Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 87, 2012, стор. 152–162

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 87, 2012, pp. 152–162

ДИСКРЕТНІ ЗОБРАЖЕННЯ ВИПАДКОВИХ ФУНКЦІЙ ДРУГОГО ПОРЯДКУ II

УДК 519.21

О. І. ПОНОМАРЕНКО

Анотація. Ця стаття є продовженням роботи [21]. В ній досліджуються дискретні зображення випадкових функцій другого порядку із скалярними та векторними значеннями базового типу.

Abstract. This article is a continuation of work [21]. There we study the discrete representations for random function of second order with scalar and vector values of general basis type.

Аннотация. Эта статья является продолжением работы [21]. В ней исследуются дискретные представления случайных функций второго порядка со скалярными и векторными значениями базисного типа.

3. Дискретні зображення базисного типу

3.1. Під загальним дискретним зображенням скалярної випадкової функції другого порядку $\xi(t)$ на множині T розуміється її подання у вигляді суми

$$\xi(t) = \sum_{j\in J} \alpha_j(t) z_j, t \in T, \tag{3.1}$$

де $\{z_j, j \in J\}$ — система випадкових величин з $L_2(\Omega)$, $\mathsf{E}\, z_j \bar{z}_r = f_{jr}$, а $\{\alpha_j, j \in J\}$ — пов'язана з нею множина числових функцій на T.

При цьому вважається, що в сумі (3.1) не більш ніж зліченне число доданків відмінних від нуля і при зліченній сумі ряд (3.1) збігається в деякому розумінні. Якщо зображення (3.1) визначається єдиним чином(в тому розумінні, що при заданій системі $\{z_j, j \in J\}$ коефіцієнти $\alpha_j(t)$ визначаються єдиним чином, або навпаки при заданій системі функцій $\{\alpha_j(t), j \in J\}$ випадкові величини z_j визначаються єдиним чином), то воно називається зображенням базисного типу. Зображення (3.1) є ортогональним, якщо $\mathsf{E}\, z_j \bar{z}_r = \delta_{jr} f_j$, $f_j > 0$, та ортонормованим, якщо $f_j = 1$ при всіх $j, r \in J$.

Звичайно в $L_2(\xi)$ як у гільбертовому просторі існує ортонормований базис

$$\{z_j, j \in J\}$$

і отже будь-яка функція $\xi(t), t \in T$ має ортонормоване базисне зображення (3.1), де $\alpha_j(t) = (\xi(t)|z_j)$ — коефіцієнти Фур'є для $\xi(t)$ відносно $\{z_j, j \in J\}$. Але безпосередньо вказати такий базис $\{z_j, j \in J\}$ дуже важко(крім тривіальних випадків) і тому потрібні обхідні підходи для отримання розкладу (3.1) за допомогою використання кореляційної структури функції $\xi(t)$ або результатів сучасного гармонічного аналізу.

Зауважимо, що коли (3.1) є зображенням базисного типу, де ряд справа збігається за нормою в $L_2(\Omega)$, то система $\{z_j, j \in J\}$ є повною в $L_2(\xi)$ і топологічно вільною, а

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60G10, 60G15; Secondary 60G57.

Ключові слова і фрази. Випадкові функції на компактному топологічному просторі, узагальнені випадкові функції зі значеннями в гільбертовому просторі, зображення типу Карунена–Лоева, зображення базисного типу, оператори Гільберта–Шмідта.

для кореляційного ядра $k(t,s)$ функції $\xi(t)$ необхідно справедливе дискретне зображення

$$k(t,s) = \sum_{j\in J}\sum_{r\in J}\alpha_j(t)\overline{\alpha_r(s)}f_{jr}, \qquad t,s\in T, \tag{3.2}$$

де всі квадратні матриці вигляду $F = (f_{j_u j_v})_{u,v=1}^n$, $n\in\mathbf{N}$, $j_u\in J$ є невід'ємно визначеними, а ряд (3.2) збігається. Навпаки, якщо має місце зображення (3.2) кореляційного ядра k функції $\xi(t)$, $t\in T$, то з теореми Крамера, про зображення випадкових функцій випливає, що справедливе зображення (3.1).

Приклад 3.1. Нехай $\xi(g)$, $g\in G$ неперервна в середньому квадратичному випадкова функція на компактній топологічній групі G. Тоді $\xi(g)$ завжди є дискретно розкладною за системою „елементарних гармонік" на G, тобто є такою, що гармонізується на G.

Дійсно, для G існує не більш ніж злічення система нееквівалентних незвідних скінченновимірних унітарних зображень G, тобто неперервних гомоморфізмів G в групи унітарних матриць скінченних порядків

$$g\to U^{(\lambda)}(g) = \left\{u_{ij}^{(\lambda)}(g)\right\}, \qquad 1\le i,j\le d_\lambda<\infty,\ \lambda=1,2,\dots,$$

$$U^{(\lambda)}(gs) = U^{(\lambda)}(g)U^{(\lambda)}(s), \qquad U^{(\lambda)}(g^{-1}) = \left\{U^{(\lambda)}(g)\right\}^{-1} = \left\{U^{(\lambda)}(g)\right\}^{*}$$

$$\int_G u_{ij}^{(\lambda)}(g)\overline{u_{rl}^{(\mu)}}(g)\,dg = \delta_{\lambda\mu}\delta_{ir}\delta_{jl}\cdot\frac{1}{d_\lambda},$$

де dg — нормована одиницею міра Хаара на G (двобічно інваріантна міра на G), причому гармоніки $u_{ij}^{(\lambda)}(a)$, $1\le i,j\le d_\lambda$, $\lambda=1,2\dots$ утворюють повну систему в гільбертовому просторі $L_2(G)$ функцій, інтегрованих з квадратом модуля відносно dg.

Має місце неортогональне зображення базисного типу для $\xi(g)$, $g\in G$

$$\xi(g) = \sum_\lambda\sum_{i,j=1}^{d_\lambda}u_{ij}^{(\lambda)}(g)z_{ij}^{(\lambda)}, \qquad g\in G, \tag{3.3}$$

де $z_{ij}^{(\lambda)} = d_\lambda\int_G\overline{u_{ig}^{(\lambda)}(g)}\xi(g)\,dg\in L_2(\Omega)$ і ряд (3.3) (при зліченній множині індексів λ) збігається в середньому квадратичному.

Якщо функція $\xi(g)$, $g\in G$ є ліво-стаціонарною, тобто $\mathsf{E}\,\xi(g)=\mathrm{const}$, та її кореляційне ядро k — ліво-інваріантне, $k(gt,gs)=k(t,s)=k(s^{-1}t)$, $g,t,s\in G$, то для $z_{ij}^{(\lambda)}$ виконуються умови ортогональності (див. [7])

$$\mathsf{E}\,z_{ij}^{(\lambda)}\overline{z_{rl}^{(\mu)}} = \delta_{\lambda\mu}\delta_{ir}f_{jl}^{(\lambda)}, \tag{3.4}$$

де $\left\{f_{jl}^{(\lambda)}\right\} = f^{(\lambda)}$ — додатно визначена матриця та

$$\sum_\lambda\sum_{j=1}^{d_\lambda}f_{jj}^{(\lambda)} = \sum_\lambda\mathrm{tr}\left(f^{(\lambda)}\right)<\infty. \tag{3.5}$$

Тоді кореляційна функція $\tilde{k}(g)$ випадкової функції $\xi(g)$ має дискретне зображення вигляду

$$\tilde{k}(g) = \sum_\lambda\sum_{j,l=1}^{d_\lambda}u_{jl}^{(\lambda)}(g)f_{jl}^{(\lambda)}. \tag{3.6}$$

3.2. Розглянемо розширення результатів розділу 2 на випадок, коли кореляційне ядро k породжує загальний інтегральний оператор Гільберта-Шмідта. Нехай T є вимірним простором з σ-алгеброю підмножин $\mathcal{A}$ і додатною мірою μ, $T \cong (T, \mathcal{A}, \mu)$. Припустимо, що випадкова функція другого порядку $\xi(t)$, $t \in T$ є сильно вимірною як векторна $L_2(\Omega)$-значна функція на T (тобто є границею послідовності простих вимірних $L_2(\Omega)$-значних функцій на T, μ-м.с. див. [11]). Тоді її кореляційне ядро $k(t, s)$ є вимірною функцією на $(T \times T, \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}, \mu \times \mu) = (T \times T, \mu \times \mu)$ Припустимо також, що

$$\int_T \mathsf{E}\,|\xi(t)|^2\,\mu(dt) < \infty. \tag{3.7}$$

Тоді існують інтеграли Бохнера (в сильний топології $L_2(\Omega)$)

$$\int_T \psi(t)\xi(t)\,\mu(dt), \qquad \psi \in L_2(T, \mu).$$

Дійсно, це випливає з нерівності (див. [11])

$$\begin{aligned}\int_T \|\psi(t)\xi(t)\|_{L_2(\Omega)}\,\mu(dt) &= \int_T |\psi(t)|\sqrt{\mathsf{E}\,|\xi(t)|^2}\,\mu(dt)\\ &\le \left(\int_T |\psi(t)|^2\,\mu(dt)\right)^{1/2}\left(\int_T \mathsf{E}\,|\xi(t)|^2\,\mu(dt)\right)^{1/2} < \infty.\end{aligned}$$

Далі через нерівність

$$\begin{aligned}\int_T\int_T |k(t,s)|^2\,\mu(dt)\,\mu(ds) &= \int_T\int_T |\,\mathsf{E}\,\xi(t)\overline{\xi(s)}|^2\,\mu(dt)\,\mu(ds)\\ \le \int_T\int_T \mathsf{E}\,|\xi(t)|^2\,\mathsf{E}\,|\xi(s)|^2\,\mu(dt)\,\mu(ds) &= \left(\int_T \mathsf{E}\,|\xi(t)|^2\,\mu(dt)\right)^2\end{aligned} \tag{3.8}$$

маємо, що $k(t, s) \in L_2(T \times T, \mu \times \mu)$.

Тоді інтегральний оператор K в просторі $L_2(T, \mu)$

$$(K\varphi)(t) = \int_T K(t,s)\varphi(s)\,\mu(ds), \qquad \varphi \in L_2(T,\mu)$$

є загальним інтегральним оператором Гільберта-Шмідта, для якого

$$(K\psi)(t) = \sum_{j\in J} \lambda_j(\psi, \varphi_j)\varphi_j, \qquad \psi \in L_2(T,\mu) \tag{3.9}$$

де $\{\varphi_j(t), t \in J\} i \{\lambda_j, j \in J\}$ — ортонормована система власних функцій і система власних значень $\lambda_j \neq 0$ оператора K і ряд (3.9) збігається за нормою $L_2(T, \mu)$, а ядро $k(t, s)$ оператора K дозволяє розклад

$$k(t,s) = \sum_{j\in J} \lambda_j\varphi_j(t)\overline{\varphi_j(s)}, \tag{3.10}$$

де ряд (3.10) збігається за нормою $L_2(T \times T, \mu \times \mu)$ (див. [6, 9, 16]).

Визначимо випадкові величини $z_j \in L_2(\Omega)$ рівностями

$$z_j = \int_T \xi(t)\overline{\varphi_j(t)}\,\mu(dt), \qquad j \in J, \tag{3.11}$$

де інтеграли розуміються в сенсі Бохнера. Через рівність (3.10)

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\,z_j\bar{z_r} &= \int_T\int_T (\mathsf{E}\,\xi(t)\overline{\xi(s)})\overline{\varphi_j(t)}\varphi_r(s)\,\mu(dt)\,\mu(ds)\\ &= \int_T\int_T k(t,s)\overline{\varphi_j(t)}\varphi_r(s)\,\mu(dt)\,\mu(ds) = \delta_{jr}\lambda_j\end{aligned} \tag{3.12}$$

і, отже, z_j є ортогональними. Крім того,

$$\mathsf{E}\,\xi(t)\overline{z_j} = \int_T k(t,s)\varphi_j(s)\,\mu(ds) = \lambda_j\varphi_j(t). \tag{3.13}$$

Занумеруємо елементи множини J в порядку зменшення власних значень λ_j із врахуванням кратності та розглянемо наближення $\xi(t)$ сумами $\sum_{j=1}^n \varphi_j(t)z_j$. З (3.12), (3.13) маємо такий вираз для квадратичної похибки цього наближення

$$\begin{aligned}\sigma_n(t) &= \mathsf{E}\,|\xi_n(t)|^2 = \mathsf{E}\,|\xi(t) - \sum_{j=1}^n \varphi_j(t)z_j|^2 \\ &= k(t,t) - 2\sum_{j=1}^n (\mathsf{E}\,\xi(t)\overline{z_j})\overline{\varphi_j(t)} + \sum_{j=1}^n \lambda_j|\varphi_j(t)|^2 = k(t,t) - \sum_{j=1}^n \lambda_j|\varphi_j(t)|^2.\end{aligned}$$

Звідси, враховуючи характер збіжності ряду (3.10) та співвідношення типу (3.8) на діагоналі квадрату $T\times T$ для $\xi_n(t)$, що перетворюється у рівність, маємо, що при $n\to\infty$

$$\sigma_n(t)\to 0 \text{ в } L_2(T,\mu). \tag{3.14}$$

Таким чином отримано наступний результат.

Теорема 3.1. *Нехай $\xi(t)$, $t\in T$, сильно вимірна випадкова функція другого порядку на вимірному просторі з мірою $(T,\mathcal{A},\mu)$, для якої виконується умова* (3.7).

Тоді для її кореляційного ядра $k(t,s)$ справедливий розклад (3.10), *а сама $\xi(t)$ дозволяє зображення*

$$\xi(t) = \sum_{j\in J}\varphi_j(t)z_j,\, t\in T, \tag{3.15}$$

де випадкові величини z_j визначаються рівностями (3.11), *а ряд* (3.15) *збігається в розумінні* (3.14).

3.3. Нехай T — довільна непорожня множина та $\xi(t)$, $t\in T$, випадкова функція другого порядку на T з кореляційним ядром $k(t,s)$

Теорема 3.2. *I. Для випадкової функції $\xi(t)$, $t\in T$ існує така система ω-незалежних комплекснозначних функцій $\{f_j(t), j\in J\}$ на T визначена з точністю до унітарного перетворення, що мають місце дискретні зображення*

$$k(t,s) = \sum_{j\in J} f_j(t)\overline{f_j(s)}, \qquad t,s\in T, \tag{3.16}$$

$$\xi(t) = \sum_{j\in J} f_j(t)z_j, \qquad t\in T, \tag{3.17}$$

де z_j — ортонормовані випадкові величини з $L_2(\Omega)$, причому при кожних t, s з T не більш ніж зліченне число доданків в (3.16) *і* (3.17) *відмінно від нуля, ряд* (3.16) *збігається при кожних t і s, а ряд* (3.17) *збігається при кожному t в середньому квадратичному.*

II. Якщо T — топологічний простір і функції $\xi(t)$ неперервна в середньому квадратичному на T, то функції $f_j(t)$ є неперервними на T.

III. Якщо T — проміжок в $\mathbf{R}$ і процес $\xi(t)$, $t\in T$, m разів диференційований в середньому квадратичному на T, то функції $f_j(t)$ є m разів диференційованими на T, якщо ж процес $\xi(t)$ є аналітичним на T, то і функція $f_j(t)$ є аналітичними.

Доведення. I. Зображення (3.16) є білінійним розкладом М. Г. Крейна додатно визначеного ядра k, що випливає з теореми 1 в [8]. Зауважимо, що таке зображення можна одержати через факторизаційне подання додатно визначеного ядра k в тому чи іншому гільбертовому просторі. Найбільш відомими факторизаційними просторами для k є простір Колмогорова випадквоих величин другого порядку, простір агрегатів Крейна на T, гільбертів простір Ароншайна–Парзена функцій збудованих по k як відтворюючому ядру, простір L_2 факторизаційного зображення k в теоремі Карунена [3, 8].

Зображення (3.17) для випадкової функції $\xi(t)$, $t \in T$, слідує із зображення (3.16) через теорему Карунена з рахуючою мірою на J.

З розкладу (3.17) маємо, що функції $f_j(t)$ мають вигляд $f_j(t) = \mathsf{E}\,\xi(t)\overline{z_j}$, $j \in J$, $t \in T$, звідки безпосередньо випливають твердження II і III теореми. □

3.4. Під дискретним зображенням базисного типу узагальненої випадкової функції другого порядку Ξ_t, $t \in T$, в гільбертовому просторі H розуміється її подання у вигляді

$$\Xi_t = \sum_{j \in J} \alpha_j(t)\Phi_j, \qquad t \in T, \tag{3.18}$$

де Φ_j, $j \in J$ — система випадкових елементів з $\mathcal{L}(H, L_2(\Omega))$, $\{\alpha_j(t), t \in J\}$ — пов'язана з нею множина числових функцій, а зображення (3.18) єдине (тобто за даними Φ_j функції $\alpha_j(t)$ визначаються єдиним чином або навпаки за даними $\alpha_j(t)$ елементи визначаються однозначно) та не більш ніж зліченне число доданків в (3.18) відмінне від нуля і ряд (3.18) збігається в деякій топології простору$\mathcal{L}(H, L_2(\Omega))$. Якщо елементи Φ_j ортогональні, $\Phi_j^*\Phi_r = 0$ при $j \neq r$, то зображення (3.18) називається ортогональним.

Якщо має місце зображення (3.18) то кореляційне ядро Γ функції Ξ_t має розклад

$$R(t,s) = \sum_{j,r \in J} \alpha_j(t)\overline{\alpha_r(s)}F_{jr}, \qquad F_{jr} \in \mathcal{B}(H), \tag{3.19}$$

де $F_{jr} = \Phi_r^*\Phi_j$. Навпаки, якщо справедливий розклад(3.19), де F_{jr} — додатновизначене $\mathcal{B}(H)$-значне ядро на $J \times J$, то за теоремою 2 з [13] має місце зображення (3.18), де $\Phi_j \in \mathcal{L}(H, L_2(\Omega)), F_{jr} = \Phi_r^*\Phi_j$.

Наведемо приклади дискретних зображень для неперервних у сильній топології $\mathcal{L}(H, L_2(\Omega))$ випадкових функцій Ξ_t, заснованих на застосуванні результатів гармонічного аналізу.

Приклад 3.2. Нехай Ξ_t, $t \in \mathbf{R}^n$ — неперервне однорідне випадкове поле в H, тобто $\mathsf{E}\,\Xi_t = \mathrm{const}$, $\Xi_s^*\Xi_t = R(t-s)$, $t, s \in \mathbf{R}^n$. Тоді Ξ_t і $R(t)$ дозволяють спектральні зображення

$$\Xi_t = \int_{\mathbf{R}^n} e^{i(\lambda|t)}\,\Phi(dt), \qquad R(t) = \int_{\mathbf{R}^n} e^{i(\lambda|t)}\,F(d\lambda), \tag{3.20}$$

де Φ і F — операторні $\mathcal{L}(H, L_2(\Omega))$-значна і $\mathcal{B}(H)$-значна відповідно міри Радона на $\mathbf{R}^n$ причому $F(\triangle_1 \cap \triangle_2) = \Phi^*(\Delta_2)\Phi(\Delta_1)$ для борельових Δ_1, Δ_2 з $\mathbf{R}^n$ [13].

Якщо міра F зосереджена на паралелепіпеді $\times_{r=1}^n[-\ell_r, \ell_r]$, $\ell_r > 0$, з $\mathbf{R}^n$, то Ξ_t має неортогональне базисне зображення вигляду

$$\Xi_t = \sum_{j=(j_r)_{r=1}^n \in \mathbf{Z}^n} \prod_{r=1}^n \frac{\sin(\ell_r t_r - \pi j_r)}{(\ell_r t_r - \pi j_r)}\Phi_j^\ell, \qquad t \in \mathbf{R}^n, \tag{3.21}$$

де $\Phi_j^\ell = \Xi_{t_j^\ell} \in \mathcal{L}(H, L_2(\Omega))$, $t_j^\ell = (j_r\pi/\ell_r)_{r=1}^n \in \mathbf{R}^n$ і ряд (3.21) збігається в сильній топології $\mathcal{L}(H, L_2(\Omega))$. Розклад (3.21) є аналогом формули Котельнікова–Шеннона для скалярних випадкових полів. Зображення (3.21) можна одержати розклавши функцію $g(\lambda) = e^{i(\lambda|t)}$ на $\times_{r=1}^n[-\ell_r, \ell_r]$ у кратний ряд Фур'є

$$e^{(\lambda|t)} = \sum_{j \in \mathbf{Z}^n} \prod_{r=1}^n \frac{\sin(\ell_r t_r - \pi j_r)}{(\ell_r t_r - \pi j_r)} e^{(\lambda|t_j^\ell)}$$

і скориставшись зображеннями (3.20) та властивостями стохастичного інтеграла за мірою Φ.

Приклад 3.3. Нехай Ξ_q, $q \in Q$, неперервна однорідна випадкова функція в H на однорідному топологічному просторі Q з компактною групою транзитивних перетворень G, тобто $\mathsf{E}\,\Xi_q = \text{const}$ і кореляційне ядро R функції $\Xi_q \in G$ — інваріантним, $R(gp, gq) = R(p,q)$ для всіх $g \in G$, $p, q \in Q$.

Тоді Ξ_q дозволяє дискретний розклад по системі сферичних функцій

$$\left\{\psi_{ij}^{(\lambda)}(q), i = 1, \dots, d_\lambda, j = 1, \dots, r_\lambda, \lambda = 1, 2, \dots\right\}$$

на Q:

$$\Xi_q = \sum_\lambda \sum_{i=1}^{d_\lambda} \sum_{j=1}^{r_\lambda} \psi_{ij}^{(\lambda)}(q)\Phi_{ij}^{(\lambda)}, \qquad q \in Q, \tag{3.22}$$

де випадкові елементи $\Phi_{ij}^{(\lambda)}$ з $\mathcal{L}(H, L_2(\Omega))$ визначаються рівностями

$$\Phi_{ij}^{(\lambda)} = \left(\int_Q \left|\psi_{ij}^{(\lambda)}(q)\right|^2 dq\right)^{-1} \int_Q \overline{\psi_{ij}^{(\lambda)}(q)}\Xi_q\,dq,$$

в яких dq позначає в G-інваріантну міру на Q [17], а ряд (3.22) є збіжним в сильній топології простору $\mathcal{L}(H, L_2(\Omega))$.

Приклад 3.4. У важливому конкретному випадку загальної схеми прикладу 3.3. простір Q є сферою S_2 в $\mathbf{R}^3$ з центром в точці 0 зі сферичними координатами точки (θ, ϕ), а G є групою обертань сфери $SO(3)$ с центром в точці 0. Тоді для однорідного поля $\Xi_{\theta,\varphi}$ на S_2 розклад (3.22) набуває форми

$$\Xi_{\theta,\phi} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_\ell^m(\theta, \phi)\Phi_m^\ell, \tag{3.23}$$

де $\{Y_\ell^m(\theta,\phi); m = -\ell, \dots, \ell; \ell = 0, 1 \dots\}$ — система сферичних гармонік на S_2 і $\Phi_m^\ell \in \mathcal{L}(H, L_2(\Omega))$ і $(\Phi_j^K)^* \Phi_m^\ell = \delta_{mj}\delta_{ik}F_m$, $F_m \in \mathcal{B}_+(H)$ [17, 18].

В разі однорідного поля на сфері S_{n-1} простору $\mathbf{R}^n$ з центром в точці 0 та групою обертань сфери $SO(n)$ це поле може бути зображене у вигляді ряду по гіперсферичним гармонікам

$$Y_{\ell, m_1, \dots, m_{n-3}, \pm m_{n-2}}(\theta_1, \dots, \theta_{n-2}, \phi), \qquad \ell = 0, 1, 2, \dots,$$
$$0 \le m_{n-2} \le m_{n-3} \le \dots \le m_1 \le \ell,$$

де $(\theta_1, \dots, \theta_{n-2}, \varphi)$ — сферичні координати точки з S_{n-1}, з некорельованими випадковими коефіцієнтами $\Phi_{\ell, m_1, \dots, m_{n-3}, \pm m_{n-2}} \in \mathcal{L}(H, L_2(\Omega))$, кореляційні оператори яких залежать тільки від ℓ (див. [16, 17]).

Приклад 3.5. Нехай Ξ_g, $g \in G$ — неперервна однорідна випадкова функція в H на компактній абелевій групі G, тобто $\mathsf{E}\,\Xi_q = \text{const}$ і $\Xi_s^*\Xi_g = R(gs^{-1})$. Оскільки група характерів $\hat{G}$ групи G є дискретною, то має місце розклад

$$\Xi_g = \sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(g)\Phi_\chi, \qquad \chi(g) \in \hat{G},\ \Phi_\chi \in \mathcal{L}(H, L_2(\Omega)), \tag{3.24}$$

де $\Phi_\gamma^* \Phi_\chi = \delta_{\chi\gamma} F_\chi, F_\chi \in \mathcal{B}_+(H)$, ряд (3.24) є збіжним в сильній топології $\mathcal{L}(H, L_2(\Omega))$, а ряд $\sum_{\chi \in \hat{G}} F_\chi$ збігається до $R(e)$ [13], де e-одиниця групи G.

Приклад 3.6. Нехай Ξ_t, $t \in T$ — неперервний стаціонарний процес на торі $T = \{t \in \mathbf{C} \colon |t| = 1\}$ в H. Тоді $\hat{T}$ ізоморфна адитивній групі $\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, $\hat{T} \cong \mathbf{Z}$, і тому характери мультиплікативної групи T мають вигляд $\chi_n(t) = t^n$, $t \in T$, $n \in Z$. Отже справедливий розклад

$$\Xi_t = \sum_{n \in \mathbf{Z}} t^n \Phi_n, \qquad \Phi_n \in \mathcal{L}(H, L_2(\Omega)),\ t \in T, \tag{3.25}$$

де $\Phi_m^* \Phi_m = \delta_{nm} F_n$, $F_n \in \mathcal{B}_+(H)$, а ряд $\sum_{n \in \mathbf{Z}} F_n$ збігається до $R(1) = \Xi_1^* \Xi_1$.

У випадку, коли в ситуації прикладу 3.5. G є m-вимірним тором T^m маємо, що однорідне випадкове поле Ξ_t, $t \in T^m$, в H має зображення

$$\Xi_{t_1,\dots,t_m} = \sum_{(n_1,\dots,n_m) \in \mathbf{Z}^m} t_1^{n_1} t_2^{n_2} \dots t_m^{n_m} \Phi_{n_1,\dots,n_m}, \qquad (t_1,\dots,t_m) \in T^m, \tag{3.26}$$

де $\Phi_{n_1,\dots,n_m}$, ортогональні випадкові елементи з $\mathcal{L}(H, L_2(\Omega))$.

Приклад 3.7. Нехай в ситуації прикладу 3.5 G_n є циклічною групою порядку n, G_n (з дискретною топологією). Розглянемо для конкретності записів найпростішу ізоморфну реалізацію G_n у вигляді множини цілих чисел $\{0, 1, \dots, n-1\}$ з операцією додавання, де в якості суми чисел береться залишок від ділення звичайної їх суми на n. Тоді стаціонарний (або циклічний) випадковий процес Ξ_s, $s \in G_n$, в H має зображення

$$\Xi_s = \sum_{\lambda=1}^{n} e^{\frac{i2\pi\lambda s}{n}} \Phi_\lambda, \qquad \Phi_\lambda \in \mathcal{L}(H, L_2(\Omega)), \tag{3.27}$$

де $\Phi_\mu^* \Phi_\lambda = \delta_{\mu\lambda} F_\lambda \in \mathcal{B}_+(H)$.

В разі коли G є прямим добутком циклічних груп, $G = G_{n_1} \times G_{n_2} \times \dots \times G_{n_m}$ в умовах прикладу 3.5 будемо мати однорідне(або циклічне) випадкове поле Ξ_s, $s \in G$, що має розклад вигляду

$$\Xi_{s_1,\dots,s_m} = \sum_{\lambda_1=1}^{n_1} \dots \sum_{\lambda_m=1}^{n_m} \prod_{r=1}^{m} e^{\frac{i2\pi\lambda_r s_r}{n_r}} \Phi_{\lambda_1,\dots,\lambda_m}, \tag{3.28}$$

де $\Phi_{\lambda_1,\dots,\lambda_m}$ — ортогональні випадкове елементи з $\mathcal{L}(H, L_2(\Omega))$.

Приклад 3.8. Нехай Ξ_t, $t \in S$ — стаціонарна випадкова функція в H на інволютивній абельовій напівгрупі $(S, \circ, *)$, де $\circ$ — напівгрупова операція і $*$ — інволюція (див. [10]), тобто $\mathsf{E}\,\Xi_t = \text{const}$ і $\Xi_s^* \Xi_t = R(t \circ s^*)$. Функція Ξ_t, $t \in S$ має дискретний спектр в напівгрупі S^* напівхарактерів напівгрупі S, якщо існує не більш ніж зліченна сім'я напівхарактерів $\{\chi_j, j \in J\}$, $\chi_j \in S^*$, така що

$$R(t) = \sum_{j \in J} \chi_j(t) F_j, \qquad F_j \in \mathcal{B}_+(H),\ t \in S,$$

де ряд збігається у слабкій топології $\mathcal{B}(H)$. Тоді згідно з теоремою 2 з [13] має місце дискретне зображення

$$\Xi_t = \sum_{j \in J} \chi_j(t) \Phi_j, \qquad \Phi_j \in \mathcal{L}(H, L_2(\Omega)),\ t \in S,$$

де ряд збігається у сильній топології простору $\mathcal{L}(H, L_2(\Omega)) i \Phi_r^* \Phi_j = \delta_{rj} F_j$.

Приклад 3.9. Нехай Ξ_t, $t \in [0, \ell]$ — неперервний процес другого порядку в просторі H. Тоді його кореляційне ядро $R(t, s)$ дозволяє зображення двократним рядом Фур'є

$$R(t, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \cos \frac{\pi m t}{\ell} \cos \frac{\pi n t}{\ell} F_{nm}, \qquad F_{nm} \in \mathcal{B}(H),$$

де F_{nm} є додатно визначеним ядром на множині $0, 1, 2, \dots$,

$$F_{nm} = \frac{4}{\ell^2} a_{nm} \int_0^\ell \int_0^\ell \cos \frac{\pi n t}{\ell} \cos \frac{\pi m s}{\ell} R(t, s)\, dt\, ds,$$

$$a_{nm} = \begin{cases} \frac{1}{4}, & m = n = 0, \\ \frac{1}{2}, & m > 0,\ n = 0 \text{ або } m = 0,\ n > 0 \\ 1, & m > 0,\ n > 0, \end{cases}$$

і ряд збігається в слабкій топології $\mathcal{B}(H)$. Тоді має місце зображення

$$\Xi_t = \sum_{n=0}^{\infty} \cos \frac{\pi n t}{\ell} \Phi_n, \qquad \Phi_n \in \mathcal{L}(H, L_2(\Omega)),$$

де $\Phi_m^* \Phi_n = F_{nm}$ і ряд збігається в сильній топології $\mathcal{L}(H, L_2(\Omega))$.

Приклад 3.10. Нехай $\mathcal{D}$ — зв'язна відкрита область комплексної площини $\mathbf{C}$ і Ξ_ς, $\varsigma \in \mathcal{D}$ узагальнена випадкова функція другого порядку в H, яка є диференційованою в $\mathcal{D}$ у слабкій топології $\mathcal{L}(H, L_2(\Omega))$. Тоді Ξ_ς називається голоморфною в $\mathcal{D}$ і є неперервною та нескінченною диференційованою в $\mathcal{D}$ у рівномірній топології $\mathcal{L}(H, L_2(\Omega))$, причому для похідних $\Xi_\varsigma^{(n)}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, має місце формула

$$\Xi_\varsigma^{(n)} = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{\Xi_\tau \, d\tau}{(\tau - \varsigma)^{n+1}},$$

де C — коло з центром в ς, що обмежує круг, цілком лежачий в $\mathcal{D}$.

Якщо Ξ_ς голоморфна в крузі $T_r(\varsigma_0) = \{\varsigma\colon |\varsigma - \varsigma_0| < r\}$ і при цьому $\|\Xi_\varsigma\| \le M$, то має місце розклад Тейлора

$$\Xi_\varsigma = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\varsigma - \varsigma_0)^n \Xi_{\varsigma_0}^{(n)}, \qquad \varsigma \in T_r(\varsigma_0),$$

де ряд збігається в рівномірній топології простору $\mathcal{L}(H, L_2(\Omega))$, (див. [11]).

Приклад 3.11. Нехай Ξ_t, $t \in \mathbf{R}^n$, — неперервне випадкове поле в $\mathbf{R}^n$, у якого кореляційне ядро залежить від суми аргументів

$$\Xi_s^* \Xi_t = R(t + s), \qquad t, s \in \mathbf{R}^n,$$

і $\mathsf{E}\,\Xi_t = \text{const}$. Тоді поле Ξ_t є адитивно однорідним і дозволяє спектральний розклад

$$\Xi_t = \int_{\mathbf{R}^n} e^{(\lambda|t)} \, \Phi(d\lambda), \qquad t \in \mathbf{R}^n,$$

де Φ — ортогональна $\mathcal{L}(H, L_2(\Omega))$-значна міра на σ-алгебрі борелевих множин з $\mathbf{R}^n$. Поле Ξ_t має аналітичне продовження $\tilde{\Xi}_\varsigma$, $\varsigma \in \mathbf{C}^n$, що зображуються кратним степеневим рядом

$$\tilde{\Xi}_{\varsigma_1, \ldots, \varsigma_n} = \sum_{(m_1, \ldots, m_n) \ge 0} \frac{\varsigma_1^{m_1} \varsigma_2^{m_2} \ldots \varsigma_n^{m_n}}{m_1! \, m_2! \, \ldots \, m_n!} \Phi_{m_1, \ldots, m_n},$$

де

$$\Phi_{m_1, \ldots, m_n} = \tilde{\Xi}_0^{(m_1, \ldots, m_n)} = \int_{\mathbf{R}^n} \lambda_1^{m_1} \lambda_2^{m_2} \ldots \lambda_n^{m_n} \, \Phi(d\lambda_1 \ldots d\lambda_n)$$

і ряд збігається у сильній топології $\mathcal{L}(H, L_2(\Omega))$ ([19]).

3.5. Нехай T — довільна непорожня множина і $k(t, s)$ — комплекснозначне додатно визначене ядро на $T \times T$.

Теорема 3.3. *Якщо Ξ_t, $t \in T$, випадкова функція другого порядку в H з кореляційним ядром вигляду $R(t, s) = k(t, s)A$, $A \in \mathcal{B}_+(H)$, то існує така система комплекснозначних ω-незалежних функцій $\{\alpha_j(t), j \in J\}$ на T, визначених з точністю до унітарного перетворення, що мають місце зображення*

$$R(t, s) = \sum_{j \in J} \alpha_j(t) \overline{\alpha_j(s)} A, \qquad t, s \in T, \tag{3.29}$$

$$\Xi_t = \sum_{j\in J} \alpha_j(t)\Phi_j, \qquad \Phi_j \in \mathcal{L}(H, L_2(\Omega)), \tag{3.30}$$

де не більш ніж зліченне число доданків відмінних від нуля і $\Phi_r^*\Phi_j = \delta_{jr}A$. *Ряду* (3.29) *збігається у рівномірній топології* $\mathcal{B}(H)$ *при кожних* $t, s \in T$, *а ряд* (3.30) *— рівномірній топології* $\mathcal{L}(H, L_2(\Omega))$ *при кожному* T.

Для обгрунтування твердження теореми зауважимо, що розклад(3.29) ж наслідком розкладу Крейна ядра $k(t,s)$, описаного в пункті 3.3. Розклад (3.30) отримується шляхом застосування теореми 2 з [13], до розкладу (3.29) При цьому вказати збіжність ряду (3.30) випливає зі вказаної збіжності ряду (3.29).

Приклад 3.12. Нехай для випадкової функції Ξ_t, $t \in T$, що фігурує в теоремі 3, ядро $k(t,s)$ дозволяє факторизаційне зображення Карунена

$$k(t,s) = \int_\Lambda f(t,\lambda)\overline{f(s,\lambda)}\,\mu(d\lambda),$$

де $f(t,\cdot) \in L_2(\Lambda, \mathcal{B}, \mu)$, а $(\Lambda, \mathcal{B}, \mu)$ — вимірний простір з додатною мірою μ. Позначимо через $\{g_j(\lambda), j \in J\}$ ортонормований базис в $L_2(\Lambda, \mathcal{B}, \mu)$. Тоді мають місце зображення (3.29), (3.30).з функціями

$$\alpha_j(t) = \int_\lambda f(t,\lambda)\overline{g_j(\lambda)}\,\mu(d\lambda).$$

Приклад 3.13. Нехай Ξ_t — випадкове поле другого порядку в H з n-вимірними ортогональними приростами на n-вимірному кубі $M^n = [0, 2\pi]^n$ в $\mathbf{R}^n$, що має кореляційне ядро

$$R(t,s) = \left(\prod_{r=1}^n \min(t_r, s_r)\right) A, \qquad A \in \mathcal{B}_+(H).$$

Позначимо через $\mathbb{1}_t(\lambda)$, $\lambda \in M^n$, індикаторну функцію паралелепіпеда $\times_{r=1}^n [0, t_r]$, $t = (t_1, \dots, t_n) \in M^n$. Тоді $\mathbb{1}_t(\lambda) \in L_2(M^n)$, де M^n розглядається як вимірний простір з мірою Лебега, та

$$R(t,s) = (\mathbb{1}_t | \mathbb{1}_s)_{L_2(M^n)} A.$$

Функції

$$g_j(\lambda) = (2\pi)^{-n/2} e^{i(j|\lambda)}, \qquad j \in \mathbf{Z}^n,\ \lambda \in M^n,$$

утворюють в $\mathcal{L}_2(M^n)$ ортонормовану систему та кратний ряд Фур'є $\sum_{j\in Z^n} \beta_j(t) g_j(\lambda)$ для $\mathbb{1}_t(\lambda)$, де

$$\begin{aligned}\beta_j(t) &= (2\pi)^{-n/2} \int_{M^n} \mathbb{1}_t(\lambda) e^{-i(j|\lambda)}\, d\lambda \\ &= (2\pi)^{-n/2} \prod_{r=1}^n \int_0^{t_r} e^{-ij_r\lambda_r}\, d\lambda_r = (2\pi)^{-n/2} \prod_{r=1}^n \frac{1 - e^{-ij_r t_r}}{ij_r},\end{aligned}$$

збігається до $\mathbb{1}_t$ в $L_2(M^n)$. Тоді за рівністю Парсеваля

$$R(t,s) = (2\pi)^{-n} \left[\sum_{j\in\mathbf{Z}^n} \prod_{n=1}^n \frac{(1 - e^{-ij_r t_r})(1 - e^{-ij_s t_s})}{j_r^2}\right] A.$$

Звідки за теоремою 3.3.

$$\Xi_t = (2\pi)^{-n/2} \left[\sum_{j\in\mathbf{Z}^n} \prod_{r=1}^n \frac{1 - e^{ij_r t_r}}{ij_r} \Phi_j\right], \qquad t = (t_1, \dots, t_n) \in M^n,$$

де $\Phi_s^*\Phi_j = \delta_{js}A$, $j, s \in \mathbf{Z}^n$. При $n = 1$ будемо мати процес з ортогональними приростами.

Приклад 3.14. Нехай Ξ_t, $t \in [0,\ell]$, дійсний гаусів процес в H з кореляційним ядром

$$R(t,s) = \left(\int_0^{t\wedge s} f(t,\lambda) f(s,\lambda) d\lambda \right) A, \qquad A \in \mathcal{B}_+(H),\ t,s \in [0,\ell],$$

де $t \wedge s = \min(t,s)$ і

$$f(t,\lambda) = \left(\frac{2h\Gamma\left(\frac{3}{2}-h\right)}{\Gamma\left(h+\frac{1}{2}\right)\Gamma(2-2h)} \right)^{1/2} \times \left[\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{h-\frac{1}{2}} (t-\lambda)^{h-\frac{1}{2}} - \left(h-\frac{1}{2}\right) \lambda^{\frac{1}{2}-h} \int_\lambda^t u^{h-\frac{3}{2}} (u-\lambda)^{h-\frac{1}{2}}\, du \right], \quad h \in (0,1),$$

та нульовим середнім $\mathsf{E}\,\Xi_t = 0$. Процес Ξ_t природно називати узагальненим фрактальним броунівським рухом в H з показником Хюрста h (за аналогією з випадком $\dim H = 1$, див. [5]). Тоді якщо $g_j(t)$, $t \in [0,\ell]$ — ортонормований базис в просторі $L_2[0,\ell]$, то Ξ_t дозволяє зображення

$$\Xi_t = \sum_{j\in J} \alpha_j(t) \Phi_j, \qquad \Phi_j \in \mathcal{L}(H, L_2(\Omega)),\ \Phi_r^* \Phi_j = \delta_{rj} A,$$

де

$$\alpha_j(t) = \int_0^t f(t,\lambda) g_j(\lambda)\, d\lambda, \qquad j \in J.$$

Зокрема при $h = \frac{1}{2}$ будемо мати процес узагальненого броунівського руху в H з $f(t,\lambda) \equiv 1$.

Приклад 3.15. Нехай Ξ_t, $t \in \mathbf{R}$, випадковий процес в H з кореляційним ядром вигляду

$$R(t,s) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t,\lambda) \overline{f(s,\lambda)}\, \mu(d\lambda), \right) A, \qquad A \in \mathcal{B}_+(H),$$

де μ — стандартна гаусова міра на $\mathbf{R}$ (тобто μ має щільність

$$(2\pi)^{-1/2} \exp\left\{ \frac{-\lambda^2}{2} \right\}$$

відносно міри Лебега в $\mathbf{R}$). Тоді з результатів теореми 3.3. і прикладу 3.9 випливає, що процес Ξ_t дозволяє зображення вигляду (3.30), де $J = \{0,1,2,\dots\}$ і

$$\alpha_j(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t,\lambda) \frac{H_j(\lambda)}{\sqrt{j!}}\, \mu(d\lambda), \qquad j \in J,$$

а $H_j(\lambda)$ є поліномами Ерміта, бо функції

$$g_j(\lambda) = \frac{H_j(\lambda)}{\sqrt{j!}}$$

утворюють ортонормований базис в $L_2(R,\mu)$ (див. [18]).

Література

1. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Теория случайных процессов*, т. 1, “Наука”, Москва, 1971.
2. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Введение в теорию случайных процессов*, “Наука”, Москва, 1977.
3. А. В. Булинский, А. Н. Ширяев, *Теория случайных процессов* “Физмагиз”, Москва, 2003.
4. Д. В. Гусак, О. Г. Кукуш, О. М. Кулік, Ю. С. Мішура, А. Ю. Пилипенко, *Збірник задач з теорії випадкових процесів та її застосувань*, “Київськ. ун-т”, Київ, 2008.
5. Б. В. Довгай, Ю. В. Козаченко, І. В. Розора, *Моделювання випадкових процесів у фізичних системах*, “Задруга”, Київ, 2010.
6. И. Г. Петровский, *Лекции по теории интегральных уравнений*, “Наука”, Москва, 1965.

7. A. M. Yaglom, *Second-order homogeneous random fields*, Proc. of Fourth Berkely Symp. on Math. Stat. and Probab, Vol. II, Univ. Calif. Press, 1961, pp. 593–622.
8. М. Г. Крейн, *Эрмитово-положительные ядра на однородных пространствах. Ч. 1*, Украинск. мат. журнал **I** (1949), №4, 64–98.
9. Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь, *Лекции по функциональному анализу*, 2-е изд., "Мир", Москва, 1979.
10. O. I. Ponomarenko, Yu. D. Perun, *Multidimensional weakly stationary random functions on semigroups*, Theor. Probab. and. Math. Statist **73** (2006), 151–162.
11. Э. Хилле, Р. Филлипс, *Функциональный анализ и полугруппы*, ИЛ, Москва, 1962.
12. О. І. Пономаренко, *Випадкові лінійні функціонали другого порядку. I*, Теор ймовірн. мат. статист **54** (1996), 137–146.
13. О. І. Пономаренко, *Інтегральні зображення випадкових функцій зі значеннями в локально опуклих просторах*, Теор ймовірн. мат. статист **46** (1992), 132–141.
14. М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко, *Интегральные уравнения*, "Наука", Москва, 1968.
15. М. Л. Краснов, *Интегральные уравнения*, "Наука", Москва, 1968.
16. Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные операторы*, Ч. 2, ИЛ, Москва, 1966.
17. O. Ponomarenko and Yu. Perun, *Multivariate random fields on some homogeneous spaces*, Theory of Stoch. Processes **14(30)** (2008), №3–4, 104–113.
18. Н. Я. Виленкин, *Специальные функции и теория преставлений групп*, "Наука", Москва, 1965.
19. О. І. Пономаренко, Ю. Д. Перун, *Багатовимірні адитивно стаціонарні випадкові функції на опуклих структурах*, Теор. ймовірн. та мат. статистика **74** (2006), 118–130.
20. А. И. Пономаренко, *Стохастические задачи оптимизации*, Изд. КГУ, Киев, 1980.
21. О. І. Пономаренко, *Дискретні зображення випадкових функцій другого порядку, I*, Теор. ймовірн. та мат. статистика (2012).

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Національний університет ім. Тараса Шевченка, проспект Глушкова, 7 г, Київ 03127, Україна

Надійшла 08/09/2011