Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 88, 2013, стор. 98–109

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 88, 2013, pp. 98–109

АСИМПТОТИКА ПРОРІДЖЕНИХ МАРКОВСЬКИХ МОМЕНТІВ НА НЕОДНОРІДНИХ ЗА ЧАСОМ ДИСКРЕТНИХ ЛАНЦЮГАХ МАРКОВА

УДК 519.21

М. В. КАРТАШОВ

Анотація. Ми розглядаємо неоднорідний за часом дискретний ланцюг Маркова, та сім'ю субстохастичних матриць (Q_s), що підпорядковані (не перевищують) перехідні ймовірності (P_s) ланцюга за один крок. З сім'єю (Q_s) пов'язаний марковський момент τ — момент обриву ланцюга з перехідними матрицями (Q_s). Вважається, що (P_s) та (Q_s) близькі у рівномірній метриці, тобто $\tau \to \infty$ у схемі серій. У припущенні рівномірної малості за часом s збурення $P_s - Q_s$ обчислено асимптотику ймовірності розорення (обриву) $\mathsf{P}(\tau > n)$ при $n \to \infty$. Наведено застосування.

Abstract. We consider time-inhomogeneous discrete Markov chain and family of substochastic matrices (Q_s) subordinated to (not greater than) the one-step transition matrices (P_s) of the chain. With family (Q_s) is connected the Markov moment τ on the chain—as the killing moment for the chain with transitions (Q_s). We assume that P_s and Q_s are close in the uniform metric, so the moment $\tau \to \infty$ in the scheme of series. Under conditions of uniform negligibility in time s of disturbations $P_s - Q_s$ the asymptotic of the ruin (killing) probabilities $\mathsf{P}(\tau > n)$ as $n \to \infty$ is calculated. Applications are also considered.

Аннотация. Мы рассматриваем неоднородную по времени дискретную цепь Маркова, и семью субстохастических матриц (Q_s), подчиненных (не превышающих) переходные вероятности (P_s) цепи за один шаг. С семьей (Q_s) связан марковский момент τ — момент обрыва цепи с переходными матрицами (Q_s). Считается, что (P_s) и (Q_s) близки в равномерной метрике, то есть $\tau \to \infty$ в схеме серий. В предположении равномерной малости по времени s возмущение $P_s - Q_s$ найдена асимптотика вероятности разорения (обрыва) $\mathsf{P}(\tau > n)$ при $n \to \infty$. Приведены применения.

1. Вступ

Дослідження стійкості розподілів загальних ланцюгів Маркова при широких припущеннях на характер перемішування детально висвітлене у монографії автора [3, 1996], де наведено також ряд застосувань. Основу доведень складали аналітичні операторні методи, включно з рядом нових нерівностей для асимптотики процесів відновлення та розв'язків рівняння відновлення.

Основи теорії стійкості стохастичних моделей викладені у монографії В. Золотарьова [4, 1986]. Важливі досягнення у теорії стійкості наведені у книзі С. Мейна, Р. Твіді [5, 1993].

Дана робота використовує метод склеювання. Вперше ідея склеювання була запропонована У. Дьобліним [1, 1938]. Застосування до стійкості ланцюгів Маркова наведені у [6, 2012].

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60J45; Secondary 60A05, 60K05.

Ключові слова і фрази. Inhomogeneous discrete Markov chains, rare Markov moments, ruin probability, coupling method неоднорідні дискретні ланцюги Маркова, проріджені моменти Маркова, ймовірність розорення метод склеювання.

2. Марковські моменти та підпорядковані матриці

Розглянемо неоднорідний за часом ланцюг Маркова $X = (X_t, t = 0, 1, \dots)$ відносно потоку сигма-алгебр $(\mathfrak{F}_t, t = 0, 1, \dots)$ зі значеннями у дискретному фазовому просторі $E = \{i, j, k, \dots\}$.

Визначимо матриці $P_t = \big(P_{ij}^{(t)}, i, j \in E\big)$ ймовірностей переходу ланцюга за один крок (з моменту t до моменту $t+1$): $P_{ij}^{(t)} = \mathsf{P}(X_{t+1} = j \mid X_t = i)$, $t \geq 0$. Позначимо через P_{si}, E_{si} умовні ймовірності та математичні сподівання на ймовірнісному просторі, де заданий ланцюг Маркова X, з початковою умовою $X_s = i$.

Для $n \geq 0$ позначимо матриці ймовірностей переходу за n кроків:

$$P^{(s,n)} \equiv \prod_{t=s}^{s+n-1} P_t = P_{si}(X_{s+n} = j), P^{(s,0)} \equiv I. \tag{1}$$

Символом $o \in E$ нижче позначається початковий стан ланцюга у момент 0: $X_0 = o$. Крім того, будемо припускати виродженість сигма-алгебри $\mathfrak{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$.

Надалі підсумовування та обчислення верхньої межі без вказівки на множину індексів поширюється на простір E. Позначення $x^{\pm}$ є додатною та від'ємною частиною числа x, $\delta_{ij} = 1_{i=j}$ — символи Кронекера.

Розглянемо довільний $(\mathfrak{F}_t)$-марковський момент τ такий, що $\tau \geq 1$. З ним пов'язані субстохастичні матриці $Q_s = (Q_{ij}^{(s)}, i, j \in E)$ для $s \geq 0$, де

$$Q_{ij}^{(s)} \equiv \mathsf{P}(X_{s+1} = j, \tau > s+1 \mid X_s = i, \tau > s). \tag{2}$$

Зауважимо, що сім'я (Q_s) підпорядкована (P_s), тобто

$$Q_{ij}^{(s)} \leq P_{ij}^{(s)}, \qquad i, j \in E, \ \geq 0. \tag{3}$$

Навпаки, нехай $Q_s = \big(Q_{ij}^{(s)}\big)$ — сім'я субстохастичних матриць, що підпорядковані (3) перехідним матрицям (P_s) ланцюга X.

Розглянемо розширення $\overline{E} = E \times \{0, 1\}$ простору E, та визначимо $\overline{E}$-значний ланцюг Маркова $\overline{X} = (\overline{X}_t)$ з $\overline{X}_t = (X_t, d_t)$ рекурентно наступним чином. Покладемо $\overline{X}_0 = (o, 0)$. Нехай $\overline{X}_s = (i, d)$, $s \geq 0$. Згенеруємо E-значну випадкову величину Y незалежно від усіх попередньо згенерованих величин, з розподілом $\mathsf{P}(Y = j) = P_{ij}^{(s)}$. Якщо $d = 1$, оберемо $d_{s+1} = 1$ та $X_{s+1} = Y$. Якщо ж $d = 0$, оберемо випадково $d_{s+1} = 1$ з імовірністю $\pi = (P_{ij}^{(s)} - Q_{ij}^{(s)})/P_{ij}^{(s)}$ та $d_{s+1} = 0$ з імовірністю $1 - \pi$. Цей вибір також робитимемо незалежно від попередніх. Тут за означенням $\pi = 0$, якщо $P_{ij}^{(s)} = 0 = Q_{ij}^{(s)}$. Нарешті, покладемо $\overline{X}_{s+1} = (X_{s+1}, d_{s+1})$.

Таким чином рекурентно побудована послідовність $\overline{X} = (\overline{X}_t)$ є ланцюгом Маркова відносно потоку сигма-алгебр $(\overline{\mathfrak{F}}_t = \sigma[\overline{X}_s, s \leq t])$. Одночасно послідовність $(X_t, t \geq 0)$ є $(\overline{\mathfrak{F}}_t)$-ланцюгом Маркова з перехідними імовірностями

$$\mathsf{P}(X_{s+1} = j \mid X_s = i) = P_{ij}^{(s)},$$

а марковський момент $\tau = \inf(t \geq 1, d_t = 1)$ задається (2) матрицями (Q_s), що є підпорядковані (3).

Наведена вище конструкція є реалізацією у дискретному випадку концепції процесу Маркова з обривом [2, 1973].

Для опису розподілу моменту τ розглянемо залишкову субстохастичну матрицю та функцію ризику

$$R_s = P_s - Q_s = \left(R_{ij}^{(s)}\right), \qquad \beta_s(i) = \sum_j R_{ij}^{(s)} = 1 - \sum_j Q_{ij}^{(s)}. \tag{4}$$

Визначимо також функцію ризику переходів

$$\alpha_s(i,j) = R_{ij}^{(s)}/P_{ij}^{(s)} = \left(P_{ij}^{(s)} - Q_{ij}^{(s)}\right)/P_{ij}^{(s)}, \qquad s \ge 0,\ i,j \in E, \tag{5}$$

де за означенням $0/0 = 0$. Зауважимо, що згідно з (4)

$$\beta_s(i) = \sum_j \alpha_s(i,j) P_{ij}^{(s)}. \tag{6}$$

Лема 1. *Сумісний та умовний розподіли моменту* τ *задаються при* $t \ge s \ge 0$, $i_0 = i,\ i_1, \ldots, i_t \in E$ *рівностями*

$$P_{0i}(\tau > t,\ X_1 = i_1, \ldots, X_t = i_t) = \prod_{s=0}^{t-1} Q_{i_s, i_{s+1}}^{(s)}, \tag{7}$$

$$P_{0i}(\tau > s \mid X_1 = i_1, \ldots, X_t = i_t) = \prod_{r=0}^{s-1} (1 - \alpha_r(i_r, i_{r+1})). \tag{8}$$

3. Рівномірні Марковські моделі ризику

Надалі буде розглядатись схема серій, у якій розподіли ланцюга X та моменту τ, а саме матриці P_s, Q_s, $s \ge 0$, залежать від малого параметра $\varepsilon \in (0,1]$ таким чином, що $\beta_s(i) \to 0$ та $\tau \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$.

Призначенням даної роботи є встановлення асимптотики ймовірності розорення $P_{0o}(\tau > n)$, при одночасному прямуванні $\varepsilon \to 0$ та $n \to \infty$.

Розподіл моменту τ пов'язаний з наступними випадковими сумами та їх середніми

$$A_n = \sum_{s<n} \alpha_s(X_s, X_{s+1}), \qquad c_n = E_{0o} A_n = \sum_{s<n} a_s, \tag{9}$$

$$B_n = \sum_{s<n} \beta_s(X_s), \qquad c_n = E_{0o} B_n = \sum_{s<n} b_s, \tag{10}$$

де для фіксованого стану $o \in E$ у момент 0

$$a_s = E_{0o} \alpha_s(X_s, X_{s+1}) = E_{0o} \beta_s(X_s) = b_s, s \ge 0. \tag{11}$$

Розглянемо для ланцюга X з розподілом (1) коефіцієнт перемішування у момент t після старту у момент $s \le t$ зі станів $i,k \in E$

$$\rho_\varepsilon^{(s,t)}(i,k) = \sum_j \left| P_{ij}^{(s,t-s)} - P_{kj}^{(s,t-s)} \right| \Big/ 2 \le 1. \tag{12}$$

Сумарний коефіцієнт перемішування після моменту s до моменту n дорівнює

$$\overline{\rho}_\varepsilon^{(s,n)}(i,k) = \sum_{t=s}^{n-1} \rho_\varepsilon^{(s,t)}(i,k), \qquad i,k \in E,\ s \ge 0. \tag{13}$$

Числовою мірою прорідженості моменту τ є рівномірні межі у (4), (5):

$$\varepsilon_s = \sup_{i,j} \alpha_s(i,j), \qquad \overline{\varepsilon}_s = \sup_i \beta_s(i),$$
$$\varepsilon_{sn} = \max\nolimits_{s<t<n} \varepsilon_t, \qquad \overline{\varepsilon}_{sn} = \max\nolimits_{s<t<n} \overline{\varepsilon}_t. \tag{14}$$

Умова рівномірної прорідженості має одну з двох форм:

$$\sup_{\varepsilon>0, s\ge 0, i,j \in E} \alpha_s(i,j) < 1, \tag{15}$$

або

$$\sup_{\varepsilon>0, s\ge 0, i \in E} \beta_s(i) < 1. \tag{16}$$

Зауважимо, що з урахуванням (6) умова (15) є суттєво сильнішою за (16). Якщо припустити строго протилежне до (15), тобто $\alpha_s(i,j) = 1$ для деяких s, i, j, то за означенням $\tau \le \tau_{D_s}$, на події першого досягнення $D_s = \{(X_s, X_{s+1}) = (i,j)\}$. Це протирічило б необмеженості $\tau \uparrow \infty$ м.н. при $\varepsilon \to 0$. Аналогічно, при виконанні $\beta_s(i) = 1$ можна звести дослідження моменту τ до досягнення у момент s стану $i \in E$.

4. Модель проріджених переходів між станами

Теорема 1. *Припустимо, що виконується умова* (15), *а* $o \in E$ — *фіксований стан. Нехай* $\varepsilon \to 0$ *та* $n \to \infty$ *так, що*

$$\delta_n(\varepsilon) \equiv \sum_{s<n} E_{0o}\alpha_s^2(X_s, X_{s+1}) \to 0, \tag{17}$$

$$\Delta_n(\varepsilon) \equiv \sum_{s<n-1} \varepsilon_{sn} E_{0o} \left|\alpha_s(X_s, X_{s+1}) - a_s\right| \overline{\rho}^{(s+1,n)}(X_{s+1}, o) \to 0. \tag{18}$$

Тоді за припущення, що

$$c_n \equiv \sum_{s<n} a_s = O(1), \qquad \varepsilon \to 0,\ n \to \infty, \tag{19}$$

має місце гранична еквівалентність

$$\exp(c_n) P_{0o}(\tau > n) \to 1, \qquad \varepsilon \to 0,\ n \to \infty. \tag{20}$$

Зауваження 1. Для виконання (17) достатньо рівномірної збіжності $\varepsilon_{0n} \to 0$, оскільки в умовах теореми

$$\delta_n(\varepsilon) \le \sum_{s<n} \varepsilon_s a_s \le \varepsilon_{0n} c_n = O(\varepsilon_{0n}). \tag{21}$$

Зауваження 2. Припущення (19) доцільно розглядати не як умову, а як співвідношення для вставлення зв'язку між параметрами серій $\varepsilon > 0$ та n — тобто обчислення другого через перший з урахуванням гіпотетичної апроксимації $\exp(-c_n)$ ймовірності розорення у (20). Для чисельного знаходження показника у (19) можна використати обернені рекурентні рівняння

$$c_n^{(n)}(i) = 0, \qquad i \in E,$$
$$c_s^{(n)}(i) = \beta_s(i) + \sum_j P_{ij}^{(s)} c_{s+1}^{(n)}(j), \qquad n > s \ge 0,\ c_n = c_0^{(n)}(o), \tag{22}$$

або прямі рекурентні рівняння

$$\pi_0(i) = \delta_{io}, \qquad i \in E, \qquad c_0 = 0, \qquad \pi_{s+1}(i) = \sum_k \pi_s(k) P_{ki}^{(s)}, \tag{23}$$

$$c_{s+1} = c_s + \sum_i \pi_s(i)\beta_s(i), \qquad 0 \le s < n,\ c_n = c_n. \tag{24}$$

Наслідок 1. *Нехай послідовність* $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \to 0$, *задовольняє умову* (19)*:* $c_{n(\varepsilon)} = O(1)$, $\varepsilon \to 0$. *Тоді для деякої підпослідовності* $\varepsilon' \to 0$ *границя*

$$\lim_{\varepsilon' \to 0} P_{0o}(\tau / n(\varepsilon') > x) = \lim_{\varepsilon' \to 0} \exp(-c_{[xn(\varepsilon')]}) > 0 \tag{25}$$

існує для щільної множини $x \in (0,1]$, *що збігається з множиною точок неперервності правої частини* (25).

Означення 1. Неоднорідний ланцюг Маркова X з розподілом (1), перемішуванням (13) та початковим станом $o \in E$ є *сильно перемішуваним*, якщо сумарне перемішування є скінченним:

$$\overline{\rho}_\varepsilon^{(s,n)}(k, o) \le u_\varepsilon^{(s)}(k) < \infty, \qquad k \in E,\ s \ge 1,\ n \ge 1,\ \varepsilon > 0. \tag{26}$$

Означення 2. Неоднорідний ланцюг Маркова X з розподілом (1) та перемішуванням (12) є *рівномірно перемішуваним*, якщо:

$$\overline{\lim}_{s\to\infty} \sup_{\varepsilon>0, i,k\in E} \rho_\varepsilon^{(s,s+1)}(k,i) < 1. \tag{27}$$

Означення 3. Неоднорідний ланцюг Маркова X з розподілом (1) є *сильно V-*перемішуваним, якщо для деяких функцій $V(i) \geq 1$ виконуються нерівності

$$\sum_j \left| P_{ij}^{(s,t-s)} - P_{kj}^{(s,t-s)} \right| V(j) \leq u_\varepsilon^{(s)}(i,k) g_s(t) < \infty, \qquad i,k \in E,\ t \geq s \geq 0, \tag{28}$$

$$\sup_{\varepsilon, s\geq 0} \sum_{t\geq s} g_s(t) < \infty. \tag{29}$$

Теорема 2. *Припустимо, що виконується умова* (15)*, а $o \in E$ — фіксований стан. Нехай $\varepsilon \to 0$ та $n \to \infty$ так, що виконується одна з наступних груп умов.*

(a) *Ланцюг X є сильно перемішуваним* (26) *з обмеженою функцією $u_\varepsilon^{(s)}$, та*

$$\widetilde{\delta}_n(\varepsilon) \equiv \sum_{s<n} a_s(\varepsilon_s + \varepsilon_{sn}) \to 0. \tag{30}$$

(b) *Ланцюг X є сильно перемішуваним* (26) *та*

$$\sup_{\varepsilon, s\geq 0} E_{0o} u_\varepsilon^{(s+1)}(X_{s+1}, o) < \infty, \tag{31}$$

причому

$$\widehat{\delta}_n(\varepsilon) \equiv \sum_{s<n} \varepsilon_s(\varepsilon_s + \varepsilon_{sn}) \to 0. \tag{32}$$

(c) *Ланцюг X є рівномірно перемішуваним* (27) *та $\widetilde{\delta}_n(\varepsilon) \to 0$ у* (30).

(d) *Ланцюг X є сильно V-перемішуваним* (28), (29), *задовольняє умову* (31), *та $\widehat{\delta}_n(\varepsilon) \to 0$ у* (32).

Тоді за припущення обмеженості (19) *має місце асимптотична еквівалентність* (20).

5. Модель проріджених збурень у станах

Теорема 3. *Припустимо, що виконується умова* (16)*, а $o \in E$ — фіксований стан. Нехай $\varepsilon \to 0$ та $n \to \infty$ так, що*

$$\overline{\delta}_n(\varepsilon) \equiv \sum_{s<n} E_{0o} \beta_s^2(X_s) \to 0, \tag{33}$$

$$\overline{\Delta}_n(\varepsilon) \equiv \sum_{s<n-1} \overline{\varepsilon}_{sn} E_{0o} \left| \beta_s(X_s) - b_s \right| \overline{\rho}^{(s+1,n)}(X_{s+1}, o) \to 0. \tag{34}$$

Тоді за припущення обмеженості (19)

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0, n\to\infty}} \exp(c_n) P_{0o}(\tau > n) \leq 1. \tag{35}$$

Якщо ж додатково

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0, n\to\infty}} \left[\left(\sum_{s<n} \overline{\varepsilon}_s + \ln\bigl(\overline{\delta}_n(\varepsilon) + \overline{\Delta}_n(\varepsilon)\bigr) \right)^+ + \sum_{s<n} \overline{\varepsilon}_s^2 \right] < \infty, \tag{36}$$

то виконується твердження Теореми 1.

Зауваження 3. Як вказано вище, умова (15) суттєво сильніша за (16). З іншого боку, умови типу (36) немає у Теоремі 1. Тому Теореми 1 і 3 не є підпорядкованими.

Теорема 4. *Припустимо, що має місце умова* (16), *а* $o \in E$ — *фіксований стан. Нехай* $\varepsilon \to 0$ *та* $n \to \infty$ *так, що виконується одна з наступних груп умов.*

(a) *Ланцюг* X *є сильно перемішуваним* (26) *з обмеженою функцією* $u_\varepsilon^{(s)}$, *та*

$$\tilde{\overline{\delta}}_n(\varepsilon) \equiv \sum_{s<n} b_s(\overline{\varepsilon}_s + \overline{\varepsilon}_{sn}) \to 0. \tag{37}$$

(b) *Ланцюг* X *є сильно перемішуваним* (26) *та*

$$\sup_{\varepsilon, s \geq 0} E_{0o} u_\varepsilon^{(s+1)}(X_{s+1}, o) < \infty, \tag{38}$$

причому

$$\hat{\overline{\delta}}_n(\varepsilon) \equiv \sum_{s<n} \overline{\varepsilon}_s(\overline{\varepsilon}_s + \overline{\varepsilon}_{sn}) \to 0. \tag{39}$$

(c) *Ланцюг* X *є рівномірно перемішуваним* (27) *та* $\tilde{\overline{\delta}}_n(\varepsilon) \to 0$ *у* (37).

(d) *Ланцюг* X *є сильно* V*-перемішуваним* (28), (29), *задовольняє умову* (38), *та* $\hat{\overline{\delta}}_n(\varepsilon) \to 0$ *у* (39).

Тоді за припущення обмеженості (19) *виконується нерівність* (35). *Якщо додатково має місце* (36), *то виконується асимптотична еквівалентність* (20).

6. Приклади

1. Нехай $E = \{0, 1\}$, перехідні ймовірності та матриця збурення - однорідні за часом:

$$P_s = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Q_s = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 - \varepsilon \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad R_s = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Функції ризику переходів та збурення станів дорівнюють

$$\alpha_s = \begin{pmatrix} 0 & 2\varepsilon \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \beta_s = (\varepsilon, 0).$$

Умова (15) виконується вже при $\varepsilon < 1/3$. Ланцюг (X_s) рівномірно ергодичний з інваріантною мірою $\pi = (2/3, 1/3)$, тому

$$a_s = E_{0o}\beta_s(X_s) = E_{0o}\varepsilon 1_{X_s=0} \sim \varepsilon\pi_0, \qquad c_n \sim \varepsilon n 2/3.$$

Отже, в Теоремі 2 (c) умова (19) еквівалентна обмеженості $\varepsilon n = O(1)$, та оскільки $\tilde{\delta}_n(\varepsilon) = 4\varepsilon c_n \to 0$, має місце апроксимація

$$\exp(\varepsilon n 2/3) P_{0o}(\tau > n) \to 1, \qquad \varepsilon \to 0, \qquad n \to \infty.$$

2. Нехай $E = \{0, 1\}$, перехідні ймовірності та матриця збурення - однорідні за часом:

$$P_s = \begin{pmatrix} 1-\varepsilon & \varepsilon \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Q_s = \begin{pmatrix} 1-\varepsilon & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad R_s = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Функції ризику переходів та збурення станів дорівнюють

$$\alpha_s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \beta_s = (\varepsilon, 0).$$

Умова (15) не виконується, однак при $\varepsilon < 1/2$ має місце (16). Ланцюг (X_s) рівномірно ергодичний з інваріантною мірою $\pi \sim (1, 0)$, тому

$$b_s = E_{0o}\beta_s(X_s) = E_{0o}\varepsilon 1_{X_s=0} \sim \varepsilon, \qquad c_n \sim \varepsilon n.$$

Отже, в Теоремі 4 (c) умова (19) еквівалентна обмеженості $\varepsilon n = O(1)$, та оскільки $\tilde{\overline{\delta}}_n(\varepsilon) = 2\varepsilon c_n \to 0$, має місце апроксимація

$$\exp(\varepsilon n) P_{0o}(\tau > n) \to 1, \qquad \varepsilon \to 0,\ n \to \infty.$$

3. Нехай $|E| < \infty$. Припустимо, що $P_{0i}(X_s = j) \to \pi_j$ при $s \to \infty$ для всіх $i, j \in E$, де (π_j) — деякий імовірнісний розподіл. Нехай також $\beta_s(i) = \varepsilon g(\varepsilon s, i)$ для всіх $s \geq 0$, $i \in E$ та деякої функції $g \in C(\mathbb{R}_+ \times E)$. Тоді при $\varepsilon \to 0$ та для всіх $x \in (0, 1]$, $o \in E$

$$P_{0o}(\varepsilon\tau > x) \to \exp(-G(x)),$$

де $G(x) = \sum_j \pi_j \int_0^x g(y, j)\, dy$.

7. Доведення

Нижче буде використане позначення для невід'ємної зростаючої функції

$$\varphi(y) = -\ln(1 - y)\colon [0, 1) \to [0, \infty). \tag{40}$$

Функція φ задовольняє нерівність $\varphi(y) \geq y$, причому відносний залишок

$$(\varphi(y) - y)/y^2$$

не спадає за $y \in [0, 1)$.

Нерівність (3) випливає з $(\mathfrak{F}_t)$-марковської властивості ланцюга X, оскільки подія $\{\tau > s\} \in \mathfrak{F}_s$: $Q_{ij}^{(s)} \leq \mathsf{P}(X_{s+1} = j \mid \tau > s, X_s = i) = P_{ij}^{(s)}$.

Марковська властивість процесу $\overline{X}$ виводиться з рекурентних рівнянь, за якими він будується: $\overline{X}_{s+1} = g_s(\overline{X}_s, \xi_{s+1})$ з невипадковими вимірними функціями g_s, та незалежними величинами (ξ_s). Зв'язок з матрицями (Q_s) доводиться за побудовою ланцюга $\overline{X}$:

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(X_{s+1} = j, \tau > s + 1 \mid \tau > s, X_s = i) &= \mathsf{P}(X_{s+1} = j, d_{s+1} = 0 \mid X_s = i, d_s = 0) \\
&= P_{ij}^{(s)}\, \mathsf{P}(d_{s+1} = 0 \mid X_s = i, d_s = 0) \\
&= P_{ij}^{(s)} \left(Q_{ij}^{(s)}/P_{ij}^{(s)}\right) = Q_{ij}^{(s)}.
\end{aligned}$$

У випадку, коли $P_{ij}^{(s)} = 0$ маємо $Q_{ij}^{(s)} = 0$, тобто остання рівність зберігається.

Доведення (21) є наслідком означень (14) та (11):

$$E_{0o}\alpha_s^2(X_s, X_{s+1}) \leq E_{0o}\varepsilon_s\alpha_s(X_s, X_{s+1}) = \varepsilon_s a_s. \tag{41}$$

Доведення Леми 1. Рівність (7) є наслідком (2), рівності

$$\{\tau > t, X_1 = i_1, \ldots, X_t = i_t\} = \bigcap_{s=1}^{t} \{\tau > s, X_s = i_s\},$$

та марковської властивості ланцюга X.

Для доведення (8) позначимо при $0 \leq s \leq t$

$$A_s = \{X_1 = i_1, d_1 = 0, \ldots, X_s = i_s, d_s = 0\}, \qquad B_{s+1} = \{X_{s+1} = i_{s+1}, \ldots, X_t = i_t\}.$$

Ліва частина (8) дорівнює

$$\begin{aligned}
&P_{0i}[A_s \mid X_1 = i_1, \ldots, X_t = i_t] \\
&\quad = P_{0i}[A_s, X_1 = i_1, \ldots, X_t = i_t]/P_{0i}[X_1 = i_1, \ldots, X_t = i_t] \\
&\quad = P_{0i}[A_s \cap B_{s+1}]/P_{0i}[B_0] \\
&\quad = P_{0i}[A_s]P_{0i}[B_{s+1} \mid A_s]/P_{0i}[B_0] \\
&\quad = \left(\prod_{r=0}^{s-1} Q_{i_r, i_{r+1}}^{(r)}\right) \left(\prod_{r=s}^{t-1} P_{i_r, i_{r+1}}^{(r)}\right) \Big/ \left(\prod_{r=0}^{t-1} P_{i_r, i_{r+1}}^{(r)}\right) \\
&\quad = \prod_{r=0}^{s-1} Q_{i_r, i_{r+1}}^{(r)}/P_{i_r, i_{r+1}}^{(r)} = \prod_{r=0}^{s-1} \left(1 - R_{i_r, i_{r+1}}^{(r)}/P_{i_r, i_{r+1}}^{(r)}\right) = \prod_{r=0}^{s-1} (1 - \alpha_r(i_r, i_{r+1})). \quad \square
\end{aligned}$$

Рівність у (11) є очевидним наслідком рівностей

$$\mathbb{E}(\alpha_s(X_s, X_{s+1}) \mid \mathfrak{F}_s) = \mathbb{E}(\alpha_s(X_s, X_{s+1}) \mid X_s) = \beta_s(X_s), \tag{42}$$

де використана марковська властивість та внаслідок (2),(6) такі рівності

$$\mathbb{E}(\alpha_s(X_s, X_{s+1}) \mid X_s = i) = \sum_j P_{ij}^{(s)} \alpha_s(i,j) = \sum_j R_{ij}^{(s)} = \beta_s(i).$$

Лема 2. (a) *Мають місце нерівності*

$$0 \le \alpha_s(i,j) \le \varepsilon_s, \qquad 0 \le \beta_s(i) \le \overline{\varepsilon}_s, \qquad |\alpha_s(i,j) - a_s| \le \varepsilon_s, \qquad |\beta_s(i) - b_s| \le \overline{\varepsilon}_s,$$

$$D_{0o}\alpha_s(X_s, X_{s+1}) = E_{0o}(\alpha_s(X_s, X_{s+1}) - a_s)^2 \le 2\varepsilon_s a_s,$$

$$D_{0o}\beta_s(X_s) = E_{0o}(\beta_s(X_s) - b_s)^2 \le 2\overline{\varepsilon}_s b_s.$$

(b) *За умов* $\sup \varepsilon_s \le K < 1$, *та* $\sup \overline{\varepsilon}_s \le K < 1$ *відповідно виконуються нерівності*

$$0 \le \varphi(\alpha_s(i,j)) - \alpha_s(i,j) \le \varphi_K \alpha_s^2(i,j),$$

$$0 \le \varphi(\beta_s(i)) - \beta_s(i) \le \varphi_K \beta_s^2(i),$$

де $\varphi_K = (\varphi(K) - K)/K^2 < \infty$.

Доведення леми 2. Нерівності (a) виводяться з (14) та (11) так само, як і (41).

Нерівності у (b) випливають з відповідних властивостей функції (40). □

Лема 3. *Мають місце такі нерівності*

$$E_{0o}(A_n - c_n)^2 \le 2\delta_n(\varepsilon) + 2\Delta_n(\varepsilon),$$

$$E_{0o}(B_n - c_n)^2 \le 2\overline{\delta}_n(\varepsilon) + 2\overline{\Delta}_n(\varepsilon).$$

Доведення леми 3. Обчислимо, виходячи з (9) та (11):

$$E_{0o}(A_n - c_n)^2 = \sum_{s<n} D_{0o}\alpha_s(X_s, X_{s+1}) + 2 \sum_{s<t<n} \gamma(s,t), \tag{43}$$

де за Лемою 2

$$D_{0o}\alpha_s(X_s, X_{s+1}) \le 2\varepsilon_s a_s, \tag{44}$$

та при $s < t$

$$\begin{aligned} \gamma(s,t) &\equiv \mathrm{Cov}_{0o}(\alpha_s(X_s, X_{s+1}), \alpha_t(X_t, X_{t+1})) \\ &= E_{0o}(\alpha_s(X_s, X_{s+1}) - a_s)(\alpha_t(X_t, X_{t+1}) - a_{st}). \end{aligned} \tag{45}$$

Тут права частина не залежить від числа $a_{st} \in \mathbb{R}$, оскільки перший множник у (45) є центрованим по відношенню до середнього $E_{0o}()$.

Оберемо

$$a_{st} = \sum_{k,l} P_{ok}^{(s+1,t-s-1)} P_{kl}^{(t)} \alpha_t(k,l) = E_{s+1,o}\alpha_t(X_t, X_{t+1}),$$

та отримаємо з (45) при $0 \le s < t < n$

$$\begin{aligned} \gamma(s,t) &= \sum_{i,j} P_{oi}^{(0,s)} P_{ij}^{(s)} (\alpha_s(i,j) - a_s) \left[\sum_{k,l} P_{jk}^{(s+1,t-s-1)} P_{kl}^{(t)} \alpha_t(k,l) - a_{st} \right] \\ &= \sum_{i,j} P_{oi}^{(0,s)} P_{ij}^{(s)} (\alpha_s(i,j) - a_s) \\ &\quad \times \sum_{k,l} \left[P_{jk}^{(s+1,t-s-1)} - P_{ok}^{(s+1,t-s-1)} \right] P_{kl}^{(t)} \alpha_t(k,l). \end{aligned} \tag{46}$$

Звідси за Лемою 2 та означеннями (12), (13) і (14)

$$|\gamma(s,t)| \le \sum_{i,j} P_{oi}^{(0,s)} P_{ij}^{(s)} |\alpha_s(i,j) - a_s| \rho_\varepsilon^{(s+1,t)}(j,o)\varepsilon_{sn},$$

$$\sum_{t=s+1}^{n-1} |\gamma(s,t)| \le \varepsilon_{sn} E_{0o} |\alpha_s(X_s, X_{s+1}) - a_s| \overline{\rho}_\varepsilon^{(s+1,n)}(X_{s+1}, o).$$

Підстановкою останньої нерівності та (44) у (43) отримуємо першу нерівність Леми 3.

Друга нерівність леми виводиться аналогічно з використанням замість функції $\alpha_s(i,j)$ функції $\beta_s(i)$, а замість величин ε_s, ε_{sn}, a_s - відповідно $\overline{\varepsilon}_s$, $\overline{\varepsilon}_s$, b_s. □

Лема 4. *Позначимо* $\widehat{\rho}_\varepsilon^{(s,t)} \equiv \sup_{i,k} \rho_\varepsilon^{(s,t)}(i,k)$ *при* $s \le t$. *Тоді*

$$\rho_\varepsilon^{(s,u)}(i,k) \le \rho_\varepsilon^{(s,t)}(i,k)\ \widehat{\rho}_\varepsilon^{(t,u)}, s \le t \le u.$$

Доведення Леми 4. Розглянемо банахів простір [3, 1996]

$$l_1^0(E) = \{\mu = (\mu_i, i \in E)\colon\ \|\mu\| \equiv 1/2 \sum_i |\mu_i| < \infty, \sum_i \mu_i = 0\}.$$

За означенням (12) $\rho_\varepsilon^{(s,t)}(i,k) = \left\|(\delta_i - \delta_k)P^{(s,t-s)}\right\|$, де δ_i - індикаторна послідовність для точки i. Тому з опуклості $l_1^0(E)$ та означення $\widehat{\rho}$ виводимо, що

$$\widehat{\rho}_\varepsilon^{(s,t)} = \sup_{\mu \in l_1^0(E), \|\mu\|=1} \left\|\mu P^{(s,t-s)}\right\| = \left\|P^{(s,t-s)}\right\|,$$

де у правій частині - відповідна операторна норма. Отже,

$$\begin{aligned}\rho_\varepsilon^{(s,u)}(i,k) &= \left\|(\delta_i - \delta_k)P^{(s,u-s)}\right\| \\ &= \left\|(\delta_i - \delta_k)P^{(s,t-s)}P^{(t,u-t)}\right\| \le \left\|(\delta_i - \delta_k)P^{(s,t-s)}\right\| \left\|P^{(t,u-t)}\right\| \\ &= \rho_\varepsilon^{(s,t)}(i,k)\widehat{\rho}_\varepsilon^{(t,u)}, \quad \square\end{aligned}$$

Доведення Теореми 1. Визначимо випадкові суми

$$S_n = \sum_{s<n} \varphi(\alpha_s(X_s, X_{s+1})). \tag{47}$$

З Леми 1 та означення (40) отримуємо при $X_0 = i$

$$P_{0i}(\tau > n \mid X_1, \ldots, X_n) = \prod_{s=0}^{n-1}(1 - \alpha_s(X_s, X_{s+1})) = \exp(-S_n). \tag{48}$$

Звідси, зокрема

$$P_{0i}(\tau > n) = E_{0i}\exp(-S_n). \tag{49}$$

За Лемою 2 та означенням (9)

$$0 \le S_n - A_n = \sum_{s<n}[\varphi(\alpha_s(X_s, X_{s+1})) - \alpha_s(X_s, X_{s+1})] \le \sum_{s<n} \alpha_s^2(X_s, X_{s+1})\varphi_K,$$

де $K = \sup \alpha_s(i,j) < 1$ за умовою (15), тому $\varphi_K < \infty$.

Тому за цією ж Лемою за умови (17)

$$E_{0o}|S_n - A_n| \le \varphi_K \sum_{s<n} E_{0o}\alpha_s^2(X_s, X_{s+1}) = \varphi_K \delta_n(\varepsilon) \to 0.$$

Отже, $S_n - A_n \to^P 0$ при $\varepsilon \to 0$, $n \to \infty$.

Далі, за Лемою 3 з (17), (18) виводимо, що $A_n - c_n \overset{\mathsf{P}}{\to} 0$.

Тому $S_n - c_n = S_n - A_n + A_n - c_n \overset{\mathsf{P}}{\to} 0$ при $\varepsilon \to 0$, $n \to \infty$.

Застосуємо (49) і теорему Лебега про мажоровану збіжність з урахуванням невід'ємності S_n та обмеженості c_n:

$$\lim_{\varepsilon\to0,n\to\infty}\exp(c_n)P_{0o}(\tau>n)=\lim_{\varepsilon\to0,n\to\infty}E_{0o}\exp(-S_n+c_n)$$
$$=E_{0o}\lim_{\varepsilon\to0,n\to\infty}\exp(-S_n+c_n)=\exp(0)=1,$$

оскільки $\exp(-S_n+c_n)\le\exp(c_n)=O(1)$. □

Доведення Зауваження 1 випливає з тверджень Леми 2.

Доведення Зауваження 2. Системи рівнянь (22) та (24) є очевидними наслідками марковської властивості ланцюга X для сум

$$c_s^{(n)}(i)=\sum_{t=s}^{n-1}E_{so}\beta_t(X_t),\qquad c_s=\sum_{t=0}^{s-1}E_{0o}\beta_t(X_t).\quad\square$$

Доведення Наслідку 1. Зауважимо, що праві частини умов (17), (18) та (19) є монотонно неспадними за параметром n. Якщо ці умови виконуються для послідовності $n=n(\varepsilon)$, $\varepsilon\to0$, то одночасно ці умови виконуються для послідовності з цілих частин $n=n(\varepsilon,x)\equiv[xn(\varepsilon)]$, при кожному $x\in[0,1]$, а тому має місце відповідне твердження Теореми.

Розглянемо суми

$$c_\varepsilon(x)\equiv\sum_{s<n(\varepsilon,x)}a_s.$$

Вони не спадають за x та обмежені. Тому за теоремою Хеллі існує підпослідовність $\{\varepsilon'\}\subset\{\varepsilon\}$ та неспадна обмежена функція $c(x)$, $x\in[0,1]$, така, що $c_{\varepsilon'}(x)\to c(x)$ при $\varepsilon'\to0$ для всіх точок неперервності x функції $c(x)$.

Будемо вважати, що $\varepsilon'=\varepsilon$. Зі збіжності $\exp(c_{n(\varepsilon,x)})P_{0o}(\tau>n(\varepsilon,x))\to1$, $\varepsilon\to0$, отримуємо для вказаної вище множини x існування границі

$$\lim_{\varepsilon\to0}P_{0o}(\tau/n(\varepsilon)>x)=\lim_{\varepsilon\to0}P_{0o}(\tau/n(\varepsilon)>n(\varepsilon,x)/n(\varepsilon))=\lim_{\varepsilon\to0}\exp(-c_\varepsilon(x))=\exp(-c(x)),$$

оскільки $n(\varepsilon,x)/n(\varepsilon)\to x$, $\varepsilon\to0$. □

Доведення Теореми 2. Доведемо теорему за пунктами шляхом перевірки умов Теореми 1. Умова (19) є припущенням.

(a) (17) виводиться з (21):

$$\delta_n(\varepsilon)\le\sum_{s<n-1}\varepsilon_s a_s\le\widetilde{\delta}_n(\varepsilon),$$

умова (18) випливає за Лемою 2 з оцінки

$$\Delta_n(\varepsilon)\le\sum_{s<n-1}\varepsilon_{sn}(E_{0o}\alpha_s(X_s,X_{s+1})+a_s)C=C\sum_{s<n-1}\varepsilon_{sn}2a_s\le2C\widetilde{\delta}_n(\varepsilon),\tag{50}$$

де $C=\sup u_\varepsilon^{(s)}<\infty$ за умовою.

(b) (17) випливає з (21) та Леми 2:

$$\delta_n(\varepsilon)\le\sum_{s<n-1}\varepsilon_s a_s\le\sum_{s<n-1}\varepsilon_s^2\le\widehat{\delta}_n(\varepsilon),\tag{51}$$

а умова (18) - з Леми 2 та оцінки

$$\Delta_n(\varepsilon)\le\sum_{s<n-1}\varepsilon_{sn}E_{0o}\varepsilon_s\overline{\rho}^{(s+1,n)}(X_{s+1},o)\le\sum_{s<n-1}\varepsilon_{sn}\varepsilon_sE_{0o}u_\varepsilon^{(s+1)}(X_{s+1})=O(\widehat{\delta}_n(\varepsilon)).$$

(c) Доведення аналогічне до (a), оскільки за Лемою 4 функція

$$\overline{\rho}_\varepsilon^{(s,n)}(i,o) \le \sum_{t\ge s} \rho_\varepsilon^{(s,u)}(i,o) \prod_{r=u}^{t-1} \widehat{\rho}_\varepsilon^{(r,r+1)} \le C_u/(1-\overline{\rho})$$

обмежена, де стала $\overline{\rho} < 1$ є довільною, що перевищує праву частину (27), а момент $u > s$ обирається в залежності від $\overline{\rho}$ з умови $\widehat{\rho}_\varepsilon^{(r,r+1)} \le \overline{\rho}$ при $r \ge u$.

(d) Доведення аналогічне до (b), оскільки за (28), (29) та (12),(13)

$$\overline{\rho}_\varepsilon^{(s,n)}(i,o) \le \sum_{t\ge s}\sum_j \left| P_{ij}^{(s,t-s)} - P_{oj}^{(s,t-s)} \right| V(j) \le u_\varepsilon^{(s)}(i,o) \sum_{t\ge s} g_s(t) \le C_g u_\varepsilon^{(s)}(i,o),$$

звідки виводимо обмеженість

$$E_{0o}\overline{\rho}^{(s+1,n)}(X_{s+1},o) \le C_g E_{0o} u_\varepsilon^{(s+1)}(X_{s+1},o) = O(1). \quad \square$$

Доведення Теореми 3. Визначимо випадкові суми

$$T_n = \sum_{s<n} \varphi(\beta_s(X_s)).$$

За Лемою 2 та означеннями (10), (14)

$$0 \le T_n - B_n = \sum_{s<n} [\varphi(\beta_s(X_s)) - \beta_s(X_s)] \le \varphi_K \sum_{s<n} \beta_s^2(X_s) \le \varphi_K \sum_{s<n} \overline{\varepsilon}_s^2,$$
$$T_n \le \sum_{s<n} \beta_s(X_s) + \varphi_K \sum_{s<n} \beta_s^2(X_s) \le \sum_{s<n} \overline{\varepsilon}_s + \varphi_K \sum_{s<n} \overline{\varepsilon}_s^2, \tag{52}$$

де $K = \sup \beta_s(i) < 1$ за умовою (16), тому $\varphi_K < \infty$.

Звідси $E_{0o}\,|T_n - B_n| \le \varphi_K \overline{\delta}_n(\varepsilon) \to 0$, $\varepsilon \to 0, n \to \infty$, за (33).

Далі, за Лемою 3 з (33),(34) виводимо, що $E_{0o}\,|B_n - c_n| \to 0$.

Тому за мірою P_{0o}

$$T_n - c_n = T_n - B_n + B_n - c_n \xrightarrow{L_1} 0, \qquad T_n - c_n \xrightarrow{\mathsf{P}} 0, \qquad \varepsilon \to 0,\ n \to \infty.$$

Внаслідок (47) та (42), (40)

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(\exp(T_n - S_n) \mid X_1, \dots, X_{n-1}) \\
&\quad = \exp(T_n - S_{n-1})\mathbb{E}(\exp(-\varphi(\alpha_{n-1}(X_{n-1}, X_n))) \mid X_1, \dots, X_{n-1}) \\
&\quad = \exp(T_n - S_{n-1})\mathbb{E}((1 - \alpha_{n-1}(X_{n-1}, X_n) \mid X_{n-1}) \\
&\quad = \exp(T_n - S_{n-1})(1 - \beta_{n-1}(X_{n-1})) = \exp(T_{n-1} - S_{n-1}).
\end{aligned}$$

Отже, послідовність $\exp(T_n - S_n)$ є мартингалом відносно потоку, що породжений послідовністю (X_n), інтегровність випливає з невід'ємності S_n та обмеженості $T_n \le n\varphi(K)$ внаслідок (16). Зокрема, за теоремою Дуба

$$\mathbb{E}\exp(T_n - S_n) = \mathbb{E}\exp(T_0 - S_0) = 1. \tag{53}$$

З рівностей (49), (53) отримуємо

$$\begin{aligned}
\exp(c_n)P_{0i}(\tau > n) - 1 &= E_{0i}[\exp(c_n - S_n) - \exp(T_n - S_n)] \\
&= E_{0i}\exp(c_n - S_n)[1 - \exp(T_n - c_n)].
\end{aligned} \tag{54}$$

Перший множник у правій частині (54) обмежений внаслідок (19) та невід'ємності S_n, а другий — обмежений зверху числом 1. Тому за лемою Фату при $\varepsilon \to 0, n \to \infty$

$$\begin{aligned}
\overline{\lim}[\exp(c_n)P_{0i}(\tau > n) - 1] &= \overline{\lim}\, E_{0i}\exp(c_n - S_n)[1 - \exp(T_n - c_n)] \\
&\le E_{0i}\,\overline{\lim}\exp(c_n - S_n)[1 - \exp(T_n - c_n)] = 0,
\end{aligned}$$

що доводить (35).

Для доведення другого твердження Теореми оцінимо з (52)

$$E_{0o}(T_n - B_n)^2 \le E_{0o}\left(\sum_{s<n} \beta_s^2(X_s)\varphi_K\right)^2 \le \varphi_K^2 E_{0o}\left(\sum_{s<n} \beta_s^2(X_s) \sum_{s<n} \overline{\varepsilon}_s^2\right)$$
$$= \varphi_K^2 \overline{\delta}_n(\varepsilon) \sum_{s<n} \overline{\varepsilon}_s^2 = O(\overline{\delta}_n(\varepsilon)),$$

оскільки останній множник при $\overline{\delta}_n(\varepsilon)$ обмежений за (36). Далі, за Лемою 3

$$E_{0o}(T_n - c_n)^2 \le 2E_{0o}(T_n - B_n)^2 + 2E_{0o}(B_n - c_n)^2 = O(\overline{\delta}_n(\varepsilon) + \overline{\Delta}_n(\varepsilon)). \tag{55}$$

Нехай $m > 0$ довільне. За доведеним вище та теоремою Лебега про мажоровану збіжність при $\varepsilon \to 0$, $n \to \infty$

$$\overline{\lim} \left|\exp(T_n - c_n) - 1\right| 1_{|T_n - c_n| \le m} = 0.$$

Тому згідно з (54), (52), (55) та з обмеженості $\exp\{\sup c_n\} = C < \infty$:

$$\overline{\lim} \left|\exp(c_n) P_{0i}(\tau > n) - 1\right| \le 0 + C\, \overline{\lim}\, E_{0o} \left|\exp(T_n - c_n) - 1\right| 1_{|T_n - c_n| > m}$$
$$\le C\, \overline{\lim}\, E_{0o}(\exp(T_n - c_n) + 1)(T_n - c_n)^2 m^{-2}$$
$$\le Cm^{-2}\, \overline{\lim}\, E_{0o}\left[\exp\left(\sum_{s<n} \overline{\varepsilon}_s + \varphi_K \sum_{s<n} \overline{\varepsilon}_s^2\right) + 1\right](T_n - c_n)^2$$
$$= Cm^{-2}\, \overline{\lim} \left[\exp\left(\sum_{s<n} \overline{\varepsilon}_s + \varphi_K \sum_{s<n} \overline{\varepsilon}_s^2\right) + 1\right] O(\overline{\delta}_n(\varepsilon) + \overline{\Delta}_n(\varepsilon)) \le m^{-2} D$$

при $\varepsilon \to 0$, $n \to \infty$ для деякої сталої D за умовою (36) Теореми. Внаслідок довільності m у правій частині останньої нерівності її ліва частина дорівнює нулю. □

Доведення Теореми 4 проводиться аналогічно до Теореми 2.

Література

1. W. Doeblin, *Expose de la theorie des chaines simples constantes de Markov a un nomber fini d'estats*, Mathematique de l'Union Interbalkanique **2** (1938), 77–105.
2. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Теория случайных процессов*, "Наука", Москва, 1973.
3. N. V. Kartashov, *Strong Stable Markov Chains*, VSP, Utrecht, The Netherlands, 1996.
4. В. М. Золотарев, *Современная теория суммирования независимых случайных величин*, "Наука", Москва, 1986.
5. S. P. Mayn and R. L. Tweedie, *Markov Chains and Stochastic Stability*, Springer-Verlag, 1993.
6. М. В. Карташов, В. В. Голомозий, *Максимальне склеювання та стійкість дискретних ланцюгів Маркова, I*, Теорія ймовір. та матем. статист. **86** (2012), 81–91.

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Національний університет ім. Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, 01033, Київ, Україна

Адреса електронної пошти: nkartashov@skif.com.ua

Надійшла 04/10/2012