{-1}	3.5646×10^{-2}

6. Доведення теореми 1.3

Достатньо помітити, що в умовах теореми 1.3 для доданків D_1, D_2, D_3 з правої частини співвідношення (51) можна отримати оцінки $D_1 \leq D_1'$, $D_2 \leq D_2'$, $D_3 \leq D_3'$ аналогічно тому, як це зроблено в нерівностях (41), (44) та (47) відповідно, де $D_1' = e/n^{2\alpha}$,

$$D_2' = 2^{n\sigma(\varepsilon_2)}\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3e^{\frac{3}{2}\beta_1}}\right)^{n\frac{\ln 2}{\ln 3}}, \qquad D_3' = \left(\frac{\exp\left\{\frac{2}{n^{\frac{3}{2}nc\varepsilon_2^2}}\right\}}{3}\right)^{A_n}\exp\left\{\frac{2\ln 2}{n^{\frac{3}{2}nc\varepsilon_2^2-1}\ln 3}\right\},$$

і, користуючись зазначеними оцінками, прийти до доведення теореми 1.3.

Приклади до теореми 1.3.

№ п/п	1.	2.	3.	4.
ε_1	0.1	0.05	0.05	0.01
ε_2	0.02	0.01	0.01	0.01
c	5	10	10	100
β_0	0.7	1	1	1
β_1	0.5	0.4	0.4	1
n	500	1000	1000	10000
A_n	$\ln n$	$\ln n$	$\ln \ln n$	$\sqrt{\ln n}$
a_1	10	15	50	100
α	0.2	0.1	0.2	0.23
Z_2	2.2747×10^{-1}	6.8333×10^{-1}	1.1965×10^{-1}	3.9291×10^{-2}

7. Висновки

Пропонується необхідна і достатня умова, яка зв'язує число рівнянь з числом невідомих і забезпечує збіжність до нуля ймовірності існування розв'язків системи нелінійних випадкових рівнянь 2-го порядку над полем $\mathbf{GF}(3)$ у заданій множині векторів (теорема 1.1).

За різних припущень на параметр c, який визначений в умові (3), знайдено різні оцінки зазначеної ймовірності (теорема 1.2, теорема 1.3). До останніх двох теорем наведено приклади.

Література

1. В. А. Копытцев, В. Г. Михайлов, *Теоремы пуассоновского типа для числа специальных решений случайного линейного включения*, Дискретная математика **22** (2010), №2, 3—21.
2. В. И. Масол, Л. А. Ромашова, *Условия единственности решения неоднородной системы нелинейных случайных уравнений над полем* $\mathbf{GF}(3)$, Кибернетика и системный анализ (2010), №2, 23—36.
3. К. А. Рыбников, *Введение в комбинаторный анализ*, 2-е изд., МГУ, Москва, 1985.
4. В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, в двух томах, т. 1, Москва, "Мир', 1984.
5. А. Н. Ширяев, *Задачи по теории вероятностей*, учебное пособие, МЦНМО, Москва, 2006.

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, проспект Глушкова, 4г, Київ 03127, Україна

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, проспект Глушкова, 4г, Київ 03127, Україна
Адреса електронної пошти: deezee@ukr.net

Надійшла 04/07/2011