И. И. ЕЖОВ, проф., ХОАНГ ШУМ, асп.
*Киевский университет*

# ПРОЦЕССЫ МАКСИМИЗАЦИИ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

**1.** Пусть $R^{(1)}$ — вещественная прямая. Случайную последо
тельность $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n, \ldots$ со значениями в $R^{(1)}$ назовем ***про***
***сом максимизации*** (ПМ) с дискретным временем, если:

а) $\{\zeta_n\}$ — цепь Маркова,

б) $P\{\zeta_{n-1} \leqslant \zeta_n;\ n = 1, 2, \ldots\} = 1$;

в) при $x \leqslant z$ переходная вероятность

$$P\{\zeta_n \in [x, z]/\zeta_{n-1} = x\} = Q_n(z) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

не зависит от $x$.

Из (1) следует, что $Q_n(z)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ монотонно не убы
по $z$ и

$$\lim_{z\to+\infty} Q_n(z) = 1 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Положим

$$\lim_{z\to-\infty} Q_n(z) = \alpha_n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Очевидно, что пределы (3) существуют и $0 \leqslant \alpha_n \leqslant 1$ $(n = 1, 2, \ldots$

Пусть $\xi_n$ $(n \geqslant 1)$ — «обобщенная» случайная величина с расп
делением

$$P\{\xi_n = -\infty\} = \alpha_n,$$

$$P\{-\infty < \xi_n \leqslant z\} = Q_n(z) - \alpha_n \qquad (z > -\infty),$$

или, что то же самое,

$$P\{-\infty \leqslant \xi_n \leqslant z\} = Q_n(z) \qquad (n = 1, 2, \ldots), \quad z \in [-\infty, +\infty).$$

Предположим, что «обобщенные» величины

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \ldots$$

с распределениями (4) независимы в совокупности. Покажем,
если

$$\eta_0 = \zeta_0,$$

$$\eta_n = \max\{\zeta_0, \xi_1, \ldots, \xi_n\} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

и $\zeta_0$ не зависит от $\{\xi_n\}$, то случайная последовательность $\{\eta$
$n \geqslant 0\}$ стохастически эквивалентна ПМ $\{\zeta_n, n \geqslant 0\}$.

Так как, по определению,

$$P\{\eta_0 = \zeta_0\} = 1,$$

то достаточно убедиться, что $\{\eta_n\}$ удовлетворяет условиям а) — в), определяющим процесс максимизации.

Условие а) следует из того, что

$$\eta_n = \max\{\eta_{n-1}, \xi_n\} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

и из независимости $\xi_n$ от $\zeta_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$; б) очевидно. Докажем условие в), если $-\infty \leqslant x \leqslant z < +\infty$, то

$$P\{\eta_n \in [x, z]/\eta_{n-1} = x\} = P\{x \leqslant \max\{\eta_{n-1}, \xi_n\} \leqslant z/\eta_{n-1} = x\} =$$
$$= P\{x \leqslant \max\{x, \xi_n\} \leqslant z\} = P\{\xi_n \leqslant z\} = Q_n(z) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Положим для $m \geqslant n$

$$P\{\zeta_m \in [x, z]/\zeta_{n-1} = x\} = Q^{[n,m]}(x, z) \quad (z \geqslant x).$$

Из стохастической эквивалентности $\{\zeta_n\}$, $\{\eta_n\}$ следует

$$Q^{[n,m]}(x, z) = P\{\max\{\zeta_0, \xi_1, \ldots, \xi_m\} \in [x, z]/\max\{\zeta_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}\} =$$
$$= x\} = P\{\max\{x, \xi_n, \ldots, \xi_m\} \in [x, z]\} = P\{\max\{\xi_n, \ldots, \xi_m\} \leqslant z\} =$$
$$= P\{\xi_n \leqslant z, \ldots, \xi_m \leqslant z\} = \prod_{k=n}^{m} Q_k(z).$$

Итак, если $m \geqslant n$ и $z \geqslant x$, то

$$P\{\zeta_m \in [x, z]/\zeta_{n-1} = x\} = \prod_{k=n}^{m} Q_k(z). \tag{7}$$

Если для всех $n$ $Q_n(z) = Q(z)$, то $\{\zeta_n\}$ называется *однородным процессом максимизации* (ОПМ) с дискретным временем. Для ОПМ

$$P\{\zeta_m \in [x, z]/\zeta_0 = x\} = Q^m(z) \qquad (m = 0, 1, \ldots; \quad z \geqslant x). \tag{8}$$

2. Приведем примеры построения ПМ с дискретным временем. Пусть $x_t$ — однородная цепь Маркова с непрерывным временем, значениями которой являются целые числа. Предположим, что

$$P\{x_{t+0} - x_{t-0} < 2, \ t > 0\} = 1. \tag{9}$$

Иначе говоря, считаем, что траектории $x_t$ с вероятностью 1 не имеют положительных скачков, отличных от 1. Через $\tau_k^r$ $(r \geqslant k)$ обозначим то время, за которое $x_t$, выходя из $k$, впервые попадает в $r$ (если $x_0 = k$ и $x_t \neq r$ для всех $t > 0$, то, по определению, $\tau_k^r = \infty$). Пусть $x_{t_0} = k$ и $r > k$. Траекторию $x_t$ на интервале $(t_0, \ t_0 + \tau_k^r)$ будем обозначать

$$x(u; \quad t_0 < u < t_0 + \tau_k^r). \tag{10}$$

В силу (9), траектория (10) «склеена» из траекторий

$$x\left(u; \ t_0 + \sum_{i=k}^{e-1} \tau_i^{i+1} < u < t_0 + \sum_{i=k}^{e} \tau_i^{i+1}\right), \ k \leqslant e < r, \tag{11}$$

что символически будем обозначать так

$$x(u;\ t_0 < u < t_0 + \tau_k^r) = x(u;\ t_0 < u < t_0 + \tau_k^{k+1}) \oplus$$
$$\oplus\, x(u;\ t_0 + \tau_k^{k+1} < u < t_0 + \tau_k^{k+1} + \tau_{k+1}^{k+2}) \oplus \cdots \oplus$$
$$\oplus\, x(u;\ t_0 + \tau_k^{k+1} + \cdots + \tau_{r-2}^{r-1} < u < t_0 + \tau_k^{k+1} + \cdots + \tau_{r-1}^r). \tag{11'}$$

Пусть $x_0 = k$. Положим

$$x_k^r(\cdot) = x(u;\ 0 < u < \tau_k^r).$$

Так как $x_t$ — однородная цепь Маркова, то траектории (11) независимы в совокупности и имеют распределения, совпадающие с распределениями

$$x_k^{k+1}(\cdot),\ x_{k+1}^{k+2}(\cdot),\ \ldots,\ x_{r-1}^r(\cdot).$$

Пусть $L$ — функционал на $x(u;\ t_0 < u < t_0 + \tau_k^r)$, обладающий тем свойством, что для $k < k' < r$

$$L[x(u;\ t_0 < u < t_0 + \tau_k^r)] =$$
$$= \max\{L[x(u;\ t_0 < u < t_0 + \tau_k^{k'})],\ L[x(u;\ t_0 + \tau_k^{k'} < u < t_0 + \tau_k^r)]\}. \tag{12}$$

Положим

$$\zeta_n = L[x_0^n(\cdot)], \quad n \geqslant 0,$$

$\{\zeta_n\}$ — ПМ, ибо из (12) следует, что если

$$\eta_n = \max\{L[x_0^1(\cdot)],\ L[x_1^2(\cdot)],\ \ldots,\ L[x_{n-1}^n(\cdot)]\},$$

где случайные величины в фигурных скобках независимы, то $\{\zeta_n\}$ и $\{\eta_n\}$ стохастически эквивалентны.

**3.** Рассмотрим конкретные функционалы $L$, удовлетворяющие (12).

1. Если $0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_n = \tau_k^r$ — моменты скачков траектории $x_k^r(\cdot)$, то положим

$$L[x_k^r(\cdot)] = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} (\tau_j - \tau_{j-1}), \tag{13}$$

т. е. $L[x_k^r(\cdot)]$ — максимальное расстояние (на временной оси) между двумя последовательными скачками траектории $x_k^r(\cdot)$. Рассмотрим подробно два случая. а) $x_t$ имеет «задерживающий экран» в 0. Это значит, что если

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} P\{x_{t+\Delta} = k / x_t = j\} = q_{jk} \qquad (j \neq k),$$

то $q_{0r} = 0$ при $r < 0$. Пусть

$$q_j = \sum_{k \neq j} q_{jk}.$$

Согласно (9),

$$q_0 = q_{01}, \ q_j = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{j+1} q_{jk} \qquad (j \geqslant 1).$$

По формуле полной вероятности

$$P\{L[x_0^1(\cdot)] \leqslant z\} = 1 - e^{-q_0 z},$$

$$P\{L[x_j^{j+1}(\cdot)] \leqslant z\} = (1 - e^{-q_j z})\left[\frac{q_{j,j+1}}{q_j} + \sum_{k=0}^{j-1} \frac{q_{jk}}{q_j} P\{L[x_k^{j+1}(\cdot)] \leqslant z\}\right]. \tag{14}$$

Так как

$$P\{L[x_k^{j+1}(\cdot)] \leqslant z\} = \prod_{i=k}^{j} P\{L[x_i^{i+1}(\cdot)] \leqslant z\},$$

то (14) принимает вид

$$P\{L[x_0^1(\cdot)] \leqslant z\} = 1 - e^{-q_0 z},$$

$$P\{L[x_j^{j+1}(\cdot)] \leqslant z\} = (1 - e^{-q_j z})\frac{q_{j,j+1}}{q_j} + (1 - e^{-q_j z}) P\{L[x_j^{j+1}(\cdot)] \leqslant z\} \times \tag{14'}$$

$$\times \sum_{k=0}^{j-1} \frac{q_{jk}}{q_j} \prod_{i=k}^{j-1} P\{L[x_i^{i+1}(\cdot)] \leqslant z\} \qquad (j \geqslant 1).$$

Выражение (14′) позволяет рекуррентно определить все $P\{L[x_j^{j+1}(\cdot)] \leqslant z\}$:

$$P\{L[x_0^1(\cdot)] \leqslant z\} = 1 - e^{-q_0 z},$$

$$P\{L[x_j^{j+1}(\cdot)] \leqslant z\} = \frac{q_{j,j+1}(1 - e^{-q_j z})}{q_j - (1 - e^{-q_j z}) \sum\limits_{k=0}^{j-1} q_{jk} \prod\limits_{i=k}^{j-1} P\{L[x_i^{i+1}(\cdot)] \leqslant z\}} \tag{15}$$

$$(j \geqslant 1).$$

Соотношения (15) нетрудно обобщить на случай, когда $x_t$ — полумарковский процесс со значениями в $\{0, 1, \ldots\}$, не имеющий положительных скачков, больших единицы. Пусть

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_n < \cdots$$

последовательные моменты скачков $x_t$ и $x_{\tau_n + 0} = \overset{*}{x}_n$. Положим

$$P\{\overset{*}{x}_n = j, \ \tau_n - \tau_{n-1} \leqslant z / \overset{*}{x}_{n-1} = k\} = F_{kj}(z).$$

Ясно, что

$$F_k(z) = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{k+1} F_{kj}(z) \qquad (k \geqslant 0)$$

функция распределения, характеризующая время пребывания в состоянии $k$. Ясно, что

$$P\{L[x_0^1(\cdot)] \leqslant z\} = F_{01}(z).$$

Если $j > 0$, то по формуле полной вероятности

$$P\{L[x_j^{j+1}(\cdot)] \leqslant z\} = F_{j,j+1}(z) + \sum_{k=0}^{j-1} F_{jk}(z) P\{L[x_k^{j+1}(\cdot)] \leqslant z\} =$$

$$= F_{j,j+1}(z) + P\{L[x_j^{j+1}(\cdot)] \leqslant z\} \sum_{k=0}^{j-1} F_{jk}(z) \prod_{i=k}^{j-1} P\{L[x_i^{i+1}(\cdot)] \leqslant z\}$$

или

$$P\{L[x_0^1(\cdot)] \leqslant z\} = F_{01}(z),$$

$$P\{L[x_j^{j+1}(\cdot)] \leqslant z\} = \frac{F_{j,j+1}(z)}{1 - \sum_{k=0}^{j-1} F_{jk}(z) \prod_{i=k}^{j-1} P\{L[x_i^{i+1}(\cdot)] \leqslant z\}}, \quad (16)$$

$$j > 0.$$

Если

$$F_{jk}(z) = (1 - e^{-q_j z}) \frac{q_{jk}}{q_j} \qquad (j = 0, 1, \ldots; \ k = 0, \ldots, j-1, j+1),$$

то полумарковский процесс $x_t$ является однородной цепью Маркова, и (16) переходит в (15).

Рассмотрим частный случай, когда

$$F_j(z) = F(z) \qquad (j = 0, 1, \ldots),$$

$$F_{k,k+1}(z) = F_{k,k-1}(z) = \frac{1}{2} F(z) \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Рекуррентные соотношения (16) принимают вид:

$$P\{L[x_0^1(\cdot)] \leqslant z\} = F(z), \quad (17)$$

$$P\{L[x_j^{j+1}(\cdot)] \leqslant z\} = \frac{F(z)}{2 - F(z) P\{L[x_{j-1}^j(\cdot)] \leqslant z\}}, \qquad j > 0.$$

Докажем, что

$$P\{L[x_j^{j+1}(\cdot)] \leqslant z\} = \frac{\cos j\Theta}{\cos (j+1)\Theta}, \qquad j \geqslant 0, \quad (18)$$

где $\cos\Theta = \frac{1}{F(z)}$.

Для $j = 0$ (18) очевидно. Пусть (18) верно для $k = 0, 1, \ldots$ $\ldots, j-1$. Согласно (17)

$$P\{L[x_j^{j+1}(\cdot)] \leqslant z\} = \frac{1}{2\cos\Theta - \frac{\cos(j-1)\Theta}{\cos j\Theta}} =$$

$$= \frac{\cos j\Theta}{2\cos\Theta\cos j\Theta - \cos(j-1)\Theta} = \frac{\cos j\Theta}{\cos(j+1)\Theta}.$$

Этим (18) доказано по индукции. Так как

$$P\{L[x_0^n(\cdot)] \leqslant z\} = \prod_{l=1}^{n} P\{L[x_{l-1}^l(\cdot)] \leqslant z\},$$

то, согласно (18),

$$P\{L[x_0^n(\cdot)] \leqslant z\} = \frac{1}{\cos n\Theta}, \quad n \geqslant 0. \tag{19}$$

Пусть

$$T_n(x) = \cos[n \arccos x] \qquad (n \geqslant 0)$$

полином Чебышева $n$-й степени. Согласно (19),

$$P\{L[x_0^n(\cdot)] \leqslant z\} = \frac{1}{T_n[F^{-1}(z)]},$$

$$P\{L[x_{n-1}^n(\cdot)] \leqslant z\} = \frac{T_{n-1}[F^{-1}(z)]}{T_n[F^{-1}(z)]}. \tag{20}$$

б) $x_t$ — однородный процесс с независимыми приращениями (обобщенный пуассоновский процесс), для которого

$$q_j = q, \; q_{j,j+1} = \rho, \; q_{jk} = \pi_{j-k} \qquad \left(k < j, \; j = 0, \; \pm 1, \; \pm 2, \; \ldots; \; \rho + \sum_{r=1}^{\infty} \pi_r = q\right).$$

Прежде всего заметим, что распределение $L[x_{n-1}^n(\cdot)]$ не зависит от $n$. Это тривиально следует из однородности $x_t$ по «фазе». Положим

$$P\{L[x_{n-1}^n(\cdot)] \leqslant z\} = R(z),$$

тогда

$$P\{L[x_0^n(\cdot)] \leqslant z\} = R^n(z), \quad n \geqslant 0.$$

Займемся нахождением $R(z)$. По формуле полной вероятности

$$P\{L[x_0^1(\cdot)] \leqslant z\} = (1 - e^{-qz})\frac{\rho}{q} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\pi r}{q}(1 - e^{-qz}) P\{L[x_{-r}^1(\cdot)] \leqslant z\}.$$

Так как

$$P\{L[x_{-r}^1(\cdot)] \leqslant z\} = P\{L[x_0^{r+1}(\cdot)] \leqslant z\} = R^{r+1}(z),$$

то последнее равенство превращается в следующее трансцендентное уравнение для определения $R(z)$:

$$qR(z) = (1 - e^{-qz})\left[\rho + \sum_{r=1}^{\infty} \pi_r R^{r+1}(z)\right]. \tag{21}$$

2. Трансцендентное уравнение (21) может быть выведено и для процессов $x_t$ более общего типа. А именно, пусть $x_t$ — полумарковский процесс со значениями в $(0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, для которого

$$F_k(z) = F(z),\ F_{k,k+1}(z) = \Psi(z),\ F_{kj}(z) = \Phi_{k-j}(z) \qquad \Bigl(j < k,$$

$$k = 0, \pm 1, \ldots;\quad \Psi(z) + \sum_{r=1}^{\infty} \Phi_r(z) = F(z)\Bigr).$$

Нетрудно видеть, что и в этом случае $\{L[x_0^n(\cdot)]\}$ — однородный процесс максимизации (с дискретным временем). Имеем

$$P\{L[x_0^1(\cdot)] \leqslant z\} = \Psi(z) + \sum_{r=1}^{\infty} \Phi_r(z) P\{L[x_{-r}^1(\cdot)] \leqslant z\},$$

или

$$R(z) = \Psi(z) + \sum_{r=1}^{\infty} \Phi_r(z) R^{r+1}(z). \tag{22}$$

Если

$$\Psi(z) = \frac{\rho}{q}(1 - e^{-qz}),\ \Phi_r(z) = \frac{\pi r}{q}(1 - e^{-qz}),$$

то $x_t$ превращается в обобщенный процесс Пуассона и (22) переходит в (21). Покажем, что если $z$ фиксировано и

$$F(z) = \Psi(z) + \sum_{r=1}^{\infty} \Phi_r(z) < 1,$$

то $R(z)$ уравнением (22) всегда определяется и притом однозначно. Для этого достаточно показать, что если

$$\Psi(z) + \sum_{r=1}^{\infty} \Phi_r(z)\, \omega^{r+1} = A(\omega)$$

(зависимость правой части от $z$ не пишем, так как $z$ фиксировано), то на интервале $[0, 1]$ уравнение $\omega = A(\omega)$ всегда имеет ровно один корень. Пусть $B(\omega) = A(\omega) - \omega$, $B(\omega)$ — непрерывная функция на $[0, 1]$ и

$$B(0) = \Psi(z) > 0,\ B(1) = F(z) - 1 < 0.$$

Поэтому хотя бы один корень $B(\omega)$ на $[0, 1]$ имеет. (Здесь мы использовали (23) и $\Psi(z) > 0$; если $\Psi(z) = 0$, то $B(0) = 0$. Так что для доказательства существования корня предположение $\Psi(z) > 0$ несущественно). Предположим, что существуют два корня $\omega_1$, $\omega_2$:

$$0 \leqslant \omega_1 < \omega_2 < 1,\ \omega_1 = A(\omega_1),\ \omega_2 = A(\omega_2).$$

По теореме Лагранжа для некоторого $c$ $(\omega_1 < c < \omega_2)$ $A'(c) = 1$. Так как $A'(\omega)$ монотонно возрастает на $[0, 1]$, то из (24) следует, что

$$A'(\omega) \geqslant 1 \text{ на } [\omega_2, 1].$$

Поэтому

$$B'(\omega) \geqslant 0 \text{ на } [\omega_2, 1].$$

А так как $B(\omega_2) = 0$, то $B(1) \geqslant 0$, что противоречит (23). Этим доказано, что в случае (23) $R(z)$ определяется однозначно. Пусть

$$T = \sup \{z : F(z) < 1\}.$$

Если $T = +\infty$, то (22) определяет $R(z)$ для всех $z$. Если же $T < +\infty$, то для $z \geqslant T$

$$R(z) = P\{\tau_0^1 < \infty\}$$

(напомним, что $\tau_0^1$ — время, за которое $x_t$, выходя из 0, впервые попадет в 1). Хорошо известно, что $x = P\{\tau_0^1 < \infty\}$ — наименьший положительный корень уравнения

$$x = \Psi(+\infty) + \sum_1^\infty \Phi_r(+\infty) x^{r+1}.$$

В качестве примера рассмотрим случай, когда

$$\Phi_2(z) = \Phi_3(z) = \cdots = 0.$$

Тогда (22) превращается в квадратное уравнение

$$R(z) = \Psi(z) + \Phi_1(z) R^2(z).$$

Решаем его

$$R(z) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\Psi(z)\Phi_1(z)}}{2\Phi_1(z)}.$$

«+» не подходит, ибо тогда $R(z)$ не ограничена при $z \to 0$. Поэтому

$$R(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\Psi(z)\Phi_1(z)}}{2\Phi_1(z)}.$$

**I. I. Yezhov, Hoangh Shum**

PROCESSES OF MAXIMIZATION WITH DISCRETE TIME

Summary

In this paper the processes pointed out in the headline are defined and a general method of construction of these processes and certain applications is described.

Поступила в редколлегию 25.III 1972.