А. Я. ДОРОГОВЦЕВ доц.,
Киевский университет

ОБ ОЦЕНКЕ ВЕРОЯТНОСТИ МАЛЫХ ЗНАЧЕНИЙ СУММ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

В настоящей заметке приводятся некоторые достаточные услов[ия] для выполнения неравенства вида

$$P\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k<\tau\right\}<c\tau^r,\ \ \tau\leqslant\tau_0 \qquad (1)$$

с постоянными $c>0$, $r>0$, $\tau_0>0$, для положительных случайн[ых] величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Неравенства вида (1) оказываются полезны[ми] при рассмотрении свойств некоторых оценок неизвестных параме[т]ров. Из неравенства (1) следует существование определенных моме[н]тов величины $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)^{-1}$. Отметим, что неравенство (1) не я[в]ляется непосредственным следствием неравенства Чебышева.

Теорема 1. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ — последовательность неза[]висимых одинаково распределенных положительных случайны[х] величин с $M\xi_1^{2r}<\infty$ для некоторого целого $r>0$ и плотностью рас[]пределения вероятностей $f(x)$, ограниченной в некоторой окрест[]ности точки $x=0$. Тогда для всех $\tau\leqslant\tau_0$, $n>r$ выполняется нера[]венство

$$P\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k<\tau\right\}<c\tau^r$$

для любого $0<\tau_0<M\xi_1$ с постоянной c, не зависящей от n.

Доказательство. Для вероятности левой части нера[]венства теоремы 1 сначала имеем

$$P\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k<\tau\right\}=\underset{\left\{\sum_{k=1}^{n}x_k<n\tau,\ x_k\geqslant 0\right\}}{\int\overset{n}{\ldots}\int} f(x_1)f(x_2)\ldots f(x_n)\,dx_1dx_2\ldots dx_n\leqslant$$

$$\leqslant\underset{\left\{\sum_{k=1}^{n}x_k<n\tau,\ x_k\geqslant 0\right\}}{\int\overset{n}{\ldots}\int}(n\tau)^r\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)^{-r}f(x_1)f(x_2)\ldots f(x_n)\,dx_1dx_2\ldots dx_n\leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\left\{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k<\varepsilon,\, x_k>0\right\}} \overset{n}{\cdots} \int (n\tau)^r \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^{-r} f(x_1) f(x_2) \ldots f(x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n +$$

$$+ (n\tau\varepsilon^{-1})^r P\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k < \tau\right\}.$$

Пусть теперь $\varepsilon > 0$ таково, что $f(x) \leqslant L$, $0 \leqslant x \leqslant \varepsilon$. Тогда

$$P\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k < \tau\right\} \leqslant (n\tau)^r L^n \int\limits_{\left\{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k<\varepsilon,\, x_k>0\right\}} \overset{n}{\cdots} \int \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^{-r} dx_1 dx_2 \ldots dx_n +$$

$$+ (n\tau\varepsilon^{-1})^r P\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - m) < -(m-\tau)\right\}, \quad m = M\xi_1. \tag{2}$$

Пусть $0 < \tau_0 < m$ для $\tau \leqslant \tau_0$ разность $m - \tau \geqslant m - \tau_0 > 0$. Подставим в (2) значение интеграла ([1], формула 4.635.2) и применим неравенство Чебышева:

$$P\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k < \tau\right\} \leqslant \frac{(n\tau)^r L^n \varepsilon^{n-r}}{(n-r)\,\Gamma(n)} + \frac{(n\tau)^r}{\varepsilon^r (m-\tau_0)^{2r}} M\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - m\right)^{2r}. \tag{3}$$

Известно ([2], стр. 380), что

$$M\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - m\right)^{2r} \leqslant \frac{c_1}{n^r} \tag{4}$$

с некоторой постоянной c_1, от n не зависящей. Положим теперь c равным:

$$c = \max_{\{n>r\}} \frac{n^r L^n \varepsilon^{n-r}}{(n-r)\,\Gamma(n)} + \frac{c_1}{\varepsilon^r (m-\tau_0)^{2r}}.$$

Доказываемое неравенство следует теперь из (4) и (3). Теорема 1 доказана.

Следствие. При условиях теоремы 1 величина

$$\zeta_n = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)^{-1}$$

имеет конечные моменты порядка $s < r$, причем $M\zeta_n^s \leqslant c$, с постоянной c, от n не зависящей.

Доказательство. Действительно, положив $F_n(x) = P\{\zeta_n < x\}$ для момента порядка s имеем

$$M\zeta_n^s = \int_0^\infty x^s dF_n(x) = s\int_0^\infty x^{s-1}[1 - F_n(x)]\,dx =$$

$$= s \int_0^{\tau_0^{-1}} x^{s-1} [1 - F_n(x)]\, dx + s \int_{\tau_0^{-1}}^{\infty} x^{s-1} [1 - F_n(x)]\, dx \leqslant$$

$$\leqslant s \int_0^{\max(1, \tau_0^{-1})} x^{s-1} dx + cs \int_1^{\infty} x^{s-1} x^{-r} dx \leqslant \max(1, \tau_0^{-s}) + \frac{cs}{r-s}.$$

В силу закона больших чисел $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \xi_k \to m$ при $n \to \infty$ по вероятности. Отсюда и из утверждения следствия вытекает, что

$$M \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \xi_k \right)^{-s} \to m^{-s}, \; n \to \infty$$

([3], стр. 198).

В следующей теореме неравенство (1) доказывается при несколько иных предположениях, чем в теореме 1.

Теорема 2. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ — действительный стационарный марковский процесс, $f(x)$ — плотность распределения вероятностей ξ_1, $f(y/x)$ — условная плотность вероятности перехода. Предположим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)\, dx \leqslant L, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f^2(y/x)\, dy \leqslant L, \quad |x| < \infty.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют постоянные $c > 0$, $\tau_0 > 0$ такие, что

$$P \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2 < \tau \right\} \leqslant c\tau^{\left(\frac{1}{4} - \varepsilon\right) n}$$

при $\tau \leqslant \tau_0$, $n \geqslant 1$.

Доказательство. Положим

$$P_{n-1}(n\tau - x^2, x) = P \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2 < \tau / \xi_1 = x \right\}, \; x^2 \leqslant n\tau.$$

Так как $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — процесс марковский и стационарный, то

$$P_n \{(n+1)\tau - x^2, x\} =$$

$$= \int_{-\sqrt{(n+1)\tau - x^2}}^{\sqrt{(n+1)\tau - x^2}} f(y/x) P_{n-1} \{(n+1)\tau - x^2 - u^2, \; u\}\, du. \tag{5}$$

Покажем теперь с помощью метода математической индукции, что

$$P_{n-1}(n\tau - x^2, x) \leqslant L_1^{(n-1)} \frac{(n\tau - x^2)^{(n-1)/4}}{[(n-1)!]^{1/4}} \tag{6}$$

с некоторой постоянной L_1. Действительно,

$$P_1(2\tau - x^2, x) = P\{\xi_2^2 < 2\tau - x^2/\xi_1 = x\} =$$

$$= \int\limits_{-\sqrt{2\tau-x^2}}^{\sqrt{2\tau-x^2}} f(y/x)\,dy \leqslant \left\{ \int\limits_{-\sqrt{2\tau-x^2}}^{\sqrt{2\tau-x^2}} dy \int\limits_{-\sqrt{2\tau-x^2}}^{\sqrt{2\tau-x^2}} f^2(y/x)\,dy \right\}^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant (2L)^{1/2}(2\tau - x^2)^{1/4}.$$

Далее, если (6) справедливо, то из (5) получаем

$$P_n\{(n+1)\tau - x^2, x\} \leqslant \left\{ \int\limits_{-\sqrt{(n+1)\tau-x^2}}^{\sqrt{(n+1)\tau-x^2}} f^2(y/x)\,dy \right\}^{1/2} \times$$

$$\times \left\{ \int\limits_{-\sqrt{(n+1)\tau-x^2}}^{\sqrt{(n+1)\tau-x^2}} P_{n-1}^2\{(n+1)\tau - x^2 - y^2, y\}\,dy \right\}^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant L^{1/2}L_1^{n-1}[(n-1)!]^{-1/4}\left\{ 2\int\limits_0^{\sqrt{(n+1)\tau-x^2}} [(n+1)\tau - x^2 - y^2]^{(n-1)/2}\,dy \right\}^{1/2} =$$

$$= (2L)^{1/2}L_1^{n-1}[(n-1)!]^{-1/4}[(n+1)\tau - x^2]^{n/4}\left\{ \int\limits_0^1 (1-u^2)^{(n-1)/2}\,du \right\}^{1/2} =$$

$$= (2L)^{1/2}L_1^{n-1}[(n-1)!]^{-1/4}[(n+1)\tau - x^2]^{n/4}\left[\frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2}, \frac{n+1}{2} \right) \right]^{1/2}.$$

Так как

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{n+1}{2} \right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} \leqslant \frac{L_2}{\sqrt{n}}$$

с некоторой постоянной L_2, причем можно взять $L_2 \geqslant 2$, то

$$P_n\{(n+1)\tau - x^2, x\} \leqslant L_1^n (n!)^{-1/4}[(n+1)\tau - x^2)^{n/4},$$

если положить $L_1 = \sqrt{LL_2}$. Таким образом, неравенство (6) установлено. Из неравенства Коши и (6) теперь следует

$$P\left\{ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \xi_k^2 < \tau \right\} = \int\limits_{-\sqrt{n\tau}}^{\sqrt{n\tau}} f(x) P_{n-1}(n\tau - x^2, x)\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{L^{1/2}L_1^{n-1}}{[(n-1)!]^{1/4}}\left\{ 2\int\limits_0^{\sqrt{n\tau}} (n\tau - x^2)^{\frac{n-1}{2}}\,dx \right\}^{1/2} \leqslant c_1 \frac{(L_1 e^{1/4})^n}{n^{1/4}}\,\tau^{n/4}$$

с некоторой постоянной c_1. Пусть $\tau_0 = (L_1 e^{1/4})^{-1/\varepsilon}$, тогда

$$n^{-1/4}(L_1 e^{1/4})^n \tau^{\varepsilon n} \tau^{\left(\frac{1}{4} - \varepsilon\right)n} \leqslant n^{-1/4}\tau^{\left(\frac{1}{4} - \varepsilon\right)n}$$

при $\tau \leqslant \tau_0$, а следовательно,

$$P\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2 < \tau\right\} < c\tau^{\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)n}$$

с постоянной c, от n не зависящей. Теорема 2 доказана.

Аналогично теореме 2 доказывается следующая теорема.

Теорема 3. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ — действительный стационарный марковский процесс, $f(x)$ — плотность распределения вероятностей, $f(y/x)$ — условная плотность вероятности перехода. Предположим, что $f(x) \leqslant L$, $f(y/x) \leqslant L$ для всех x и y. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют постоянные $c > 0$ и $\tau_0 > 0$ такие, что

$$P\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2 < \tau\right\} \leqslant c\tau^{\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)n}$$

при $\tau \leqslant \tau_0$, $n \geqslant 1$.

При доказательстве теоремы 3 вместо неравенства (6) устанавливается неравенство

$$P_{n-1}(n\tau - x^2, x) \leqslant L_1^{n-1}(n\tau - x^2)^{(n-1)/2}[(n-1)!]^{-1/2},$$

остальные рассуждения остаются теми же.

О точности неравенства теоремы 3 дает представление пример независимых нормально распределенных случайных величин ξ_1, ξ_2, ... с $M\xi_1 = 0$, $M\xi_1^2 = 1$. В этом случае

$$P\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2 < \tau\right\} = 2^{-n/2}\Gamma^{-1}\left(\frac{n}{2}\right)\int_0^{n\tau} x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}dx =$$

$$= 2^{-n/2}\Gamma^{-1}\left(\frac{n}{2}\right)\int_0^{n} x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{\tau x}{2}}dx\,\tau^{\frac{n}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{-n/2}\Gamma^{-1}\left(\frac{n}{2}\right)n^{n/2}\frac{2}{n}\tau^{\frac{n}{2}} \leqslant c\tau^{\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)n}$$

при $\tau \leqslant \tau_0$, $\tau_0 > 0$.

Теорема 4. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ — действительный стационарный эргодический марковский процесс, не имеющий циклических подклассов и удовлетворяющий гипотезе Деблина. Предположим, что $f(x) \leqslant L$, $|x| \leqslant u$; $f(y/x) \leqslant L$, $|x| + |y| \leqslant u$ для некоторого $u > 0$, пусть $m = M\min(|\xi_1|^{2a}, 1)$, $a > 0$. Для любого $r > 0$ при $n > 2ar$ справедливо неравенство

$$P\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\min(|\xi_k|^{2a}, 1) < \tau\right\} < c\tau^r$$

при $\tau \leqslant \tau_0$; $\tau_0 < m$, а постоянная c от n не зависит.

Доказательство. Отметим, что $m > 0$, можно предположить, что $u < 1$. Сначала имеем ($t(\xi_k) = \min(|\xi_k|^{2a}, 1)$):

$$P\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}t(\xi_k) < \tau\right\} =$$

$$= \underset{\left\{\sum_{k=1}^{n} t(x_k) < n\tau\right\}}{\int \overset{n}{\cdots} \int} f(x_1) f(x_2/x_1) \ldots f(x_n/x_{n-1})\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n \leqslant$$

$$\leqslant \underset{\left\{\sum_{k=1}^{n} t(x_k) < n\tau\right\}}{\int \overset{n}{\cdots} \int} \left[\frac{n\tau}{\sum_{k=1}^{n} t(x_k)}\right]^r f(x_1) \ldots f(x_n/x_{n-1})\, dx_1 \ldots dx_n \leqslant$$

$$\leqslant \underset{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^{2a} < u}{\int \overset{n}{\cdots} \int} \left[\frac{n\tau}{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^{2a}}\right]^r f(x_1) \ldots f(x_n/x_{n-1})\, dx_1 \ldots dx_n +$$

$$+ (n\tau u^{-1})^r P\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} t(\xi_k) < \tau\right\} \leqslant$$

$$\leqslant (n\tau)^r L^n \underset{\left\{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^{2a} < u\right\}}{\int \overset{n}{\cdots} \int} \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^{2a}\right)^{-r} dx_1 \ldots dx_n +$$

$$+ (n\tau u^{-1})^r P\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} [t(\xi_k) - m] < -(m-\tau)\right\}. \tag{7}$$

Подставим теперь в правую часть (7) значение интеграла ([1], формула 4.636.2) и применим неравенство Чебышева:

$$P\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} t(\xi_k) < \tau\right\} \leqslant$$

$$\leqslant (n\tau)^r (2L)^n \Gamma^n\left(\frac{1}{2a}\right) u^{\frac{n}{2a}-r} (2a)^{-n+1} (n-2ar)^{-1} \Gamma^{-1}\left(\frac{n}{2a}\right) +$$

$$+ (n\tau u^{-1})^r (m-\tau_0)^{-2r} M\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} [t(\xi_k) - m]\right|^{2r} \tag{8}$$

при $n > 2ar$ и $\tau \leqslant \tau_0 < m$.

При условиях теоремы справедливо утверждение леммы Дж. Дуба ([4], гл. 5, лемма 7.4, стр. 205). Согласно лемме

$$M\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} [t(\xi_k) - m]\right|^{2r} \leqslant An^{-r}$$

с некоторой не зависящей от n постоянной A. Положим

$$c = \max_{\{n > 2ar\}} \frac{n^r \left[2L\Gamma\left(\frac{1}{2a}\right)\right]^n u^{\frac{n}{2a}-r}}{(2a)^{n-1}(n-2ar)\,\Gamma\left(\frac{n}{2a}\right)} + \frac{A}{u^r (m-\tau_0)^{2r}}.$$

Из неравенства (8) следует теорема 4.

Из теорем 2—4 вытекают следствия, аналогичные следствию теоремы 1. Например, в условиях теорем 2 или 3 для величины

$\zeta_n = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2\right)^{-1}$ существует момент любого порядка r, начин[ая]
с некоторого n, причем эти моменты равномерно ограничены по [n].

Доказанные теоремы могут быть использованы при доказател[ь]стве существования моментов определителей некоторых случайн[ых] матриц. Рассмотрим следующий пример. Пусть $\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2, \ldots, \vec{\eta}_n, \ldots$ [—] последовательность независимых одинаково распределенных сл[у]чайных векторов с m компонентами, X_n' матрица размера $m \times n$ [со] столбцами $\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2, \ldots, \vec{\eta}_n$. Квадратная матрица $\frac{1}{n} X_n' X_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\vec{\eta}_k\vec{\eta}_k'$ неотрицательно определена, пусть d_n — определитель $n^{-1}X_n'X_n$, $d_m(i)$ — определитель матрицы $\frac{1}{m}\sum_{k=mi+1}^{mi+m}\vec{\eta}_k\vec{\eta}_k'$.

Согласно неравенству Минковского ([5], стр. 156)

$$d_{km}^{1/m} \geqslant \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} d_m^{1/m}(i),$$

причем случайные величины $d_m^{1/m}(i)$ независимы и одинаково рас[пре]делены. Если плотность распределения вероятностей случайно[й] величины $d_m^{1/m}(0)$ ограничена в окрестности начала координат, то п[о] теореме 1, для любого $r > 0$, начиная с некоторого n, существуе[т]

$$Md_n^{-r} = M\left(\frac{1}{n}\det X_n'X_n\right)^{-r}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
2. Крамер Г. Математические методы статистики. М., ИЛ, 1948.
3. Лоэв М. Теория вероятностей. М., ИЛ, 1962.
4. Дуб Дж. Вероятностные процессы. М., ИЛ, 1956.
5. Маркус М., Минк Х. Обзор по теории матриц и матричных неравенств. М., «Наука», 1972.

A. Ya. Dorogovtsev

ON THE ESTIMATION OF THE PROBABILITY OF THE SMALL VALUES OF THE SUMS OF POSITIVE RANDOM VARIABLES

Summary

In the paper some inequalities similar to the inequality

$$P\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k < \tau\right\} < c\tau^r, \qquad \tau \leqslant \tau_0$$

for the positiv random variables $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ are present. From this inequality follows the existence and uniformly boundedness of certain moments of the variable

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)^{-1}.$$

Поступила в редколлегию 16.IV.1972