Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 88, 2013, стор. 46–59

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 88, 2013, pp. 46–59

ПРО РОЗПОДІЛ ФУНКЦІОНАЛІВ СУБОРДИНАТОРА

УДК 519.21

Д. В. ГУСАК

Анотація. Для немонотонних процесів з незалежними приростами (н.п.) розподіли граничних функціоналів досліджувались у роботах багатьох авторів (див., наприклад, [1–6]). Якщо обмежитись процесами з обмеженою варіацією зі знесенням $a \geq 0$, то з наших результатів, одержаних в [4–5], легко виводяться співвідношення для розподілу функціоналів субординатора (процесу з незалежними і додатними приростами, див. [3, р. III]).

Abstract. Distributions of boundary functionals for processes with stationary independent increments are studied by many authors (see, e.g., [1–6]). If we restrict ourselves to the processes with a bounded variation and with the drift $a \geq 0$ then from our results in [4–5] it is easy to deduce the relations defining distributions of functionals for a subordinator (process with positive and independent increments, see [3, Ch. III]).

Аннотация. Для немонотонных процессов с независимыми приращениями распределения граничных функционалов исследовались в работах многих авторов (см., например, [1–6]). Если ограничиться процессами с ограниченной вариацией и $a \geq 0$, то из результатов, полученных в [4–5], легко выводятся соотношения для распределения функционалов субординатора (процесса с независимыми и положительными приращениями, см. [3, р. III]).

Нехай $\xi(t)$ — однорідний процес з н.п., з обмеженою варіацією і кумулянтою

$$\begin{gathered}\psi(\alpha) := \ln \mathsf{E}\, e^{i\alpha\xi(1)} = i\alpha a + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i\alpha x} - 1)\,\Pi(dx)\Big|_{\alpha = iu} = k(u),\\ \int_{|x|\leq 1} |x|\,\Pi(dx) < \infty, \qquad -\infty < a < \infty.\end{gathered} \tag{1}$$

Якщо знесення $a \geq 0$, $\Pi(x) = \lambda_1 e^{bx}$, $x < 0$, $b > 0$, $\lambda_1 = \int_{-\infty}^{0} \Pi(dx) < \infty$, тоді $\xi(t)$ назвемо майже напівнеперервним знизу процесом,

$$\psi(\alpha) = i\alpha a + \lambda_1 \left(\frac{b}{b + i\alpha} - 1\right) + \int_0^{\infty} (e^{i\alpha x} - 1)\,\Pi(dx). \tag{2}$$

(Неперервним знизу процесом називається немонотонний процес $\xi(t)$, для якого $\Pi(A) = 0$, якщо $A \in (-\infty, 0)$).

За означенням в [3] (див. р. III) процес $\xi(t)$ з додатними і незалежними приростами називається субординатором. Його характеристична функція (х.ф.) як і генератриса визначаються кумулянтою

$$\psi(\alpha) = i\alpha a + \int_0^{\infty} (e^{i\alpha x} - 1)\,\Pi(dx), \qquad \int_0^1 x\,\Pi(dx) < \infty, \qquad a > 0. \tag{3}$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60G50; Secondary 60K10.

Ключові слова і фрази. Processes with stationary independent increments, subordinator, cumulant and potential of processes and subordinator.

Введемо позначення функціоналів для $\xi(t)$ і деяких розподілів

$$\xi^{\pm}(t)=\sup_{0\le t'\le t}(\inf)\,\xi(t'),\qquad \xi^{\pm}=\sup_{0\le t<\infty}(\inf)\,\xi(t);$$
$$\tau^{\pm}(x)=\inf\{t>0\colon \xi(t)\gtrless x\},\qquad \pm x\ge 0;$$
$$\gamma^{+}(x)=\xi(\tau^{+}(x))-x;\qquad \gamma_{+}(x)=x-\xi(\tau^{+}(x)-0),\qquad x>0;$$
$$\gamma_x^{+}=\xi(\tau^{+}(x))-\xi(\tau^{+}(x)-0)=\gamma^{+}(x)+\gamma_{+}(x);$$
$$\theta_s\colon \mathsf{P}\{\theta_s>t\}=e^{-st},\qquad s,t>0;$$
$$P(s,x)=\mathsf{P}\{\xi(\theta_s)<x\},\quad x\in R^1;\qquad \overline{P}(s,x)=1-P(s,x),\quad x\ge 0;$$
$$P_{\pm}(s,x)=\mathsf{P}\{\xi^{\pm}(\theta_s)<x\};\qquad \pm x\ge 0;\qquad \overline{P}_{+}(s,x)=1-P_{+}(s,x),\quad x\ge 0.$$

Згідно з наслідком 1 в [4] (або наслідком 2.2 в [5])має місце

Лема 1. *Для процесу $\xi(t)$ з кумулянтою* (1) *справедливе співвідношенням*

$$\mathsf{P}\{\gamma^{+}(x)=0,\qquad \xi^{+}(\theta_s)>x\}=C_*(s)\frac{\partial}{\partial x}P_{+}(s,x),\qquad x>0; \tag{4}$$
$$C_*(s)=[a]^{+}s^{-1}p_{-}(s),\qquad p_{-}(s)=\mathsf{P}\{\xi^{-}(\theta_s)=0\}. \tag{5}$$

Якщо $m=\mathsf{E}\,\xi(1)<0$, тоді $\lim_{s\to 0}\overline{P}_{+}(s,x)=\mathsf{P}\{\xi^{+}>x\}<1$. Тому згідно з (4) *при $m<0$ і $s\to 0$*

$$\begin{aligned}\lim_{s\to 0}\mathsf{P}\{\gamma^{+}(x)=0,\xi^{+}(\theta_s)>x\}&=\mathsf{P}\{\gamma^{+}(x)=0,\xi^{+}>x\}\\&=\mathsf{P}\{\gamma^{+}(x)=0,\tau^{+}(x)<\infty\}=[a]^{+}p'_{-}(0)\frac{\partial}{\partial x}\,\mathsf{P}\{\xi^{+}<x\}.\end{aligned} \tag{6}$$

При $m>0$ розподіл ξ^{+} вироджений ($\mathsf{P}\{\xi^{+}=+\infty\}=1$*), ξ^{-} має невироджений розподіл і $p_{-}=\mathsf{P}\{\xi^{-}=0\}>0$. Тому при $s\to 0$ із* (4) *випливає, що*

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\{\gamma^{+}(x)=0\}&=[a]^{+}p_{-}\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^\infty \mathsf{P}\{\xi^{+}(t)>x\}\,dt\right)\\&=[a]^{+}p_{-}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty \mathsf{P}\{\tau^{+}(x)>t\}\,dt=[a]^{+}p_{-}(\mathsf{E}\,\tau^{+}(x))'.\end{aligned} \tag{7}$$

Нагадаємо, що схема доведення (4), подібна доведенню аналогічного твердження для процесів $\xi(t)$ з невиродженою броунівською компонентою $\xi_0(t)=\sigma w(t)$, $\sigma>0$ (див. теорему 2.5 та наслідок 2.2 в [5]). Там для $\xi_0(t)$ вибиралось наближення $\xi_n^0(t)$, вплив якого при $n\to\infty$ виражається лише на значенні атомарної ймовірності $\mathsf{P}\{\gamma^{+}(x)=0\}$.

Аналогічно, якщо $\xi(t)=\xi_1(t)+at$ ($\xi_1(t)$ — процес з обмеженою варіацією без знесення), то для at, $a>0$, вибирається наближення

$$\xi_n^0(t)=\sum_{k\le\nu_n^0(t)}\xi_{k,n}^0,\qquad \mathsf{P}\{\xi_{k,n}^0>0\}=e^{-nx},\qquad x>0,$$
$$\mathsf{P}\{\zeta_{k,n}^0>t\}=e^{-\lambda_n^0},\qquad \Pi_n^0(x)=ane^{-nx},\qquad x>0,$$

$\nu_n^0(t)$ — пуассонівський процес з інтенсивністю $\lambda_n^0=an$.

При заміні at на $\xi_n^0(t)$ у рівнянні для генератриси $\gamma_{(n)}^{+}(x)$ ($\gamma_{(n)}^{+}(x)$ — перестрибок процесу $\xi_n(t)=\xi_1(t)+\xi_n^0(t)$) у правій частині виникає додаткова функція

$$A_0^{(n)}(x,u_1)=\int_x^\infty e^{u_1(x-z)}\,\Pi_n^0(dz)=\frac{an^2}{n+u_1}e^{-nx},\qquad x>0.$$

Тому в проекційних дужках (див. (2.44) в [5]) виникає додаткова проекційна складова

$$g^n(s,x,u_1)=\Big[\varphi_-^{(n)}(s,\alpha)a_0^{(n)}(\alpha,u_1)\Big]_+^0, \qquad \varphi_\pm^{(n)}(s,\alpha)=\mathsf{E}\,e^{i\alpha\xi_n^\pm(\theta_s)},$$

$$a_0^{(n)}(\alpha,u_1)=\int_0^\infty e^{i\alpha x}A_n(x,u_1)\,dx=\frac{an^2}{(n+u)(n-i\alpha)}.$$

При $n\to\infty$ $a_0^{(n)}(\alpha,u_1)\to a$, тому проекційній дужці відповідає не залежна від α (а отже і від x) функція $C_*(s)$ в (4). При $m<0$ $C_*(s)\to ap'_-(0)$, тому із (4) випливає (6). При $m>0$ із (4) випливає (7), оскільки

$$\mathsf{P}\left\{\gamma_{(n)}^+(x),\xi_n^+(\theta_s)>x\right\}\underset{n\to\infty}{\to} ap_-(s)s^{-1}\frac{\partial}{\partial x}P_+(s,x)\underset{s\to 0}{\to} ap_-\frac{\partial}{\partial x}\,\mathsf{E}\,\tau^+(x).$$

Якщо $a<0$, тоді аналогічне наближення для $-|a|t$ зі стрибками $\xi_{k,n}^0<0$ не впливає на проекційну частину в (2.44) з [5]. Тому при $a\le 0$ $C_*(s)\equiv 0$.

Зауважимо, що для субординатора $\xi(t)$

$$m=\mathsf{E}\,\xi(1)=a+\widetilde{\Pi}(0)>0, \qquad \widetilde{\Pi}(u)=\int_0^\infty e^{-ux}\Pi(x)\,dx,$$

тому для нього виконуються такі співвідношення

$$\begin{gathered}p_-(s)=p_-=1; \qquad q_-(s)=1-p_-(s)=q_-=0, \qquad a>0,\\ P_+(s,x)=P(s,x);\\ s^{-1}P(s,x)=\int_0^\infty e^{-st}\,\mathsf{P}\{\xi(t)<x\}\,dt\underset{s\to 0}{\to}\int_0^\infty \mathsf{P}\{\tau^+(x)>t\}\,dt=\mathsf{E}\,\tau^+(x)=m(x).\end{gathered}\tag{8}$$

З леми 1 випливає

Наслідок 1. *Якщо $\xi(t)$ — субординатор, тоді згідно з (4) та (6) — (8) має місце співвідношення*

$$\mathsf{P}\{\gamma^+(x)=0,\xi^+(\theta_s)>x\}=as^{-1}P'(s,x), \qquad x>0, \tag{9}$$

з якого при $s\to 0$ випливає

$$\mathsf{P}\{\gamma^+(x)=0\}=am'(x),\ x>0. \tag{10}$$

Зауважимо, $\tau^+(x)$ є оберненим процесом до $\xi(t)$, який не є процесом з н.п. Його траєкторії є кососхідчастими функціями з відрізками лінійного росту та інтервалами сталих (випадкових) значень. Якщо $\lambda=\int_0^\infty\Pi(dx)<\infty$, тоді $\tau^+(x)$ має стохастичне зображення

$$\tau^+(x)\overset{d}{=}\begin{cases}\frac{x}{a}, & 0\le x<a\zeta_1,\ \mathsf{P}\{\zeta_1>t\}=e^{-\lambda t};\\ \zeta_1, & a\zeta_1\le x<a\zeta_1+\xi_1,\ F(x)=\mathsf{P}\{\xi_1<x\};\\ \frac{x-\xi_1}{a}, & a\zeta_1+\xi_1\le x<a\sigma_2+\xi_1,\ \sigma_2=\zeta_1+\zeta_2;\\ \dots & \dots\\ \sigma_n, & a\sigma_n+S_{n-1}\le x<a\sigma_n+S_n;\\ \frac{x-S_n}{a}, & a\sigma_n+S_n\le x<a\sigma_{n+1}+S_n;\end{cases}\tag{11}$$

$$\sigma_n=\sum_{k=1}^n\zeta_k; \qquad S_n=\sum_{k=1}^n\xi_k, \qquad F_n(x)=\mathsf{P}\{S_n<x\}, \qquad n\ge 1.$$

Якщо $a = 0$, тоді (11) спрощується.

$$\tau^+(x) \stackrel{d}{=} \begin{cases} \zeta_1, & 0 \le x < \xi_1,\ \mathsf{E}\,\xi_1 = \mu, \\ \sigma_2, & \xi_1 \le x < S_2, \\ \dots & \dots \\ \sigma_n, & S_{n-1} \le x < S_n. \end{cases} \tag{12}$$

На основі (11) далі обчислюються усереднення по рядках складові при $m = 2n+1$, $n \ge 0$,

$$t_{2n+1}(x) = \mathsf{E}\left[\frac{x - S_n}{a}, a\sigma_n + S_n \le x < a\sigma_{n+1} + S_n\right]$$

та при $m = 2n$, $n \ge 1$,

$$t_{2n}(x) = \mathsf{E}[\sigma_n, a\sigma_n + S_{n-1} \le x < a\sigma_n + S_n].$$

Після підсумовування знаходяться

$$\begin{gathered} m_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} t_{2n+1}(x), \qquad m_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} t_{2n}(x), \\ m(x) = \mathsf{E}\,\tau^+(x) = m_1(x) + m_2(x). \end{gathered} \tag{13}$$

Останнє співвідношення в (13) для $m(x)$ (в силу усереднення за неперервним розподілом $F_{\sigma_n}(x)$ при обчисленні його складових $t_m(x)$) дає підставу стверджувати, що $m(x)$ неперервна і диференційовна по $x > 0$.

Згідно з означенням в [3] на с.74 середнє $m(x)$ визначає потенціал субординатора: $U(x) = U([0,x]) = \mathsf{E}\int_0^\infty \mathbb{1}\{\xi(t) \in [0,x]\}\,dt$, а саме

$$U(x) = \mathsf{E}\,\tau^+(x) = m(x), \qquad x > 0. \tag{14}$$

Тому формула (10) у наслідку 1 узгоджується з теоремою 5 в [3, с. 79].

Для довільного процесу $\xi(t)$ з н.п. ф.р. $P(s,x)$ задовольняє інтегро-диференціальне рівняння (1.54) в [5]. З урахуванням (8) для субординатора аналогічне рівняння задовольняє $m(x)$

$$am'(x) + \int_0^\infty [m(x-y) - m(x)]\,\Pi(dy) = 1, \quad x > 0, \qquad m(x) = 0, \quad x < 0. \tag{15}$$

Після інтегрування частинами з урахуванням нульової граничної умови рівняння (15) зводиться до інтегрального рівняння типу згортки для $m'(x)$.

$$am'(x) + \int_0^x \Pi(x-y)m'(y)\,dy = 1, \qquad x > 0. \tag{16}$$

Із співвідношень (10), (13) та (16) випливає

Теорема 1. *Для субординатора $\xi(t)$, $a > 0$, похідна $m'(x) = \frac{\partial}{\partial x}\mathsf{E}\,\tau^+(x)$, $x > 0$, описується рівнянням (15), з якого після перетворення Лапласа визначається*

$$\begin{gathered} \widehat{m}(u) := \int_0^\infty e^{-ux} m'(x)\,dx = \frac{1}{u}\frac{1}{a + \widetilde{\Pi}(u)} = \frac{-1}{k(u)}, \\ k(u) = \Psi(iu), \qquad \widetilde{\Pi}(u) = \int_0^\infty e^{-ux}\Pi(x)\,dx = \lambda\int_0^\infty \overline{F}(x)e^{-ux}\,dx, \qquad \lambda < \infty. \end{gathered} \tag{17}$$

Якщо $\widetilde{f}(u) = \mathsf{E}\,e^{-u\xi_1} = c(c+u)^{-1}$, $c > 0$, тоді $\widetilde{\Pi}(u) = \lambda(c+u)^{-1}$; розклавши $k^{-1}(u)$ на дробово-лінійні функції, знаходимо

$$\widehat{m}(u) = \frac{1}{ar_0}\left[\frac{c}{u} + \frac{\lambda}{a}\frac{1}{u + r_0}\right], \qquad r_0 = c + \lambda a^{-1}. \tag{18}$$

Після обернення (18) по u визначається

$$m'(x)=\frac{1}{ar_0}[c+\lambda a^{-1}e^{-r_0x}]=\frac{a^{-1}}{ac+\lambda}[ac+\lambda e^{-r_0}x],\qquad x>0. \tag{19}$$

Для довільного субординатора $\xi(t)$ згідно з (1.94) в [5] із (17) випливає, що

$$\begin{aligned} m'(+0)&=\lim_{u\to\infty}u\widehat{m}(u)=\lim_{u\to\infty}\frac{1}{a+\widetilde{\Pi}(u)}=\frac{1}{a},\\ m'(+\infty)&=\lim_{u\to 0}u\widehat{m}(u)=\frac{1}{a+\widetilde{\Pi}(0)}=\frac{1}{m}. \end{aligned} \tag{20}$$

Зауваження 1. Співвідношення (17) можна одержати безпосередньо з формули (1.55) в [5], згідно з якою

$$s^{-1}\,\mathsf{E}\,e^{-u\xi(\theta_s)}=(s-k(u))^{-1}\underset{s\to0}{\to}\int_0^\infty e^{-ux}d\int_0^\infty \mathsf{P}\{\tau^+(x)>t\}\,dt=-k^{-1}(u).$$

Більш повну інформацію про $m(x)$ дає

Теорема 2. *Для субординатора $\xi(t)$ з $a>0$ при $\lambda<\infty$ потенціал $U(x)=m(x)$ визначається співвідношенням*

$$m(x)=\sum_{m=1}^{\infty}t_m(x)=m_1(x)+m_2(x), \tag{21}$$

($m_{1,2}(x)$ див. (13)), де складові $t_m(x)$, $m=2n+1$, $m=2n$, мають інтегральне зображення

$$\begin{aligned} t_{2n+1}(x)&=\frac{\lambda^n}{n!}\int_0^x\left(\frac{x-y}{a}\right)^{n+1}e^{-\lambda\frac{x-y}{a}}\,dF_n(y),\qquad F_n(y)=\mathsf{P}\{S_n<y\},\quad y>0,\\ t_{2n}(x)&=\frac{\lambda^n a^{-1}}{(n-1)!}\int_0^x\left(\frac{x-y}{a}\right)^{n}e^{-\lambda\frac{x-y}{a}}[\overline{F}_n(y)-\overline{F}_{n-1}(y)]\,dy,\qquad x>0. \end{aligned} \tag{22}$$

Перетворення Лапласа $\widetilde{t}_m(u)=\int_0^\infty e^{-ux}t_m(x)\,dx$ визначається через $\widetilde{f}(u)=\mathsf{E}\,e^{-u\xi_1}$

$$\widetilde{t}_{2n+1}(u)=\frac{a\lambda^n(n+1)\widetilde{f}^n(u)}{(\lambda+au)^{n+2}},\qquad \widetilde{t}_{2n}(u)=\frac{n\lambda^n\widetilde{f}^{n-1}(u)}{(\lambda+au)^{n+1})}\frac{1-\widetilde{f}(u)}{u},$$

внаслідок чого встановлюється просте співвідношення для

$$\widetilde{m}(u):=\int_0^\infty e^{-ux}m(x)\,dx=\frac{-1}{uk(u)}. \tag{23}$$

Якщо $\xi(t)$ неперервний знизу процес з $a<0$ (майже напівнеперервний знизу з $a=0$ в (2)), тоді при $m<0$ генератриса ξ^+ визначається співвідношенням

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\,e^{-u\xi^+}&=\frac{1}{\rho'_-(0)}\frac{u}{k(u)}=\frac{m}{a+\widetilde{\Pi}(u)},\qquad m=a+\widetilde{\Pi}(0)<0,\\ \rho'_-(0)&=\frac{1}{|m|},\qquad p_+=\frac{m}{a},\\ (\mathsf{E}\,e^{-u\xi^+}&=\frac{b|m|u}{k(u)(b-u)}=\frac{b|m|}{\lambda_1-(b-u)\widetilde{\Pi}(u)},\qquad m=\widetilde{\Pi}(0)-\lambda_1b^{-1}<0). \end{aligned} \tag{24}$$

Доведення. Легко знайти $t_1(x)=\frac{x}{a}e^{-\lambda x/a}$, $x>0$. Дещо складніше за допомогою усереднення по щільності розподілу σ_n

$$F'_{\sigma_n}(x)=\frac{\lambda^n}{(n-1)!}e^{-\lambda x}x^{n-1},\qquad x>0,$$

проводиться обчислення $t_m(x)$, $m = 2n$, $m = 2n+1$, в результаті якого встановлюються співвідношення (22). Після перетворення Лапласа з (22) випливають співвідношення для $\widetilde{t}_m(u)$. Тоді для $\widetilde{m}_{1,2}(u) = \int_0^\infty e^{-ux} m_{1,2}(x)\,dx$ одержуються спрощені співвідношення в термінах $k(u)$

$$\begin{aligned} \widetilde{m}_1(u) &= \frac{a}{(\lambda+au)^2}\left(1-\frac{\lambda\widetilde{f}(u)}{\lambda+au}\right)^{-2} = \frac{a}{k^2(u)}, \\ m_2(u) &= \frac{1-\widetilde{f}(u)}{u(\lambda+au)^2}\left(1-\frac{\lambda f(u)}{\lambda+au}\right)^{-2} = \frac{\lambda(1-\widetilde{f}(u))}{uk^2(u)}, \end{aligned} \tag{25}$$

після складання яких встановлюється (23). Оскільки $\widehat{m}(u) = u\widetilde{m}(u)$, то (17) і (23) еквівалентні. З основної факторизаційної тотожності (2.4) і (3.37) ((3.93)) в [5] випливає (23). Цікаво, що праві частини (16), (22), (23) відрізняються між собою множником $u^{\pm 1}$. □

Теорема 3. *Якщо для субординатора $\xi(t)$ $a \to 0$, тоді згідно з* (12) *встановлюється, що*

$$m(x) = \frac{1}{\lambda}H(x), \qquad H(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x), \qquad F_0(x) = I_{x>0}, \tag{26}$$

$$m(+0) = \frac{1}{\lambda}, \qquad m(x) \approx \frac{x}{\lambda\mu} = \frac{x}{m}, \qquad x \to \infty. \tag{27}$$

Доведення. Після усереднення по рядках знаходимо, що

$$t_n(x) = \frac{n}{\lambda}[\overline{F}_n(x) - \overline{F}_{n-1}(x)], \qquad n \geq 1,\ x > 0, \qquad \overline{F}_n(x) = 1 - F_n(x). \tag{28}$$

Із (28) після складання легко довести, що

$$m(x) = \sum_{n\geq 1} t_n(x) = \frac{1}{\lambda}\sum_{n\geq 1} n[\overline{F}_n(x) - \overline{F}_{n-1}(x)] = \frac{1}{\lambda}H(x).$$

Співвідношення (27) випливають з того, що (див. (26)) $H(+0) = 1$, а за елементарною теоремою відновлення $H(x) \approx x\mu^{-1}$, $x \to \infty$.

Щоб одержати розподіли

$$\gamma_1(x) = \gamma^+(x), \qquad \gamma_2(x) = \gamma_+(x), \qquad \gamma_3(x) = \xi(\tau^+(x)) - \xi(\tau^+(x) - 0)$$

для субординатора з $a > 0$ слід використати відповідні результати теореми 3.8 з [5] для майже напівнеперервних знизу процесів з кумулянтою (2), з якої при $\lambda_1 \to 0$ (або $b \to \infty$) одержується (3). Тоді співвідношення для допоміжних функцій (див. [5] (3.59)–(3.55), $k = 1, 2, 3$) спрощуються (оскільки $\xi^-(\theta_s)$ зосереджене в 0)

$$G_k(x, u_k) = \int_{-\infty}^0 A_k(x-y, u_k)\,dP_-(s,y) = A_k(x, u_k) = \begin{cases} \int_x^\infty e^{u_1(x-z)}\,\Pi(dz), & k = 1, \\ e^{-u_2 x}\Pi(x), & k = 2, \\ \int_x^\infty e^{-u_3 z}\,\Pi(dz), & k = 3. \end{cases}$$

Якщо позначити $\overline{A}_k(x, u_k) = A_k(x, u_k) - A_k(x, 0)$, $k = 1, 2, 3$, тоді згідно з (3.161) в [5] має місце співвідношення

$$\int_0^\infty e^{-u_k z}\,\mathsf{P}\{\gamma_k(x) > z, \xi(\theta_s) > x\}\,dz = -(su_k)^{-1}\int_0^x \overline{A}_k(x-y, u_k)\,dP(s,y), \qquad y > 0,$$

з якого при $s \to 0$ випливає, що

$$\int_0^\infty e^{-u_k z}\,\mathsf{P}\{\gamma_k(x) > z\}\,dz = -\frac{1}{u_k}\int_0^x \overline{A}(x-y)m'(y)\,dy. \tag{29}$$

Після інтегрування частинами із (29) визначаються генератриси ($k = 1, 3$)

$$f_k(x, u_k) := \mathsf{E}\, e^{-u_k \gamma_k(x)} = 1 + \int_0^x \overline{A}_k(x-y, u_k)\, dm(y), \tag{30}$$

при цьому границі $\lim_{u_k\to\infty} f_k(x, u_k)$ визначають ($k = 1, 2, 3$) імовірності

$$\mathsf{P}\{\gamma_k(x) = 0\} = 1 - \int_0^x \Pi(x-y)\, dm(y) = am'(x). \tag{31}$$

Крім того, для $k = 3$ атомарну ймовірність можна записати і в такій формі

$$\mathsf{P}\{\gamma_3(x) = 0\} = 1 - \int_0^x [m(x) - m(x-y)]\, \Pi(dy) - m(x)\, \Pi(x).$$

В силу (16) співвідношення (10) і (31) еквівалентні. □

Після виділення атомарних імовірностей встановлюється

Теорема 4. *Для генератрис $\gamma_k(x)$субординатора $\xi(t)$ мають місце співвідношення*

$$f_1(x, u_1) = am'(x) + \int_0^x \int_y^\infty e^{u_1(y-z)} \Pi(dz) m'(x-y)\, dy, \tag{32}$$

$$f_2(x, u_2) = am'(x) + \int_0^x e^{-u_2 y} \Pi(y) m'(x-y)\, dy, \tag{33}$$

$$\begin{aligned} f_3(x, u_3) = \mathsf{P}\{\gamma_3(x) = 0\} + m(x) \int_x^\infty e^{-u_3 z}\, \Pi(dz) \\ + \int_0^x e^{-u_3 z} [m(x) - m(x-z)]\, \Pi(dz). \end{aligned} \tag{34}$$

Оберненням інтегральних членів у (32)–(34) *по u_k визначаються щільності $\gamma_{1,2}(x)$ та розподіл $\gamma_3(x)$:*

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathsf{P}\{\gamma_1(x) < z\} = \int_0^x \Pi'(y+z) m'(x-y)\, dy, \qquad z > 0, \tag{35}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathsf{P}\{\gamma_2(x) > z\} = \Pi(z) m'(x-z) I_{0\le z\le x}, \tag{36}$$

$$\mathsf{P}\{\gamma_3(x) > y\} = \int_y^x [m(x) - m(x-z)]\, \Pi(dz) + m(x)\Pi(x \vee y), \tag{37}$$

$$\mathsf{P}\{\gamma_3(x) > x\} = m(x)\Pi(x) \quad \textit{при } y \to x > 0.$$

Доведення. Після виділення $\mathsf{P}\{\gamma_k(x) = 0\}$ із (30) генератриси $f_k(x, u_k)$ набувають вигляду (32)–(34), де оберненню по u_k підлягають лише інтегральні складові. Зокрема, (33) одержується розбиттям подвійного інтегралу на дві частини:

$$\int_0^x \int_y^\infty e^{-u_3 z}\, \Pi(dz) m'(x-y)\, dy = \int_0^x \dots \int_0^z dy + \int_x^\infty \dots \int_0^x dy.$$

В (32) обернення по u_1 здійснюється після заміни $y - z = -z'$. В (33) обернення по u_2 очевидне, оскільки $\mathsf{P}\{\gamma_2(x) > z\} = 0$ при $z > x$. Після обернення (34) по u_3 спочатку знаходиться щільність $\gamma_3(x)$ в диференціалах $\Pi(dz)$, а після інтегрування її визначається розподіл (37). При $y = 0$ (37) узгоджується з додатковою формою запису $\mathsf{P}\{\gamma_3(x) = 0\}$ після (31). □

Із наслідку 3.9 в [5] одержується

Лема 2. *Для субординатора $\xi(t)$ $a > 0$ і $m > 0$, тому згідно з* (3.166) *в* [5] *мають місце співвідношення*

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial z}\,\mathsf{P}\{\gamma_k(\infty) < z\} = \Pi(z)\widetilde{\Pi}(0)^{-1}, \qquad \widetilde{\Pi}(0) = \int_0^\infty \Pi(z)\,dz, \qquad k = 1,2, \\ &\mathsf{P}\{\gamma_3(\infty) > z\} = m_+\int_z^\infty y\Pi(y)\,dy, \qquad m_+^{-1} = \int_0^\infty y\Pi(y)\,dy, \qquad k = 3, \end{aligned} \tag{38}$$

при цьому залежності розподілу $\gamma_k(\infty)$ від a немае, оскільки $\mathsf{P}\{\gamma_k(\infty) = 0\} = 0$.

Для немонотонних напівнеперервних процесів $\xi(t)$ В.С.Королюк в [1] ввів поняття потенціалу $R(x)$ та резольвенти $R_s(x)$, $x > 0$, іншим способом (відмінним від (14)). Для складного пуассонівського неперервного знизу процесу з кумулянтою

$$\psi(\alpha) = i\alpha a + \lambda\int_0^\infty (e^{i\alpha x} - 1)\,dF(x), \qquad a < 0$$

резольвента $R_s(x)$ і потенціал $R(x)$ визначаються в [1] своїми інтегральними перетвореннями

$$\begin{aligned} \widetilde{R}_s(\alpha) &= \int_0^\infty e^{i\alpha x}R_s(x)\,dx = \frac{1}{\psi(\alpha) - s}\Big|_{\alpha = iu} \\ &= \frac{1}{k(u) - s}, \qquad \operatorname{Im}\alpha > \rho_-(s),\ s \ge 0, \\ \widetilde{R}(\alpha) &= \int_0^\infty e^{i\alpha x}R(x)\,dx = \frac{1}{\psi(\alpha)}\Big|_{\alpha = iu} \\ &= k^{-1}(u), \qquad \operatorname{Im}\alpha > \rho_-(0),\ k(\rho_-(s)) = s. \end{aligned} \tag{39}$$

Для довільного неперервного знизу процесу $\xi(t)$ означення потенціалу наводиться в § 4.1 [5] Там же для $R(x)$ наводиться троїсте зображення $R(x)$ залежно від знаку $m = \mathsf{E}\,\xi(1)$. Зокрема, з теореми 4.1а) в [5] для неперервних знизу процесів з $\sigma^2 \ge 0$ у випадку $m = 0$ випливає

Лема 3. *Для процесу $\xi(t)$ з кумулянтою* (4.9) *в* [5] *($\sigma^2 \ge 0$; $a < 0$, якщо $\sigma^2 = 0$, $\operatorname{var}\xi(t) < \infty$) потенціал $R(x)$ згідно з* (4.33) *в* [5] *при $m = 0$ має зображення*

$$R(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sigma_1}\,\mathsf{E}\,\tau^0(x), \qquad \mathsf{E}\,\tau^0(x) = \int_0^\infty \mathsf{P}\{\xi^0(t) < x\}\,dt, \tag{40}$$

де $\sigma_1^2 = \mathbf{D}\,\xi(1)$, $\xi^0(t)$ — субординатор з $a^0 = \frac{\sigma^2}{\sigma_1\sqrt{2}}$, $\Pi^0(dx) = \lambda^0\widetilde{F}'(x)\,dx$, $\widetilde{F}'(x) = \mu^{-1}\overline{F}(x)$, $\lambda^0 = \frac{\sqrt{2}}{\sigma_1}\lambda\mu$. Якщо $\lambda = \infty$, $\Pi^0(dx) = \frac{\sqrt{2}}{\sigma_1}\Pi(x)\,dx$.

Значення $m^0(x) = \mathsf{E}\,\tau^0(x)$ при $a^0 > 0$ обчислюється за формулами(20)–(21) (після заміни λ на λ^0 та $F'(x)$ на $\widetilde{F}'(x)$).

Якщо $\sigma = 0$, тоді для східчастого $\xi^0(t)$ згідно з (4.36) *в* [5] *потенціал $R(x)$ виражається через функцію відновлення для*

$$\widetilde{S}_n = \sum_{k\le n}\widetilde{\xi}_k^0, \qquad \widetilde{F}(x) = \mathsf{P}\{\widetilde{\xi}_1^0 < x\}, \qquad \widetilde{F}'(x) = \frac{\Pi(x)}{\widetilde{\Pi}(0)}, \qquad x > 0, \tag{41}$$

$$R(x) = \widetilde{\Pi}(0)\widetilde{H}^0(x), \qquad \widetilde{H}^0(x) = \sum_{n=1}^\infty \widetilde{F}(x)^{*n}. \tag{42}$$

При цьому $R(+0) = \widetilde{H}^0(0) = 0$ і згідно з (38)

$$\widetilde{F}'(x) = \Pi(x)\widetilde{\Pi}(0)^{-1} = \frac{\partial}{\partial x}\,\mathsf{P}\{\gamma_{1,2}(\infty) < x\}. \tag{43}$$

Після порівняння (26) і (42) легко замітити їх подібність: $m(x)$ в (26) для субординатора при $a \to 0$ та $R(x)$ для неперервного знизу $\xi(t)$ з $m = \sigma = 0$ виражаються через відповідні функції відновлення (але в (26) $H(0) = 1$, а в (42) $\widetilde{H}^0(0) = 0$). Порівнянням (17) та (23) для потенціалу субординатора з (39) для потенціала $R(x)$ неперервного знизу $\xi(t)$ легко замітити схожість між (17) і (39), записаним як перетворення Лапласа потенціалу $R(x)$,

$$(39) \Leftrightarrow \widetilde{R}(u) = \int_0^\infty e^{-ux} R(x)\, dx = \frac{1}{k(u)}, \qquad k(u) = \psi(iu).$$

Але різниця виявляється в знаках для $k(u)$: для субординатора

$$-k(u) = u(a + \widetilde{\Pi}(u)) > 0$$

при $u > 0$, для неперервного знизу $\xi(t)$ $k(u) > 0$ при $u > \rho_-(0)$ ($\rho_-(0) > 0$) при $m > 0$. Крім того, (17) є перетворенням Лапласа для $U'(x) = m'(x)$, а (39) — для потенціалу $R(x)$.

Зауваження 2. Слушно відзначити, що потенціал $R(x)$ має широкий спектр застосування в граничних задачах для немонотонних напівнеперервних процесів. До них відноситься не лише використання $R(x)$ при дослідженні розподілу граничних функціоналів цих процесів, а й застосування $R(x)$ в задачах, пов'язаних з блуканням на обмеженому інтервалі, в задачах з одностороннім та двостороннім відбиттям, а також із затримкою (див. в [5, р.4]). Але в силу монотонності субординатора рамки застосування потенціалу $U(x)$ звужуються.

Для $\xi(t)$ з кумулянтою (1) згідно з теоремою 1.12 в [6] $\xi(t)t^{-1} \underset{t\to 0}{\to} a$, а для загального процесу з н.п. має місце посилений закон великих чисел (див. теорему 1.13 в [6]), і на основі (35)–(37) визначаються розподіли $\xi(\tau_+(x) \pm 0)$. Отже має місце

Теорема 5. *Для субординатора $\xi(t)$ існує середнє $m = \mathsf{E}\,\xi(1) = a + \widetilde{\Pi}(0) < \infty$, тому*

$$\mathsf{P}\left\{\lim_{t\to 0} t^{-1}\xi(t) = a\right\} = 1, \qquad \lim_{t\to\infty} \mathsf{P}\left\{t^{-1}\xi(t) = m\right\} = 1. \tag{44}$$

Розподіли $\xi(\tau^+(x)) > x$ та $\xi(\tau^+(x) + 0) < x$ визначаються так

$$\mathsf{P}\{\xi(\tau^+(x)) > z\} = \int_0^x \Pi(z - y) m'(y)\, dy, \qquad z > x, \tag{45}$$

$$\mathsf{P}\{\xi(\tau^+(x) - 0) < z\} = \int_{x-z}^x \Pi(y) m'(x - z)\, dy, \qquad 0 \le z < x. \tag{46}$$

При $z \to x \mp 0$ із (45)–(46) випливає, що

$$\mathsf{P}\{\gamma^+(x) > 0\} = \mathsf{P}\{\gamma_+(x) > 0\} = \int_0^x \Pi(x - y) m'(y)\, dy. \tag{47}$$

Доведення. (45)–(46) випливають із того, що

$$\xi(\tau^+(x)) = x + \gamma^+(x), \qquad \xi(\tau^+(x) - 0) = x - \gamma_+(x),$$

і після інтегрування щільностей (35)–(36) встановлюються відповідні співвідношення (45)–(46), з яких при $z \to x \mp 0$ випливає (47), що узгоджується з (31). □

Зауваження 2. Для немонотонних напівнеперервних або майже напівнеперервних знизу процесів $\xi(t)$ функціонал $\tau^+(x)$ є монотонним однорідним процесом з н.п. по $x \ge 0$. В деяких випадках для нього можна знайти характеристики Леві (значення γ і стрибкову міру $\Pi(A)$ на R^+, див. § 3.5 у [5]). При $\gamma > 0$, $\tau^+(x)$ є субординатором. Для субординаторів $\xi(t)$ $\tau^+(x)$ лише при $a \to 0$ та $\mathsf{P}\{\xi_k > x\} = e^{-cx}$ ($c > 0$) є пуассонівським процесом з інтенсивністю $\lambda' = c$ та стрибками ζ_k. В противному разі $\tau^+(x)$ не є однорідним процесом з н.п.

Спільний розподіл $\{\xi(\tau^+(x)), \xi(\tau^+(x)-0)\}$так само легко одержати з формул для спільних генератрис $\{\gamma_1(x) = \gamma^+(x), \gamma_2(x) = \gamma_+(x)\}$, одержаних в [5]. Із співвідношень на початку розділу 6 ([5]) випливає

Теорема 6. *Для субординатора $\xi(t)$ спільний розподіл $\{\gamma_1(x), \gamma_2(x)\}$ визначається щільностями*

$$\frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2} \mathsf{P}\{\gamma_1(x) < z_1, \gamma_2(x) < z_2\} = m'(x-z_1)\Pi'(z_1+z_2) I_{z_2 \le x}, \tag{48}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \mathsf{E}\left[e^{-u_2\gamma_2(x)} \gamma_1(x) < z\right] = \int_0^x e^{-u_2 y} m'(x-y)\Pi'(y+z)\, dy, \tag{49}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \mathsf{P}\{\gamma_2(x) < y, \gamma_1(x) < z\} = m'(x-y)\Pi(y+z) I_{y \le x}, \tag{50}$$

$$\begin{gathered} \mathsf{P}\{0 < \gamma_2(x) < x, \gamma_1(x) < z\} = \int_0^x m'(x-y)\Pi(y+z)\, dy \\ \underset{z \to 0}{\Rightarrow} \mathsf{P}\{0 < \gamma_2(x) < x, \gamma_1(x) = 0\} = \int_0^x m'(x-y)\Pi(y)\, dy. \end{gathered} \tag{51}$$

Доведення. Згідно з (6.3) в [5] дограничнa (і гранична при $s = 0$) генератриса

$$V(s, x; u_1, u_2) = \mathsf{E}\left[e^{-u_1\gamma_1(x) - u_2\gamma_2(x)}, \xi^+(\theta_s) > x\right],$$
$$V(0, x; u_1, u_2) = \mathsf{E}\left[e^{-u_1\gamma_1(x) - u_2\gamma_2(x)}\right]$$

виражається через функцію $G(s, x, u_1, u_2) = \int_{-\infty}^0 A(x-y, u_1, u_2)\, dP_-(s, y)$, яка згідно з (8) спрощується (оскільки розподіл $\xi^-(\theta_s)$ має лише стрибок $p_-(s) = 1$ в нулі),

$$G(s, x, u_1, u_2) = A(x, u_1, u_2) = \int_x^\infty e^{u_1(x-z) - u_2 x}\, \Pi(dz).$$

Тоді для $\xi(t)$ при $a \ge 0$ генератриса $\{\gamma_1(x), \gamma_2(x)\}$ (див. (6.3) в [5]) має вигляд:

$$V(s, x; u_1, u_2) = s^{-1} \int_0^x A(x-y, u_1, u_2)\, dP_+(s, x),$$

з якого при $s \to 0$ випливає, що

$$V(0, x; u_1, u_2) = \int_0^x m'(x-y) \int_0^\infty e^{-u_1 z - u_2 y} \Pi'(y+z)\, dz\, dy. \tag{52}$$

Після обернення (52) по u_1 встановлюється (49), з якого після обернення по u_2 випливає (48). Із (48)–(49) випливають (50)–(51). При цьому (51) узгоджується з компенсаційною формулою (див. [3] внизу на с.76).

При $a = 0$ (48)–(51) повністю визначають розподіл $\{\gamma_1(x), \gamma_2(x)\}$, оскільки для $\gamma_{1,2}(x)$ відсутня атомарна імовірність. Якщо $a > 0$, тоді в силу (2.55) в [5]

$$\mathsf{P}\{\gamma_1(x) = 0, \gamma_2(x) = 0\} = am'(x) > 0,$$

а формули (48)–(51) визначають розподіл строго додатних значень $\{\gamma_{1,2}(x) > 0\}$. З цих формул легко одержати співвідношення для спільного розподілу

$$\{\xi(\tau^+(x), \xi(\tau^+(x)-0))\},$$

оскільки $\xi(\tau^+(x)) = x + \gamma_1(x)$, $\xi(\tau^+(x)-0) = x - \gamma_2(x)$. □

З'ясуємо питання про те, чи зміняться співвідношення (18)–(19) для субординатора, якщо генератрису стрибків $\widetilde{f}(u) = \frac{c}{c+u}$ замінити на ерлангову генератрису 2-го порядку.

Приклад 1. Нехай $\xi(t)$ субординатор з $a > 0$, $\widetilde{f}(u) = (c/(c+u))^2$, $c > 0$, тоді

$$\Pi(x) = \lambda(1+cx)e^{-cx}, \quad x > 0; \qquad \widetilde{\Pi}(u) = \lambda\frac{2c+u}{(c+u)^2}, \quad m = a + \frac{2\lambda}{c} > a,$$

$$a + \widetilde{\Pi}(u) = \frac{aP_2(u)}{(c+u)^2}, \qquad P_2(u) = u^2 + \left(2c + \lambda a^{-1}\right)u + c\left(c + 2\lambda a^{-1}\right).$$

Зауважимо, що дискримінант $D = \frac{\lambda}{a^2}(\lambda - 4ac)$ — довільного знаку, при $D < 0$, позначимо $D = -4\omega^2$

$$P_2(0) = c(c + 2\lambda a^{-1}) = c^2 m a^{-1},$$

$$P_2(u) = (u+\delta)^2 - \frac{1}{4}D, \qquad \delta = \frac{2ac+\lambda}{2a} > 0.$$

Згідно з (17) після ділення $(c+u)^2$ на $P_2(u)$ легко знайти

$$\widehat{m}(u) = \frac{(c+u)^2}{auP_2(u)} = \frac{1}{au}\left[1 - \frac{2\lambda c a^{-1}}{P_2(u)}\right] - \frac{\lambda}{a^2 P_2(u)}. \tag{53}$$

Обернення (53) по u залежить від знаку D. Не зменшуючи загальності, для простоти покладемо $a = c = 1$, $\lambda > 0$ — довільне. При цьому відмітимо, що при $\lambda = 4$, $D = 0$ і $m = 9 = m_*$ назвемо "межовим" середнім (в загальному випадку $D = 0$ при $\lambda_* = 4ac, m_* = a^2 + 8c$). При $\lambda < 4$ $m < m_*$, при $\lambda > 4$ $m > m_* = 9$. Має місце

Пропозиція. *Нехай $\xi(t)$ субординатор з $a = c = 1$, довільним $\lambda > 0$ і $\widetilde{f}(u) = (1+u)^{-2}$.*

а) Якщо $0 < \lambda < 4$, $D < 0$, $1 < m < 9$, $1 < \delta < 3$, $\omega^2 = -\frac{1}{4}D > 0$, тоді рівняння $P_2(u) = 0$ має комплексно спряжені корені $u_{1,2} = -\delta \pm i\omega$ і згідно з (53)

$$\widehat{m}(u) = \frac{1}{u}\left[1 - \frac{2\lambda}{(u+\delta)^2 + \omega^2}\right] - \frac{\lambda}{(u+\delta)^2+\omega^2}. \tag{54}$$

Після обернення дробово-раціональних функцій в (54) *одержимо функції*

$$G_1(x) = \lambda\omega^{-1}e^{-\delta x}\sin\omega x, \quad x > 0; \qquad G_1(+0) = G_1(+\infty) = 0;$$

$$G_2(x) = 2\int_0^x G_1(y)dy, \quad x > 0; \qquad G_2(+0) = 0, \quad G_2(+\infty) = \frac{2\lambda}{2\lambda+1};$$

$$\left(\int_0^\infty e^{-\delta y}\sin\omega y\, dy = \frac{\omega}{\omega^2+\delta^2}\right).$$

Після обернення (54) *встановлюється двоїстий запис для $m'(x)$:*

$$m'(x) = \begin{cases} 1 - G_1(x) - G_2(x) \to 1 & \text{при } x \to 0; \\ \frac{1}{m} - G_1(x) + 2\int_x^\infty G_1(y)dy \to \frac{1}{m} & \text{при } x \to +\infty, \end{cases} \tag{55}$$

оскільки при $x \to \infty$ функції $G_1(x) \to 0$, $\left|\int_x^\infty G_1(y)\,dy\right| < \int_x^\infty e^{-\delta y}\,dy \to 0$ описують згасаючі коливання. Отже, при $\lambda < 4$, $1 < m < m_*$ справедливі асимптотичні оцінки

$$m'(x) - 1 = O(1), \quad x \to 0; \qquad m'(x) - \frac{1}{m} = O(e^{-\delta x}), \qquad mx \to \infty, \quad 0 < \delta < 3. \tag{56}$$

б) Якщо $\lambda = 4$, $D = 0$, $m = m_* = 9$, $\delta = \delta_* = 3$, тоді $P_2(u) = (u+3)^2$. Позначимо

$$\widetilde{f}_*(u) = \frac{3}{3+u}, \qquad f_*(x) = 3e^{-3x}, \qquad F_*(x) = 1 - e^{-3x}, \qquad x > 0.$$

Згідно з (53) *у випадку кратного кореня $u_{1,2} = -3$ (див. пунктирну криву на 1-му графіку).*

$$\widehat{m}(u) = \frac{1}{u}\left(\frac{u+2}{u+3}\right)^2 = \frac{1}{u} + \frac{4}{9u}\widetilde{f}_*^2(u) - \frac{4}{3u}\widetilde{f}_*(u). \tag{57}$$

Після обернення (57) *по* u *знаходимо двоїстий запис* $m'(x)$

$$m'(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{4}{9}F_*^{*2}(x) - \frac{4}{3}F_*(x) \to 1, & x \to 0, \ a = 1, \\ \frac{1}{m_*} - \frac{4}{9}\overline{F}_*^2(x) + \frac{4}{3}\overline{F}_*(x) \to \frac{1}{m_*}, & x \to \infty, \ m_* = 9. \end{cases} \tag{58}$$

Асимптотичні оцінки (56) *залишаються вірними з* $\delta = \delta_* = 3$, $m = m_* = 9$.

в) Якщо $\lambda > 4$, $D > 0$, $m > m_* = 9$, *тоді* $\min_{u \le 0} P_2(u) = P_2(-\delta) = -\frac{1}{4}D < 0$. *Оскільки* $P_2(0) = m > 9$, *рівняння* $P_2(u) = 0$ *має різні корені*

$$u_{1,2} = -\frac{2 + \lambda \pm \sqrt{\lambda(\lambda - 4)}}{2} < 0, \qquad u_1 - u_2 = \sqrt{\lambda(\lambda - 4)}, \ u_1 u_2 = m.$$

Якщо позначити $\rho_{1,2} = -u_{1,2}$, *то згідно з* (53) *(див.* $-\rho_{1,2}$ *на першому суцільному графіку)*

$$\widehat{m}(u) = \frac{1}{u}\left[1 - \frac{2\lambda}{\rho_2 - \rho_1}\left(\frac{1}{\rho_1 + u} - \frac{1}{\rho_2 + u}\right)\right] - \frac{\lambda}{\rho_2 - \rho_1}\left(\frac{1}{\rho_1 + u} - \frac{1}{\rho_2 + u}\right). \tag{59}$$

З (59) *після обернення по* u *випливає, що*

$$m'(x) = \begin{cases} 1 - \frac{2\lambda}{\rho_2 - \rho_1} \ \textit{має} \left[\frac{1 - e^{-\rho_1 x}}{\rho_1} - \frac{1 - e^{-\rho_2 x}}{\rho_2}\right] - \frac{\lambda}{\rho_2 - \rho_1}(e^{-\rho_1 x} - e^{-\rho_2 x}), \\ \frac{1}{m} + \frac{2\lambda}{\rho_2 - \rho_1}(\rho_1^{-1} e^{-\rho_1 x} - \rho_2 e^{-\rho_2 x}) - \frac{\lambda}{\rho_2 - \rho_1}(e^{-\rho_1 x} - e^{-\rho_2 x}). \end{cases} \tag{60}$$

З (60) *випливають оцінки* (56) *при* $m > m_* = 9$, $\delta = \rho_1 \wedge \rho_2$ *(*$\rho_1 \approx 2.4$, $\rho_2 \approx 4.6$*).*

Порівнюючи (19) в теоремі 1 з результатами пропозиції, легко помітити, що замість одного співвідношення (19) для $m'(x)$ одержуються 3 різні співвідношення:
а) при $D < 0$, $m_1 < m_*$ — (55); б) при $D = 0$, $m = m_* = 9$ — (58); в) при $D > 0$, $m > m_* = 9$ — (60).

Зауваження 3. Для немонотонних неперервних зверху (знизу) $\xi(t)$ з $\pm a > 0$ ситуація а) з комплексними коренями ніде не зустрічалась у задачах з ерланговим розподілом стрибків 2-го порядку в [5, див. приклади: 3.7, с. 125; 5.1, с. 268; 5.2, с.285], а також в [7, див.задачі: 20.6; 20.9–20.10]. Там завжди корені рівняння $k(u) = 0$ дійсні і визначають розподіли абсолютних екстремумів. Ситуація б) з кратним коренем там має місце у випадку $m = 0$; тоді $u_1 = u_2 = 0$ і $\mathsf{P}\{\xi^{\pm} = \pm\infty\} = 1$. Це легко пояснити на такому прикладі.

Приклад 2. Нехай $\xi(t)$ неперервний знизу процес з $a = -1 < 0$,

$$\widetilde{f}(u) = \left(\frac{1}{1+u}\right)^2; \qquad \Pi(x) = \lambda(1+x)e^{-x}, \quad x > 0; \qquad \widetilde{\Pi}(u) = \lambda\frac{2+u}{(1+u)^2}, \quad \lambda > 0;$$
$$P_2(u) = u^2 + (2 - \lambda)u + 1 - 2\lambda, \qquad m = 2\lambda - 1, \qquad D = \lambda(\lambda + 4) > 0.$$

Отже незалежно від знаку m корені рівняння $P_2(u) = 0$ — дійсні і різні. Зокрема при:

а) $\lambda = 0.1$; $m = -0.8$; $D = 0.41$ (корені від'ємні: $u_{1,2} = -\rho_{1,2}$, див. точкові криві на середньому і останньому графіках);

б) $\lambda = 0.5$; $m = 0$, $D = 2.25$ (один корінь $u_0 = 0$ і $u_1 = -1.5$ на середньому графіку);

в) $\lambda = 2$; $m = 3$, $D = 12$ (корені різного знаку $\pm\sqrt{3}$ на суцільній параболі середнього графіку).

Такі ж корені і рівняння $uP_2(u) = 0$ (вони співпадають із коренями рівняння Лундберга: $k(u) = 0$). Зауважимо, що у випадку а) $m < 0$ ξ^+ має невироджений розподіл з генератрисою (23) і для неї встановлюється співвідношення подібне до (53) або (59)

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\, e^{-u\xi^+} &= \frac{|m|(1+u)^2}{P_2(u)} = |m|\left(1+\lambda\frac{2+u}{P_2(u)}\right) \\ &= |m|\left[1+\frac{\lambda}{\rho_2-\rho_1}\left(\frac{2-\rho_1}{\rho_1+u}+\frac{\rho_2-2}{\rho_2+u}\right)\right], \qquad p_+ = |m| \end{aligned} \tag{61}$$

(згідно з таблицею II в [5] $p_+ = |m|\cdot|a|^{-1}$).

Після обернення (61) по u в термінах $\rho_{1,2}$ визначається щільність розподілу ξ^+

$$\frac{\partial}{\partial x}\,\mathsf{P}\{\xi^+ < x\} = \frac{|m|\lambda}{\rho_2-\rho_1}[(2-\rho_1)e^{-\rho_1 x} + (\rho_2-2)e^{-\rho_2 x}], \qquad x>0. \tag{62}$$

Нижче ілюструються графіки $y = P_2(u)$ та $y = uP_2(u)$: 1) для монотонного $\xi(t)$ (субординатора $a = 1$) з прикладу 1); 2) для немонотонного $\xi(t)$ ($a = -1$) з прикладу 2).

1) $y = P_2(u) = u^2 + (2+\lambda)u + m$, $m = 2\lambda + 1$.

а) $D = -4 < 0$, $\lambda = 2$, $m_1 = 5 < m_* = 9$; $y_1 = P_2(u)|_{\lambda=2}$ — точковий графік;

б) $D = 0$, $\lambda = 4$, $\delta_* = 3$, $m_* = 9$; $y_* = P_2(u)|_{\lambda=4}$ — пунктирний графік;

в) $D = 5 > 0$, $\lambda = 5$, $m = 11 > m$, $y_2 = P_2(u)|_{\lambda=5}$ — суцільний графік.

На 1-му графіку вузловою точкою для всіх кривих є вершина точкової параболи $(-2; 1)$.

2) $y = P_2(u) = u^2 + (2-\lambda)u - m$, $m = 2\lambda - 1$, ($y = uP_2(u)$)

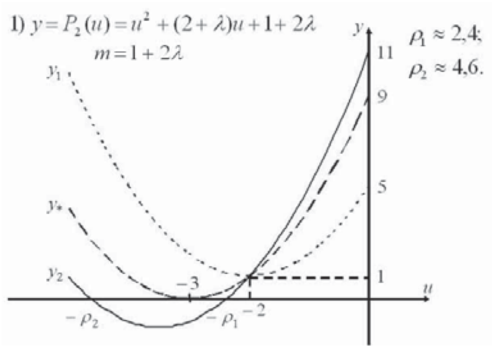
а) $\lambda = 0.1$; $D = 0.41$, $m = -0,8 < 0$; $y_1 = P_2(u)$ ($y_1 = uP_2(u)|_{\lambda=0.1}$) — точкові графіки;

б) $\lambda = \frac{1}{2}$; $m = 0$, $y_0 = P_2(u)$ ($y_0 = uP_2(u)|_{\lambda=0.5}$) — пунктирні графіки;

в) $\lambda = 2$; $m = 3 > 0$, $y_2 = P_2(u)$ ($y_2 = uP_2(u)|_{\lambda=2}$) — суцільні графіки.

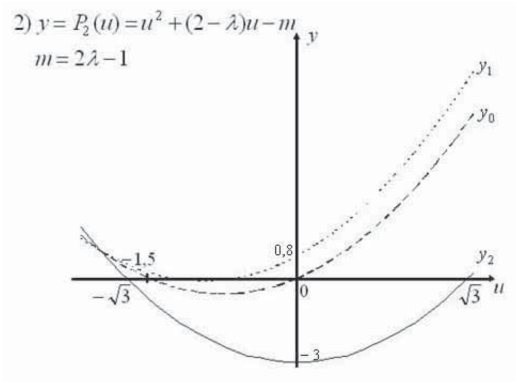
На останньому графіку всі криві мають спільну вузлову точку $(0; 0)$.

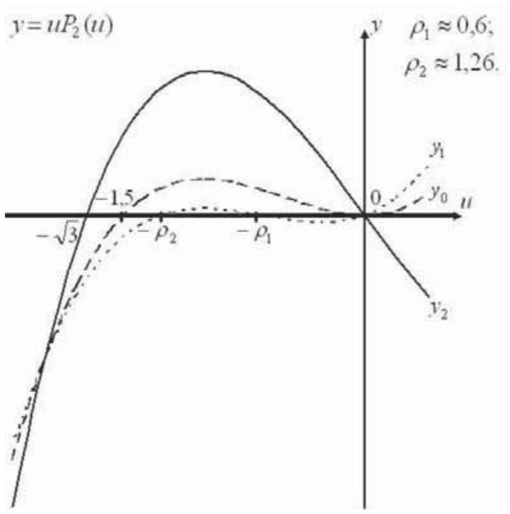
Приводом для написання даної статті послужило критичне зауваження в рецензії В. С. Королюка на нашу монографію [5] про відсутність аналізу функціоналів субординатора, розглянутих в [3, р. III]. Автор вдячний рецензенту за цінне зауваження.



Література

1. В. С. Королюк, *Граничные задачи для сложных пуассоновских процессов*, “Наукова думка”, Киев, 1975.
2. A. A. Borovkov, *Stochastic Processes in Queueing Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1976.
3. J. Bertoin, *Lévy Processes*, Cambrige University Press, Cambrige, 1996.
4. Д. В. Гусак, *Розподіл перестрибкових функціоналів напівнеперервного ожнорідного процесу з незалежними приростами*, Укр. мат. ж. **54** (2002), № 3, 303–322.
5. Д. В. Гусак, *Процеси з незалежними приростами в теорії ризику*, Праці Інституту математики НАНУ, Київ, 2011.





6. Н. С. Братийчук, Д. В. Гусак, *Граничные задачи для процессов с независимыми приращениями*, "Наукова думка", Киев, 1990.
7. Д. В. Гусак, О. Г. Кукуш, О. М. Кулик, Ю. С. Мішура, А. Ю. Пилипенко, *Збірник задач з теорії випадкових процесів та її застосувань*, ВЦП "Київський університет", Київ, 2008.
8. D. Gusak, A. Kukuch, A. Kulik, Yu. Michura, A. Pilipenko, *Theory of Stochastic Processes. With applications to Financial Mathematics and Risk Theory*, Springer, New York–Dordrecht–Heidelberg–London, 2010.

252601, Київ-4, вул. Терещенківська, 3, Інститут математики НАН України
Адреса електронної пошти: random@imath.kiev.ua

Надійшла 13/12/2011