

ВІДСТАНЬ ДРОБОВОГО БРОУНІВСЬКОГО РУХУ ДО ПІДПРОСТОРУ МАРТИНГАЛІВ З “ПОДІБНИМИ” ЯДРАМИ

УДК 519.21

В. ДОРОШЕНКО, Ю. МІШУРА І О. БАННА

Анотація. Досліджено питання про наближення дробового броунівського руху мартингалами, що є інтегралами по вінерівському процесу від не випадкових функцій, які, в свою чергу, є “подібними” до ядра дробового броунівського руху. Подібність їх полягає в тому, що підінтегральна функція є значенням ядра в деякій точці. Знайдено аналітично та пораховано чисельно верхню і нижню оцінки для відстані між дробовим броунівським рухом і простором гауссівських мартингалів.

ABSTRACT. We study the problem of approximation of a fractional Brownian motion with the help of Gaussian martingales that can be presented as the integrals with respect to a Wiener process and with “similar” nonrandom integrands. We understand “similarity” in such sense that integrand is the value of fractional kernel at some point. We establish analytically and calculate numerically the upper and lower bounds for the distance between fractional Brownian motion and the space of Gaussian martingales.

Аннотация. Исследован вопрос о приближении дробного броуновского движения мартингалами, которые являются интегралами по винеровскому процессу от неслучайных функций, “подобных” ядру дробного броуновского движения. Подобие этих функций состоит в том, что подынтегральная функция является значением ядра в некоторой точке. Найдены аналитически и численно верхняя и нижняя оценки расстояния дробного броуновского движения до пространства гауссовских мартингалов.

1. ВСТУП

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t, t \in [0, 1]\}, \mathbb{P})$ — повний ймовірнісний простір. Розглянемо на цьому просторі випадковий процес $B^H = \{B_t^H, \mathcal{F}_t, t \in [0, 1]\}$, що є дробовим броунівським рухом з індексом Хюрста $H \in (0, 1)$. Тобто B^H є гауссівським процесом з нульовим середнім і коваріаційною функцією $\mathbb{E} B_t^H B_s^H = \frac{1}{2}(s^{2H} + t^{2H} - |t - s|^{2H})$. Цей процес зі значеннями індекса Хюрста $H > \frac{1}{2}$ дуже широко використовується при моделюванні економічних та технічних явищ з довгостроковою залежністю. Добре відомо, що дробовий броунівський рух не є ні семімартингалом, ні марковським процесом, за виключенням випадку, коли $H = \frac{1}{2}$ (в цьому випадку дробовий броунівський рух перетворюється на стандартний вінерівський процес). Тому виникає природне питання: наскільки далеко розташований дробовий броунівський рух від процесів більш простої структури, зокрема, від гауссівських мартингалів? Ці гауссівські мартингали мають вигляд $\int_0^t a(s) d\widetilde{W}(s)$, $t \in [0, 1]$, для деякого вінерівського процесу $\widetilde{W}(t)$, $t \in [0, 1]$. Таким чином, виникає наступна задача. Нехай $\widetilde{W} = \{\widetilde{W}_t, \mathcal{F}_t, t \in [0, 1]\}$ — деякий вінерівський процес. Ми шукаємо функцію

2000 *Mathematics Subject Classification*. Primary 60G15, 60G22; Secondary 60G44.

Ключові слова і фрази. Вінерівський процес, дробовий броунівський рух, гауссовий мартингал, наближення ДБР гауссівськими мартингалами.

$a \in L_2([0, 1])$, яка мінімізує відстань

$$\varrho_H^2 := \inf_{a \in L_2([0,1])} \sup_{t \in [0,1]} \mathbb{E} \left(B_t^H - \int_0^t a(s) d\widetilde{W}_s \right)^2.$$

Щоб розв'язати цю задачу, спочатку використаємо інтегральне зображення дробового броунівського руху через стандартний вінерівський процес на скінченному інтервалі, наведене в статті [1]. Розглянемо інтегральне ядро зі слабкою сингулярністю

$$K(t, s) = C_\alpha \left(t^\alpha s^{-\alpha} (t-s)^\alpha - \alpha s^{-\alpha} \int_s^t u^{\alpha-1} (u-s)^\alpha du \right) \mathbb{1}_{0 < s < t \leq 1},$$

де

$$C_\alpha = \alpha \sqrt{\frac{(2\alpha + 1)\Gamma(1 - \alpha)}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(1 - 2\alpha)}},$$

Γ – гамма-функція, $\alpha = H - \frac{1}{2}$. Тоді існує вінерівський процес $W = \{W_t, \mathcal{F}_t, t \in [0, 1]\}$ відносно фільтрації \mathcal{F} , для якого B^H допускає зображення

$$\begin{aligned} B_t^H &= \int_0^1 K(t, s) dW_s = \int_0^t K(t, s) dW_s \\ &= C_\alpha \int_0^t \left(t^\alpha s^{-\alpha} (t-s)^\alpha - \alpha s^{-\alpha} \int_s^t u^{\alpha-1} (u-s)^\alpha du \right) dW_s. \end{aligned} \quad (1)$$

Зауважимо, що для $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ ядро $K(t, s)$ може бути спрощено до вигляду

$$K(t, s) = C_\alpha s^{-\alpha} \int_s^t u^\alpha (u-s)^{\alpha-1} du \mathbb{1}_{0 < s < t \leq 1}.$$

Тому, а також з міркувань можливого застосування, далі розглядаємо лише дробовий броунівський рух з індексом Хюрста $H \in (\frac{1}{2}, 1)$. В статті [2] доведено, що найкраще наближення досягається за умови, що $W = \widetilde{W}$, тобто задача зводиться до мінімізації виразу

$$\varrho_H^2 = \inf_{a \in L_2([0,1])} \sup_{t \in [0,1]} \int_0^t (K(t, s) - a(s))^2 ds,$$

отже, стає суто аналітичною.

Наступний функціонал

$$f(x) = \sup_{t \in [0,1]} \int_0^t (K(t, s) - x(s))^2 ds. \quad (2)$$

коректно визначений для всіх $x \in L_2([0, 1])$. В статті [2] доведено, що функціонал f досягає мінімуму в єдиній точці $x \in L_2([0, 1])$. Аналітичний вигляд цієї мінімізуючої функції невідомий. Тому доречно розглядати функціонал f на деяких підкласах функцій з $L_2([0, 1])$ і шукати його мінімум на цих підкласах. Цей мінімум буде оцінкою згори для відстані дробового броунівського руху до простору гауссових мартингалів. Деякі з таких підкласів розглянуто в статтях [3]–[7]. В даній роботі ми розглядаємо підклас \mathcal{K} функцій з $L_2([0, 1])$, що мають вигляд

$$a(s) = K(t_0, s) \mathbb{1}_{0 < s < t_0}$$

для деякої точки $t_0 \in [0, 1]$. Знайдено аналітично точку t_0^* , яка мінімізує функціонал f на підкласі \mathcal{K} . Чисельно оцінено відстань

$$\hat{\varrho}_H^2 = \sup_{t \in [0, 1]} \int_0^t (K(t, s) - K(t_0^*, s))^2 ds. \quad (3)$$

Ця відстань є оцінкою згори для ϱ_H^2 . Наведено також оцінку знизу для цієї відстані.

2. ЗНАХОДЖЕННЯ МІНІМІЗУЮЧОЇ ФУНКЦІЇ В КЛАСІ \mathcal{K}

Нехай $t_0 \in [0, 1]$. Порахуємо значення функціоналу f на функціях з підкласу \mathcal{K} , тобто на функціях вигляду

$$a_{t_0}(s) = \begin{cases} K(t_0, s) & \text{при } 0 < s \leq t_0, \\ 0 & \text{при } t_0 \leq s \leq 1, \end{cases}$$

та знайдемо $t_0^* \in [0, 1]$, для якого функція $a_{t_0^*}$ мінімізує функціонал f на підкласі \mathcal{K} . Позначимо $\hat{\varrho}_H^2 = \sup_{t \in [0, 1]} \int_0^t (K(t, s) - K(t_0^*, s))^2 ds$ та $g_{t_0}(t) = \int_0^t (a_{t_0}(s) - K(t, s))^2 ds$. Зауважимо, що в силу властивостей ядра \mathcal{K} функція g_{t_0} є неперервною на відрізку $[0, 1]$. Тоді

$$\hat{\varrho}_H^2 = \max_{0 \leq t \leq 1} g_{t_0^*}(t) = \min_{t_0 \in [0, 1]} f(a_{t_0}).$$

Лема 2.1. *Має місце рівність*

$$\sup_{0 \leq t \leq t_0} g_{t_0}(t) = C_\alpha^2 t_0^{2H} \sup_{0 \leq p \leq 1} \int_0^p y^{2\alpha} \left(\int_{p/y}^{1/y} x^\alpha (x-1)^{\alpha-1} dx \right)^2 dy.$$

Доведення. Нехай $t < t_0$. Мають місце наступні тотожні перетворення:

$$\begin{aligned} g_{t_0}(t) &= \int_0^t (a_{t_0}(s) - K(t, s))^2 ds = \int_0^t (K(t_0, s) - K(t, s))^2 ds \\ &= C_\alpha^2 \int_0^t \left(s^{-\alpha} \int_s^{t_0} u^\alpha (u-s)^{\alpha-1} - s^{-\alpha} \int_s^t u^\alpha (u-s)^{\alpha-1} \right)^2 ds \\ &= C_\alpha^2 \int_0^t s^{-2\alpha} \left(\int_t^{t_0} u^\alpha (u-s)^{\alpha-1} du \right)^2 ds \\ &= C_\alpha^2 \int_0^t s^{-2\alpha} \left(s^{2\alpha} \int_{t/s}^{t_0/s} x^\alpha (x-1)^{\alpha-1} dx \right)^2 ds \\ &= C_\alpha^2 \int_0^t s^{2\alpha} \left(\int_{t/s}^{t_0/s} x^\alpha (x-1)^{\alpha-1} dx \right)^2 ds \\ &= C_\alpha^2 \int_0^{t/t_0} (yt_0)^{2\alpha} \left(\int_{t/t_0 y}^{1/y} x^\alpha (x-1)^{\alpha-1} dx \right)^2 t_0 dy \\ &= C_\alpha^2 t_0^{2H} \int_0^{t/t_0} y^{2\alpha} \left(\int_{t/t_0 y}^{1/y} x^\alpha (x-1)^{\alpha-1} dx \right)^2 dy. \end{aligned} \quad (4)$$

Позначимо $p = t/t_0$. Тоді

$$g_{t_0}(t) = C_\alpha^2 t_0^{2H} \int_0^p y^{2\alpha} \left(\int_{p/y}^{1/y} x^\alpha (x-1)^{\alpha-1} dx \right)^2 dy,$$

звідки випливає доведення леми. □

Лема 2.2. При $t > t_0$ виконується рівність

$$g_{t_0}(t) = (t - t_0)^{2H}. \quad (5)$$

Доведення. Позначимо $M_t = \int_0^t a(s) dW_s$. При $t > t_0$ маємо $M_t = \int_0^{t_0} K(t_0, s) dW_s + B_{t_0}^H$. Звідси

$$g_{t_0}(t) = \mathbb{E} (B_t^H - M_t)^2 = \mathbb{E} (B_t^H - B_{t_0}^H)^2 = (t - t_0)^{2H}. \quad \square$$

Отже, $\sup_{t_0 \leq t \leq 1} g_{t_0}(t) = (1 - t_0)^{2H}$. Позначимо

$$D_\alpha = C_\alpha^2 \sup_{0 \leq p \leq 1} \int_0^p s^{2\alpha} \left(\int_{p/s}^{1/s} x^\alpha (x-1)^{\alpha-1} dx \right)^2 ds. \quad (6)$$

Лема 2.3. Має місце рівність

$$\hat{\varrho}_H^2 = \min_{t_0 \in [0,1]} f(a_{t_0}) = \frac{D_\alpha}{(1 + D_\alpha^{1/2H})^{2H}}.$$

Доведення. Визначимо функції $u(t) = D_\alpha t^{2H}$, $v(t) = (1 - t)^{2H}$, $t \in [0, 1]$.

Тоді

$$f(a_{t_0}) = \max\{u(t_0), v(t_0)\}.$$

При $t \in [0, 1]$ функція u зростає, функція v строго монотонно спадає. Функції u , v є неперервними. Крім того, виконуються співвідношення $0 = u(0) < v(0) = 1$, $D_\alpha = u(1) > v(1) = 0$. Отже, існує єдина точка $t_0^* \in (0, 1)$, для якої $u(t_0^*) = v(t_0^*)$, і при цьому

$$u(t_0^*) = v(t_0^*) = \min_{t_0 \in [0,1]} \max\{u(t_0), v(t_0)\}.$$

Тепер знайдемо точку t_0^* . З рівності $D_\alpha t_0^{*2H} = (1 - t_0^*)^{2H}$ випливає, що

$$t_0^* = \frac{1}{1 + D_\alpha^{1/2H}}.$$

Отже,

$$\min_{t_0 \in [0,1]} f(a_{t_0}) = u(t_0^*) = \frac{D_\alpha}{(1 + D_\alpha^{1/2H})^{2H}}. \quad \square$$

3. Оцінки знизу для відстані від дробового броунівського руху до простору гауссівських мартингалів

Оцінку знизу для відстані ϱ_H^2 було наведено в статті [2]. Згідно з лемою 4 цієї статті, для будь-якої функції $a \in L_2([0, 1])$ і будь-яких $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$ має місце наступна нерівність

$$\sup_{t \in [0,1]} \int_0^t (K(t, s) - a(s))^2 ds \geq \frac{1}{4} \int_0^{t_1} (K(t_2, s) - K(t_1, s))^2 ds. \quad (7)$$

Це означає, що

$$\varrho_H^2 \geq \frac{1}{4} \sup_{0 \leq t \leq 1} \int_0^t (K(1, s) - K(t, s))^2 ds.$$

Позначимо

$$\check{\varrho}_H^2 = \frac{1}{4} \sup_{0 \leq t \leq 1} \int_0^t (K(1, s) - K(t, s))^2 ds.$$

Тобто $\check{\varrho}_H^2$ є оцінкою знизу на наближення дробового броунівського руху до простору гауссівських мартингалів. Дослідимо поведінку функції $g(t) = \int_0^t (K(1, s) - K(t, s))^2 ds$.

Лема 3.1. 1) Функція g має єдину точку максимуму на відрізку $[0, 1]$.

2) Має місце рівність

$$\check{\varrho}_H^2 = \frac{D_\alpha}{4}.$$

Доведення. 1) Очевидно, $g(0) = g(1) = 0$. Таким чином, її точки максимуму розташовані на інтервалі $(0, 1)$. Похідна функції g має вид

$$g'(t) = K^2(1, t) - 2 \int_0^t (K(1, s) - K(t, s)) K'_t(t, s) ds.$$

Розглянемо окремо інтеграл $\int_0^t (K(1, s) - K(t, s)) K'_t(t, s) ds$. Він, очевидно, дорівнює

$$\begin{aligned} I(t) &= \int_0^t (K(1, s) - K(t, s)) K'_t(t, s) ds \\ &= t^\alpha \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} s^{-2\alpha} \int_t^1 u^\alpha (u-s)^{\alpha-1} du ds \\ &= t^\alpha \int_t^1 u^\alpha \int_0^t s^{-2\alpha} (t-s)^{\alpha-1} (u-s)^{\alpha-1} ds du \\ &= t^{\alpha-1} \int_t^1 u^\alpha \int_0^1 s^{-2\alpha} (1-s)^{\alpha-1} \left(\frac{u}{t} - s\right)^{\alpha-1} ds du. \end{aligned} \quad (8)$$

В статті [1] було встановлено, що для будь-яких $c > 1$, $\mu > 0$, $\nu > 0$ має місце рівність

$$\int_0^1 s^{\mu-1} (1-s)^{\nu-1} (c-s)^{-\mu-\nu} ds = c^{-\nu} (c-1)^{-\mu} B(\mu, \nu),$$

де $B(\cdot, \cdot)$ — бета-функція. Застосуємо цю рівність до правої частини (8) і одержимо, що

$$\begin{aligned} I(t) &= B(1-2\alpha, \alpha) t^{\alpha-1} \int_t^1 u^\alpha \left(\frac{u}{t} - 1\right)^{2\alpha-1} du = B(1-2\alpha, \alpha) \int_t^1 (u-t)^{2\alpha-1} du \\ &= \frac{B(1-2\alpha, \alpha)}{2\alpha} (1-t)^{2\alpha}. \end{aligned} \quad (9)$$

З огляду на (9), рівняння $g'(t) = 0$ зводиться до рівняння

$$K^2(1, t) = \frac{B(1-2\alpha, \alpha)}{2\alpha} (1-t)^{2\alpha},$$

або, що еквівалентно, до рівняння

$$K(1, t) = C_\alpha (1-t)^\alpha \quad (10)$$

зі сталою $C_\alpha^2 = B(1-2\alpha, \alpha)/\alpha$. Оскільки $K(1, 1) = 0$, то рівняння (10) має місце при $t = 1$. При $t = 0$ ліва частина (10) дорівнює $+\infty$, а права дорівнює C_α . Перепишемо тепер (10) у вигляді $t^\alpha \int_1^{1/t} u^\alpha (u-1)^{\alpha-1} du = C_\alpha (1-t)^\alpha$, або

$$\int_1^{1/t} u^\alpha (u-1)^{\alpha-1} du = \left(\frac{1}{t} - 1\right)^\alpha. \quad (11)$$

Розглянемо на інтервалі $(0, 1)$ функцію

$$G(t) = \int_1^{1/t} u^\alpha (u-1)^{\alpha-1} du - \left(\frac{1}{t} - 1\right)^\alpha.$$

Якщо $t \rightarrow 0$, то $G(t) \sim t^{-2\alpha}/(2\alpha) - C_\alpha t^{-\alpha} \rightarrow +\infty$. Якщо $t \rightarrow 1$, то $G(t) \rightarrow 0$. Похідна функції $G(t)$ дорівнює $G'(t) = (t^{-1} - 1)^{\alpha-1} t^{-2} (\alpha C_\alpha - t^{-\alpha})$. Вона обертається в нуль в єдиній точці, і ця точка належить інтервалу $(0, 1)$, оскільки, як було доведено в статті [3], $\alpha B(1-2\alpha, \alpha) > 1$ для $\alpha \in (0, 1/2)$, звідки і $\alpha C_\alpha > 1$. Таким чином,

функція $G(t)$ спочатку строго монотонно спадає на інтервалі $(0, 1)$, потім має єдиний мінімум на цьому інтервалі, цей мінімум очевидно від'ємний, і потім вона строго монотонно зростає до нуля. Отже, вона лише один раз обертається в нуль в деякій точці, розташованій між 0 і точкою мінімуму. Лему доведено.

2) Зауважимо, що $g(t) = g_1(t)$, $t \in [0, 1]$, де функція g_{t_0} визначена в розділі 2. Тоді за лемою 2.1 та означення D_α маємо

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} g_1(t) = C_\alpha^2 \sup_{0 \leq p \leq 1} \int_0^p y^{2\alpha} \left(\int_{p/y}^{1/y} x^\alpha (x-1)^{\alpha-1} dx \right)^2 dy = D_\alpha. \quad \square$$

Наслідок 3.1. Для всіх $H \in (\frac{1}{2}, 1)$

$$\hat{\varrho}_H^2 = \frac{D_\alpha}{4} \leq \varrho_H^2 \leq \frac{D_\alpha}{(1 + D_\alpha^{1/2H})^{2H}} = \hat{\varrho}_H^2. \quad (12)$$

4. ОБЧИСЛЕННЯ

Обчислимо D_α , тоді за формулою (12) знайдемо $\hat{\varrho}_H^2$ та ϱ_H^2 . Чисельне знаходження D_α зводиться до обчислення інтегралу виду

$$\int_A^B s^{2\alpha} \left(\int_{u(s)}^{v(s)} x^\alpha (x-1)^{\alpha-1} dx \right)^2 ds, \quad (13)$$

де $A, B \in [0, 1]$, $A \leq B$, u, v – такі функції на $[A, B]$, що $1 \leq u(s) \leq v(s)$, $s \in [A, B]$. Покажемо як чисельно знаходити такі інтеграли. Визначимо функцію Q формулою

$$Q(z) = \int_1^z x^\alpha (x-1)^{\alpha-1} dx, \quad z \in [1, \infty).$$

Тоді (13) можна переписати у вигляді

$$\int_A^B s^{2\alpha} (Q(v(s)) - Q(u(s)))^2 ds. \quad (14)$$

Основною проблемою в обчисленні Q є те, що підінтегральна функція має особливість в точці 1. Щоб усунути особливість, проінтегруємо частинами.

$$\begin{aligned} Q(z) &= \int_1^z x^\alpha (x-1)^{\alpha-1} dx = \frac{x^\alpha (x-1)^\alpha}{\alpha} \Big|_1^z - \int_1^z x^{\alpha-1} (x-1)^\alpha dx \\ &= \frac{z^\alpha (z-1)^\alpha}{\alpha} - \int_1^z x^{\alpha-1} (x-1)^\alpha dx. \end{aligned} \quad (15)$$

Позначимо $q(z) = x^{\alpha-1} (x-1)^\alpha$, $z \in [1, \infty)$.

Алгоритм обчислення $Q(z)$, $z \in [1, \infty)$. Покладемо $N = 100\,000$ та $\Delta = 0.1$. Розглянемо розбиття π_N відрізка $[1, 1 + N\Delta] = [1, 10\,001]$ таке, що

$$\pi_N = \{1 = t_0^N < t_1^N = 1 + \Delta < \dots < t_k^N = 1 + k\Delta < \dots < t_N^N = 1 + N\Delta\}.$$

Наближено обчислимо $H(z)$, $z \in [1, \infty)$, наступним чином.

- (1) Якщо існує k таке, що $z = t_k^N$, то, використовуючи формулу Сімпсона чисельного інтегрування [8], одержимо

$$Q(t_k^N) \approx \frac{(t_k^N (t_k^N - 1))^\alpha}{\alpha} - \sum_{i=1}^k (q(t_{i-1}^N) + 4q((t_{i-1}^N + t_i^N)/2) + q(t_i^N)) / 6.$$

- (2) Якщо $t_k^N < z < t_{k+1}^N$, $1 \leq k \leq N-1$, то використовуючи пункт (1), робимо лінійну інтерполяцію

$$Q(z) \approx \frac{(t_{k+1}^N - z)}{\Delta} Q(t_k^N) + \frac{(z - t_k^N)}{\Delta} Q(t_{k+1}^N).$$

- (3) Якщо $z > t_N^N$, то, беручи до уваги те, що за правилом Лопіталя $Q(z) \sim z^{2\alpha}/(2\alpha)$, $z \rightarrow \infty$, покладемо

$$Q(z) \approx \frac{z^{2\alpha}}{2\alpha}.$$

Алгоритм обчислення $I(A, B, u, v) = \int_A^B s^{2\alpha} (Q(v(s)) - Q(u(s)))^2 ds$. Нехай $N = 1000$. Покладемо $\Delta = (B - A)/N$ Розглянемо таке розбиття π відрізка $[A, B]$:

$$\pi = \{A = s_0^N < A + \Delta = s_1^N < \dots < A + k\Delta = s_k^N < \dots < B = s_N^N\}.$$

Позначимо $s_i^{N*} = (s_{i-1}^N + s_i^N)/2$.

Тоді

$$\begin{aligned} \int_A^B s^{2\alpha} (Q(v(s)) - Q(u(s)))^2 ds &= \sum_{i=1}^N \int_{s_{i-1}^N}^{s_i^N} s^{2\alpha} (Q(v(s)) - Q(u(s)))^2 ds \\ &\approx \sum_{i=1}^N (Q(v(s_i^{N*})) - Q(u(s_i^{N*})))^2 \int_{s_{i-1}^N}^{s_i^N} s^{2\alpha} ds \\ &= \frac{1}{2\alpha + 1} \sum_{i=1}^N \left(Q(v(s_i^{N*})) - Q(u(s_i^{N*})) \right)^2 \\ &\quad \times \left((s_i^N)^{2\alpha+1} - (s_{i-1}^N)^{2\alpha+1} \right). \end{aligned} \quad (16)$$

З означення D_α маємо

$$D_\alpha = \max_{0 \leq t \leq 1} g(t) = \max_{0 \leq t \leq 1} I(0, t, u_t, v), \quad (17)$$

де $u_t(y) = t/y$, $v = 1/y$, $y \in (0, 1]$.

Алгоритм обчислення D_α . Знайдемо максимум функції $g(t)$, $t \in [0, 1]$, використовуючи стандартні методи оптимізації унімодальних функції (g унімодальна за лемою 3.1). Для обчислення g будемо використовувати формулу (17).

Наступна таблиця містить результати обчислень для деяких H .

H	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95
D_α	0.0260	0.0289	0.0451	0.0742	0.1171	0.1767	0.2537	0.3368	0.3586
t_0^*	0.9650	0.9504	0.9156	0.8651	0.8069	0.7471	0.6914	0.6467	0.6317
$\check{\varrho}_H^2$	0.0065	0.0072	0.0113	0.0185	0.0293	0.0442	0.0634	0.0842	0.0897
$\hat{\varrho}_H^2$	0.0250	0.0272	0.0402	0.0606	0.0849	0.1108	0.1355	0.1537	0.1499

На рис. 1 зображені значення $\check{\varrho}_H^2$ та $\hat{\varrho}_H^2$ для H від 0.51 до 0.99 з кроком 0.01.

ЛІТЕРАТУРА

1. I. Norros, E. Valkeila, and J. Virtamo, *An elementary approach to a Girsanov formula and other analytical results on fractional Brownian motions*, Bernoulli **5** (1999), no. 4, 571–587.
2. S. Shklyar, G. Shevchenko, Yu. Mishura, V. Doroshenko, and O. Banna, *The approximation of fractional Brownian motion by martingales*, Methodology and Computing in Applied Probability. (to appear)
3. О. Л. Банна, *Наближення дробового броунівського руху зі значенням індекса Хюрста, близьким до одиниці, стохастичними інтегралами з лінійно-показниковими підинтегральними функціями* Прикладна статистика, Актуарна та фінансова математика (2007), №1, 60–67.

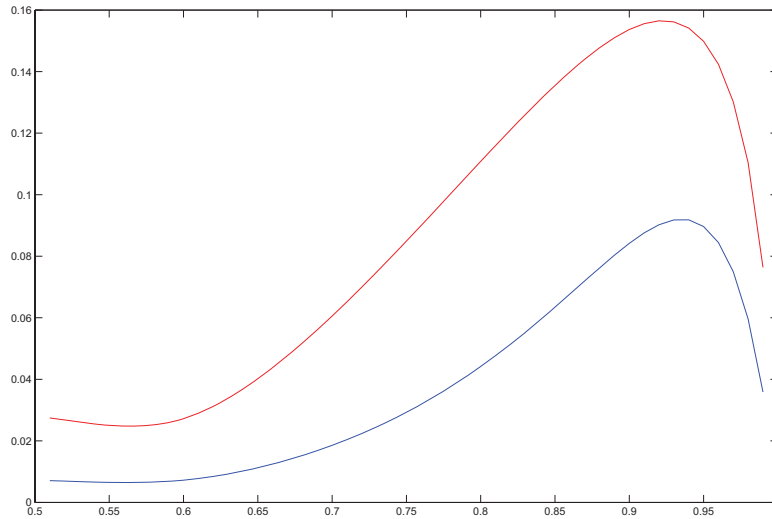


Рис. 1. ϱ_H^2 (нижній графік), $\hat{\varrho}_H^2$ (верхній графік)

4. О. Л. Банна, Ю. С. Мішура, *Найпростіші мартингали найкращого наближення до дробового броунівського руху*, Вісник Київського національного університету ім.Т.Шевченка, серія: математика і механіка (2008), №19, 38–43.
5. Ю. С. Мішура, О. Л. Банна, *Наближення дробового броунівського руху вінерівськими інтегралами*, Теорія ймовірностей та математична статистика **79** (2008), 106–115.
6. O. L. Banna and Y. S. Mishura, *Approximation of fractional Brownian motion with associated Hurst index separated from 1 by stochastic integrals of linear power functions*, Theory of Stochastic Processes **14(30)** (2008), №3–4, 1–16.
7. О. Л. Банна, Ю. С. Мішура, *Оцінка відстані між дробовим броунівським рухом і простором гауссових мартингалів на відрізку*, Теорія ймовірностей та математична статистика **83** (2010), 12–21.
8. Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков, *Численные методы*, 4-е изд., “БИНОМ”, Москва, 2006.

KYIV NATIONAL TARAS SHEVCHENKO UNIVERSITY, FACULTY OF MECHANICS AND MATHEMATICS,
VOLODYMYRSKA 64, 01601 KYIV, UKRAINE
Адреса електронної пошти: vadym.doroshenko@gmail.com

KYIV NATIONAL TARAS SHEVCHENKO UNIVERSITY, FACULTY OF MECHANICS AND MATHEMATICS,
VOLODYMYRSKA 64, 01601 KYIV, UKRAINE
Адреса електронної пошти: yumishura@gmail.com

KYIV NATIONAL TARAS SHEVCHENKO UNIVERSITY, FACULTY OF MECHANICS AND MATHEMATICS,
VOLODYMYRSKA 64, 01601 KYIV, UKRAINE

Надійшла 01/06/2012