А. Я. ДОРОГОВЦЕВ, доц., Ю. В. КАРТАШЕВ, асс.
Киевский университет

ОБ ОЦЕНКЕ СРЕДНЕГО ЗНАЧЕНИЯ СТАЦИОНАРНОГО ПРОЦЕССА ПРИ ЗАДАННОЙ ДЛИТЕЛЬНОСТИ ВРЕМЕНИ НАБЛЮДЕНИЯ. II

В [1] рассматривалась задача об оценке среднего значения стационарного процесса $\xi(t)$ по реализации, наблюдаемой только на определенной части интервала времени, в течение которого процесс доступен наблюдению. Было показано, что в классе несмещенных оценок вида

$$\frac{1}{C}\int_0^T \xi(t)\, g(t)\, dt \tag{1}$$

с функцией $g(t)$, удовлетворяющей условиям $0 \leqslant g(t) \leqslant 1$, $0 < \int_0^T g(t)\, dt = C$, $C < T$ (C, T — фиксированы), наименьшую дисперсию имеет оценка, для которой функция $g(t)$ есть характеристическая функция некоторой определенной системы интервалов на $[0, T]$ с общей длиной C. При любом C эта оценка с наименьшей дисперсией имеет дисперсию не большую, чем дисперсия оценки $\frac{1}{T}\int_0^T \xi(t)\, dt$, которая использует наблюдения процесса на всем интервале $[0, T]$.

Класс оценок вида (1) не всегда является естественным. Например, при $C = T$ несмещенная линейная оценка среднего значения с минимальной дисперсией не имеет вида (1) уже в простейших случаях. В настоящей заметке рассматривается вопрос об использовании более широкого класса несмещенных оценок.

1. Основная теорема. Пусть $\xi(t)$ — действительный стационарный в широком смысле процесс с неизвестным математическим ожиданием m и заданной непрерывной корреляционной функцией $r(t)$. В качестве интервала, на котором можно наблюдать процесс $\xi(t)$, будем рассматривать интервал $[0, 1]$. Для оценки среднего m по наблюдениям процесса $\xi(t)$ будем использовать несмещенные оценки вида

$$\frac{1}{C}\int_0^1 \xi(t)\, dF(t), \tag{2}$$

где $F(t)$ — монотонно неубывающая функция с $\int\limits_0^s dF(t) = C$. Числ[о]
$C \geqslant C_0$, $C_0 < 1$ фиксировано.

Оценки вида (2) естественно рассматривать для стационарных процессов со спектральной плотностью — отношением двух многочленов с разностью степеней 2.

Дисперсия оценки (2) равна $C^{-2}\,\Delta(F, F)$, где

$$\Delta(F,G) = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 r(t-s)\, dF(t)\, dG(s).$$

С помощью теоремы Хелли легко установить, что при фиксированном C существует неубывающая функция $F_0(t)$ с $\int\limits_0^1 dF_0(t) = C$, которая минимизирует функционал $\Delta(F, F)$. Аналогично, минимум функционала $\Delta(F, F)$ достигается, если ограничиться неубывающими функциями $F(t)$ с $\int\limits_0^1 dF(t) = C$ и фиксированным множеством точек роста на отрезке $[0, 1]$, например, состоящим из конечного набора интервалов, или функциями, множество точек роста которых состоит не более чем из n (фиксированное число) интервалов общей длины C_0.

Предположим, что число C фиксировано. Функцию $H(t)$ ограниченной вариации на $[0, 1]$ назовем допустимой для функции $F(t)$, если функция $F(t) + \varepsilon H(t)$ монотонно неубывающая на $[0, 1]$ при каждом $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$ и $\int\limits_0^1 dH(t) = 0$. Допустимые функции существуют.

Лемма. Пусть $F_0(t)$ — функция, минимизирующая функционал $\Delta(F, F)$, F—монотонно не убывает и $\int\limits_0^1 dF(t) = C$. Тогда

$$\Delta(F_0, H) \geqslant 0 \tag{3}$$

для каждой допустимой для F_0 функции H.

Доказательство леммы следует из того, что

$$\Delta(F_0 + \varepsilon H, F_0 + \varepsilon H) \geqslant \Delta(F_0, F_0)$$

и

$$\Delta(F_0 + \varepsilon H, F_0 + \varepsilon H) = \Delta(F_0, F_0) + 2\varepsilon\Delta(F_0, H) + \varepsilon^2\Delta(H, H).$$

Пусть $F_0(t)$ — функция, минимизирующая $\Delta(F, F)$, $\Delta_0 = \Delta(F_0, F_0)$, E — множество точек роста функции $F_0(t)$ и

$$\rho(t) = \int\limits_0^1 r(t-s)\, dF_0(s);$$

множество E замкнуто, а функция $\rho(t)$ непрерывна.

Теорема. Если функция $F_0(t)$ минимизирует функционал $\Delta(F, F)$, то

$$\rho(t) = \int_0^1 r(t-s)\, dF_0(t) = \Delta_0 C^{-1}, \quad t \in E \tag{4}$$

и

$$\rho(t) = \int_0^1 r(t-s)\, dF_0(t) \geqslant \Delta_0 C^{-1}, \quad t \bar{\in} E. \tag{5}$$

Доказательство. Пусть $t_0 \in E$, а τ — произвольная точка отрезка $[0, 1]$, отличная от t_0. Допустим, что $\rho(t_0) > \rho(\tau)$. Пусть $V(t_0)$ — окрестность точки t_0 такая, что

$$\tau \notin V(t_0), \; F_0(V(t_0)) > 0 \; (F_0(V(t_0)) = F_0(t_0+\delta) - F_0(t_0-\delta),$$

если $V(t_0) = (t_0 - \delta, t_0 + \delta))$ и $|\rho(t') - \rho(t'')| < \dfrac{\rho(t_0) - \rho(\tau)}{2} = \alpha$ при $t', t'' \in V(t_0)$. Определим функцию $H(t)$ следующим образом:

$$H(t_2) - H(t_1) = F_0(V(t_0))\delta_{\tau,(t_1,t_2]} - F_0(V(t_0) \cap [t_1, t_2]),$$

$$F_0(\varnothing) = 0, \quad \delta_{\tau,(t_1,t_2]} = \begin{cases} 0, & \tau \notin (t_2, t_2] \\ 1, & \tau \in (t_1, t_2]. \end{cases}$$

Очевидно, функция $H(t)$ допустима для $F_0(t)$. Для величины $\Delta(F_0, H)$ имеем

$$\Delta(F_0, H) = \int_0^1 \int_0^1 r(t-s)\, dF_0(t)\, dH(s) = \int_0^1 \rho(t)\, dH(t) = \rho(\tau) F_0(V(t_0)) -$$

$$- \int_{V(t_0)} \rho(t)\, dF_0(t) \leqslant \rho(\tau) F_0(V(t_0)) - [\rho(t_0) - \alpha] F_0(V(t_0)) =$$

$$= -\alpha F_0(V(t_0)) < 0.$$

Таким образом, предположение о том, что $\rho(t_0) > \rho(\tau)$ приводит к противоречию с утверждением леммы, согласно которому $\Delta(F_0, H) \geqslant 0$ для всякой допустимой для F_0 функции H. Поэтому $\rho(t_0) \leqslant \rho(\tau)$. Отсюда следует, что функция $\rho(t)$ принимает постоянное значение $\tilde{C}$ в точках множества E и $\rho(t) \geqslant \tilde{C}$ при $t \notin E$. Для определения $\tilde{C}$ рассмотрим величину

$$\Delta_0 = \Delta(F_0, F_0) = \int_0^1 \rho(t)\, dF_0(t) = \tilde{C} \int_0^1 dF_0(t) = \tilde{C}C,$$

откуда $\tilde{C} = \Delta_0 C^{-1}$. Теорема доказана.

Замечание 1. Доказательство теоремы аналогично рассуждениям, используемым при определении распределений масс с экстремальными значениями интеграла энергии [2].

Замечание 2. При рассмотрении функций $F(t)$ с фиксирован... множеством точек роста E, например, состоящим из конечного ч... ра интервалов, для функции F_0, минимизирующей $\Delta(F, F)$, очеви... сохраняется утверждение (4).

Замечание 3. Из леммы следует, что для любой монотонно не... вающей функции $F(t)$ с $\int\limits_0^1 dF(t) = C$ справедливо неравенство

$$\Delta(F_0, F) \geqslant \Delta(F_0, F_0).$$

Действительно, функция $F - F_0$ допустима для F_0 и

$$\Delta(F_0, F) = \Delta(F_0, F_0 + F - F_0) = \Delta(F_0, F_0) + \Delta(F_0, F - F_0).$$

Следовательно, функция F_0 минимизирует линейный функци... $\Delta(F_0, F)$ относительно F

$$\Delta(F_0, F) = \int\limits_0^1 \rho(t)\, dF(t).$$

Рассмотрение этого функционала также легко приводит к утвер... ниям (4) и (5) теоремы.

Из теоремы вытекает, что следует рассматривать только те фу... ции F, для которых множество $\{t : \rho(t) = \min\limits_{0 \leqslant \tau \leqslant 1} \rho(\tau)\}$ содержит м... жество точек роста F; $\rho(t) = \int\limits_0^1 r(t - s)\, dF(s)$.

Если процесс $\xi(t)$ имеет положительную спектральную пл... ность, то функция $F_0(t)$, минимизирующая функционал $\Delta(F, ...$ определяется единственным образом. Действительно, если F_0 и... две функции, для которых $\Delta_0 = \Delta(F_0, F_0) = \Delta(F_1, F_1) = \min\limits_F \Delta(F, ...$ то

$$\Delta_0 = \Delta(F_0, F_0) = \Delta(F_1 + (F_0 - F_1),\ F_1 + (F_0 - F_1)) = \Delta(F_1, F_1) + 2\Delta(F_1, F_0 - F_1) + \Delta(F_0 - F_1, F_0 - F_1).$$

Отсюда

$$\Delta(F_0 - F_1, F_0 - F_1) = -2\Delta(F_1, F_0 - F_1),$$

а так как функция $F_0 - F_1$ допустима для F_1, то

$$\Delta(F_1, F_0 - F_1) \geqslant 0,$$

поэтому неотрицательная величина $\Delta(F_0 - F_1, F_0 - F_1)$ равна... Пусть $f(\lambda)$ — спектральная плотность процесса $\xi(t)$. Имеем

$$0 = \Delta(F_0 - F_1, F_0 - F_1) = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 r(t - s)\, d[F_0(t) - F_1(t)]\, d[F_0(s) - F_1(s)] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| \int\limits_0^1 e^{i\lambda t} dF_0(t) - \int\limits_0^1 e^{i\lambda t} dF_1(t) \right|^2 f(\lambda)\, d\lambda.$$

Из этого равенства при предположении, что функции F_0 и F_1 например, непрерывны слева, вытекает утверждение о единственности.

2. Примеры. Доказания в п. 1 теорема дает некоторые указания для решения задачи, упомянутой в начале заметки. Рассмотрим процесс с корреляционной функцией $r(t) = e^{-\beta|t|}$, $\beta > 0$. Предположим, что процесс $\xi(t)$ может наблюдаться в течение времени $C_0 < 1$ и доступен наблюдению на интервале $[0, 1]$. Допустим, что процесс $\xi(t)$ наблюдается на n интервалах

$[u_k\, v_k]$, $k = 1, 2, \ldots; n$, $0 \leqslant u_1 < v_1 < u_2 < \cdots < u_n < v_n \leqslant 1$

с общей длиной C_0. Множество точек роста функций $F(t)$ состоит из интервалов $[u_k, v_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$, а функция $\rho(t) = \int_0^1 r(t-s)\, dF(s)$ имеет вид

$$\rho(t) = \sum_{k=1}^{n} \int_{u_k}^{v_k} r(t-s)\, dF(s).$$

Можно показать [3], что функция $\rho(t)$ может быть постоянной на $[u_k, v_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$ только в том случае, когда функция $F(t)$ имеет производную в каждом из интервалов (u_k, v_k), равную одной постоянной на всех интервалах (далее предположим, что $F'(t) = 1$, $t \in (u_k, v_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$). Таким образом, функция $\rho(t)$ должна иметь вид

$$\rho(t) = \sum_{k=1}^{n} \int_{u_k}^{v_k} r(t-s)\, ds + \sum_{k=1}^{n} [r(t-u_k)\, p_k + r(t-v_k)\, q_k], \tag{6}$$

p_k и q_k — неотрицательные числа — скачки функции $F(t)$ в точках u_k и v_k, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Элементарные рассуждения показывают, что функция $\rho(t)$ вида (6) удовлетворяет соотношению (4) с $E = \bigcup_{k=1}^{n} [u_k, v_k]$ в том и только в том случае, если числа u_k, v_k, p_k и q_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{gathered}
(\beta p_1 - 1)\, e^{\beta u_1} = 0, \\
\sum_{j=1}^{k-1} [(\beta p_j - 1)\, e^{\beta u_j} + (\beta q_j + 1)\, e^{\beta v_j}] + (\beta p_k - 1)\, e^{\beta u_k} = 0, \qquad k = \overline{2, n}, \\
\sum_{j=k+1}^{n} [(\beta p_j + 1)\, e^{-\beta u_j} + (\beta q_j - 1)\, e^{-\beta v_j}] + (\beta q_k - 1)\, e^{-\beta v_k} = 0, \\
k = \overline{1, n-1}, \\
(\beta q_n - 1)\, e^{-\beta v_n} = 0.
\end{gathered} \tag{7}$$

При таком выборе чисел u_k, v_k, p_k и q_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ функ[ция]
$\rho(t) = \frac{2}{\beta}$ при $t \in E$, а дисперсия соответствующей оценки рав[на]

$$\frac{1}{C^2}\int_0^1 \rho(t)\,dF(t) = \frac{2}{\beta C},$$

$$C = \sum_{k=1}^{n}(v_k - u_k) + \sum_{k=1}^{n}(p_k + q_k) = C_0 + \sum_{k=1}^{n}(p_k + q_k).$$

Из уравнений (7) легко следуют соотношения

$$p_1 = q_n = \frac{1}{\beta}, \quad q_k = p_{k+1}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1,$$

$$e^{\beta(u_{k+1} - v_k)} = \frac{1 + \beta p_{k+1}}{1 - \beta p_{k+1}}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Для того чтобы получить оценку с наименьшей дисперсией, след[у]ет взять C наибольшим. Величина C будет наибольшей, если $u_1 = $[…]
$v_n = 1$ и

$$p_k = \frac{\theta_n}{\beta}, \qquad k = 2, \ldots, n;$$

$$\theta_n = \frac{\exp\left\{\beta\,\frac{1 - C_0}{n-1}\right\} - 1}{\exp\left\{\beta\,\frac{1 - C_0}{n-1}\right\} + 1} = \operatorname{th}\frac{\beta(1 - C_0)}{2(n-1)},$$

$$u_{k+1} - v_k = \frac{1 - C_0}{n-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Таким образом, если предположить, что возможное время наблю[]дения $C_0 < 1$ состоит из n интервалов, то наименьшую дисперси[ю]

$$\frac{2}{\beta\left[C_0 + \frac{2}{\beta} + \frac{2(n-1)}{\beta}\theta_n\right]} \tag{8}$$

имеет оценка

$$\left\{C_0 + \frac{2}{\beta} + \frac{2(n-1)}{\beta}\theta_n\right\}^{-1}\left\{\frac{\xi(0) + \xi(1)}{\beta} + \xi(v_1)\frac{\theta_n}{\beta} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=2}^{n-1}[\xi(u_k) + \xi(v_k)]\frac{\theta_n}{\beta} + \xi(u_n)\frac{\theta_n}{\beta} + \sum_{k=1}^{n}\int_{u_k}^{v_k}\xi(t)\,dt\right\}. \tag{9}$$

Легко проверить, что оценка (9) при $n \to \infty$ сходится (с вероят[]ностью 1, если траектории процесса $\xi(t)$, например, непрерывн[ы] с вероятностью 1) к

$$\frac{\xi(0) + \xi(1) + \beta\int_0^1 \xi(t)\,dt}{2 + \beta}. \tag{10}$$

Как известно [4], оценка (10) является наилучшей линейной несмещенной оценкой среднего значения процесса $\xi(t)$ по наблюдениям процесса на всем интервале [0, 1]. Следует отметить также, что дисперсия оценки (9) монотонно убывает с ростом n и

$$\frac{2}{\beta\left[C_0+\frac{2}{\beta}+\frac{2(n-1)}{\beta}\theta_n\right]}=\frac{2}{2+\beta C_0+\beta(1-C_0)\frac{\operatorname{th}x_n}{x_n}}=$$

$$=\frac{2}{2+\beta}+\frac{(1-C_0)^3\beta^3}{6(2+\beta)^2}\frac{1}{(n-1)^2}+O\left(\frac{1}{(n-1)^4}\right),$$

$$x_n=\frac{\beta(1-C_0)}{2(n-1)}.$$

Величина $\frac{2}{2+\beta}$ есть дисперсия оценки (10).

Следовательно, в рассматриваемом примере при любом $C_0>0$, используя определенную систему наблюдения, можно получить оценку с дисперсией, сколь угодно мало отличающейся от дисперсии наилучшей линейной оценки (10).

Для процесса $\xi(t)$ с корреляционной функцией $r(t)=e^{-\beta|t|}\cos\omega t$ можно провести аналогичные (хотя и более громоздкие) рассуждения. Предположим, что используются наблюдения процесса на интервалах $[u_k, v_k]$, $k=1, 2, \ldots, n$ с общей длиной C_0. Можно показать [3], что функция $\rho(t)$ может быть постоянной на интервалах (u_k, v_k), $k=1, 2, \ldots, n$ в этом случае только тогда, когда $F(t)$ — функция вида

$$\rho(t)=\sum_{k=1}^{n}\int_{u_k}^{v_k}\left[a_k\operatorname{ch}\alpha\left(s-\frac{1}{2}\right)+1\right]r(t-s)\,ds+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}[r(t-u_k)p_k+r(t-v_k)q_k],\ \ \alpha=\sqrt{\beta^2+\omega^2}.$$

Функция $\rho(t)$ такого вида удовлетворяет (4), если числа u_k, v_k, a_k, p_k, q_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ удовлетворяют уравнениям

$$a_re^{iz\Delta_r}\left[i\alpha\operatorname{sh}\alpha\left(v_r-\frac{1}{2}\right)-z\operatorname{ch}\alpha\left(v_r-\frac{1}{2}\right)\right]-$$

$$-a_{r+1}\left[i\alpha\operatorname{sh}\alpha\left(u_{r+1}-\frac{1}{2}\right)-z\operatorname{ch}\alpha\left(u_{r+1}-\frac{1}{2}\right)\right]=$$

$$=2\omega e^{iz\Delta_r}-2\omega-2\omega izq_re^{iz\Delta_r}-2\omega izp_{r+1},$$

$$a_re^{-iz\Delta_r}\left[i\alpha\operatorname{sh}\alpha\left(v_r-\frac{1}{2}\right)+z\operatorname{ch}\alpha\left(v_r-\frac{1}{2}\right)\right]-$$

$$-a_{r+1}\left[i\alpha\operatorname{sh}\alpha\left(u_{r+1}-\frac{1}{2}\right)+z\operatorname{ch}\alpha\left(u_{r+1}-\frac{1}{2}\right)\right]=$$

$$=-2\omega e^{-iz\Delta_r}+2\omega-2\omega izq_re^{-iz\Delta_r}-2\omega izp_{r+1},$$

$$1\leqslant r\leqslant n-1,\ \ z=\omega+i\beta,\ \ \Delta_r=u_{r+1}-v_r.$$

При $u_1 = 0$, $v_n = 1$

$$a_1 = a_n = -\frac{2\omega^2}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta\,\mathrm{sh}\,\frac{\alpha}{2} + \alpha\,\mathrm{ch}\,\frac{\alpha}{2}},$$

$$p_1 = q_n = \frac{1}{\alpha}\,\frac{\alpha\,\mathrm{sh}\,\frac{\alpha}{2} + \beta\,\mathrm{ch}\,\frac{\alpha}{2}}{\beta\,\mathrm{sh}\,\frac{\alpha}{2} + \alpha\,\mathrm{ch}\,\frac{\alpha}{2}}.$$

Дисперсия оценки $\sum_{k=1}^{n}\int_{u_k}^{v_k}\left[a_k\,\mathrm{ch}\,\alpha\left(s-\frac{1}{2}\right)+1\right]\xi(s)\,ds + \sum_{k=1}^{n}\left[\xi(u_k)\,\times\right.$ $\times\, p_k + \xi(v_k)\,q_k]$ равна

$$2\beta\alpha^{-2}\left\{C_0 + \sum_{k=1}^{n}(p_k+q_k) + \frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{n}a_k\left[\mathrm{sh}\,\alpha\left(v_k-\frac{1}{2}\right) - \mathrm{sh}\,\alpha\left(u_k-\frac{1}{2}\right)\right]\right\}^{-1}. \quad (1$$

При предположении, что $\Delta_r = \Delta$, $v_k - u_k = \gamma$, т. е. когда пр пуски одинаковы и интервалы наблюдения одинаковы, предел вел чины (11) оказывается равным

$$\frac{2\beta}{\alpha}\cdot\frac{\beta\,\mathrm{sh}\,\frac{\alpha}{2} + \alpha\,\mathrm{ch}\,\frac{\alpha}{2}}{\left(\alpha\beta + 2\alpha - \frac{4\omega^2}{\alpha}\right)\mathrm{sh}\,\frac{\alpha}{2} + (\alpha^2+2\beta)\,\mathrm{ch}\,\frac{\alpha}{2}}. \quad (1$$

При $\omega = \beta$, т. е. при $\beta = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}$ величина (12) совпадает с известно в этом случае [5] дисперсией наилучшей линейной несмещенной оце ки среднего по наблюдениям процесса на всем интервале [0, 1].

Аналогично предыдущему может быть рассмотрен пример пр цесса, спектральная плотность которого есть функция вида $|P(i\lambda)|$ ($P(x)$ — многочлен от x). При этом вместо оценок, использующ средние значения процесса по интервалам $[u_k, v_k]$ и значения на ко цах, нужно рассматривать оценки, использующие кроме того, зн чения существующих производных процесса на концах [3, 4] инте валов наблюдения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дороговцев А. Я., Карташев Ю. В. Об оценке среднего зн чения стационарного процесса при заданном времени наблюдения.— Теория вер ятностей и матем. стат., вып. 8, 1973.

2. Goran Bjorck. Distributions of positive mass, which maximize a ce tain generalized energy integral.— Arkiv for Matematic, 3, nr. 21, 1956.

3. Дороговцев А. Я. Статистические проблемы для одного класса нестационарных случайных процессов. Канд. дисс., Киев, 1962.
4. Гренандер У. Случайные процессы и статистические выводы. М., ИЛ, 1961.
5. Яглом А. М. Экстраполирование, интерполирование и фильтрация стационарных случайных процессов с рациональной спектральной плотностью.— Труды Московского мат. об-ва, 1955, т. 4.

A. Ya. Dorogovtsev, Yu. V. Kartashev

ON ESTIMATION OF MEAN VALUE OF STATIONARY PROCESS WITH GIVEN DURATION OF TIME OBSERVATION

Summary

A possibility of application of linear unbiased estimation $c^{-1}\int_0^1 \xi(t)\,dF(t)$ for mean of stationary process $\xi(t)$ is considered when process $\xi(t)$ is observed only on the subset of the interval [0, 1] with given length.

Поступила в редколлегию 14. IV 1972.