О. К. ЗАКУСИЛО, асп.
Киевский университет

О СХОДИМОСТИ СУММ СЛУЧАЙНОГО ЧИСЛА СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН, ЗАДАННЫХ НА ЭРГОДИЧЕСКОМ ПРОЦЕССЕ

Изучение предельных распределений сумм случайных величин издавна является классической задачей теории вероятностей. Естественным ее обобщением является выяснение достаточных и необходимых условий для сходимости сумм S_{ν_n} случайного числа ν_n случайных величин и описание возможных предельных распределений. При этом возможны 2 случая:

а) число слагаемых не зависит от слагаемых;

б) число слагаемых зависит от слагаемых.

Достаточные условия для сходимости сумм S_{ν_n} в случае а) исследовались в [4, 2], где доказывались теоремы переноса соответственно для нарастающих сумм слагаемых ξ_k без условия их совместной независимости и для сумм независимых одинаково распределенных слагаемых ξ_k^n в схеме серий.

Среди работ, рассматривающих достаточные условия сходимости сумм S_{ν_n} в случае б), следует особо отметить работы [3], где также приводится обширная библиография по данной тематике, [7], где рассматривается вопрос о существовании предела (в смысле слабой сходимости) суперпозиции случайных функций, а также [1, 5], где изучается предельное поведение функций распределения времени пребывания полумарковского процесса в фиксированном множестве состояний, когда вероятность выхода из него стремится к нулю.

Вместе с тем необходимые условия сходимости сумм S_{ν_n} рассматривались лишь в нескольких работах, в частности, в [6], где изучались необходимые условия сходимости сумм $S_{\nu_n}^n$ независимых одинаково распределенных слагаемых ξ_n^k в схеме серий.

В данной работе изучаются как достаточные, так и необходимые условия сходимости сумм $S_{\nu_n}^n$ случайного числа ν_n случайных слагаемых, заданных на некотором эргодическом процессе η в схеме серий, когда ν_n не зависит от слагаемых.

Пусть η_k — эргодический процесс с конечным числом состояний, т. е.

$$\frac{\nu_i(n)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{p} q_i, \qquad i = \overline{1, m},$$

где $\nu_i(n)$ — число попаданий процесса η в состояние i за n шагов.

Пусть также ν_n — неотрицательная целочисленная случайная величина, не зависящая от процесса η, и $\xi_k^n(i)$ для каждого n — последовательность независимых в совокупности случайных величин, не зависящих от процесса η и ν_n, причем распределение $\xi_k^n(i)$ не зависит от k, а из $a(n) = o(n)$ следует

$$\sum_{k=1}^{a(n)} \xi_k^n(i) \xrightarrow[n\to\infty]{p} 0, \qquad i = \overline{1, m}.$$

Лемма 1. Положим

$$S_{l_n}^n = \sum_{k=1}^{l_n} \xi_k^n(\eta_k),$$

где l_n — числовая последовательность, $l_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, $l_n = O(n)$.

Если $S_{l_n}^n \overset{\text{сл.}}{\underset{n\to\infty}{\Longrightarrow}} \xi$, то ξ — безгранично делимая величина.

Лемма 2. Пусть

$$\xi_n(t) = S_{[tl_n]}^n.$$

Если выполняются условия леммы 1, то

$$\xi_n(t) \overset{\text{сл.}}{\underset{n\to\infty}{\Longrightarrow}} \xi(t),$$

где $\xi(t)$ — однородный процесс с независимыми приращениями, $\xi(1) \doteq \xi$ ($\overset{\text{сл}}{\Rightarrow}$ — слабая сходимость конечномерных распределений процесса $\xi_n(t)$, $\doteq$ — равенство распределений).

Лемма 3. При выполнении условий леммы 1

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[a,b]} |Me^{i\lambda\xi_n(t)} - Me^{i\lambda\xi(t)}| = 0.$$

Лемма 4. Пусть $x_n(t)$ — случайный процесс, μ_n — неотрицательная случайная величина, не зависящая от процесса $x_n(t)$. Если $x_n(t) \overset{\text{сл.}}{\underset{n\to\infty}{\Longrightarrow}} x(t)$ и $\mu_n \overset{\text{сл.}}{\underset{n\to\infty}{\Longrightarrow}} \mu$,

а) $Me^{i\lambda x(t)}$ непрерывно по t;

б) существует последовательность ограниченных множеств B_m таких, что

$$P\{\mu \bar{\in} B_n\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in B_m} |Me^{i\lambda x_n(t)} - Me^{i\lambda x(t)}| = 0,$$

то

$$x_n(\mu_n) \underset{n\to\infty}{\overset{\text{сл.}}{\Longrightarrow}} x(\mu).$$

На основании этих лемм оказывается справедливой следую[щая] теорема.

Теорема 1. Пусть $\dfrac{\nu_n}{l_n} \underset{n\to\infty}{\overset{\text{сл.}}{\Longrightarrow}} \nu$, $l_n \to \infty$ и $l_n = O(n)$,

$$S^n_{l_n} = \sum_{k=1}^{l_n} \xi^n_k(\eta_k) \underset{n\to\infty}{\overset{\text{сл.}}{\Longrightarrow}} \xi.$$

Тогда

$$S^n_{\nu_n} \underset{n\to\infty}{\overset{\text{сл.}}{\Longrightarrow}} \Sigma \doteq \xi(\nu),$$

где $\xi(t)$ — однородный процесс с независимыми приращения[ми] $\xi(1) \doteq \xi$, ν не зависит от $\xi(t)$.

Лемма 5. Если $l_n = O(n)$,

$$S^n_{l_n} \underset{n\to\infty}{\overset{\text{сл.}}{\Longrightarrow}} \xi,$$

причем ξ не сосредоточена в некоторой точке, то $S^n_{nl_n}$ стохастичес[ки] неограничена.

Лемма 6. Если

$$l_n = O(n),\ S^n_{l_n} \underset{n\to\infty}{\overset{\text{сл.}}{\Longrightarrow}} \xi,\ S^n_{\nu_n} \underset{n\to\infty}{\overset{\text{сл.}}{\Longrightarrow}} \Sigma,$$

то $\dfrac{\nu_n}{l_n}$ стохастически ограничена.

Теорема 2. Если $l_n = O(n)$

$$S^n_{l_n} \underset{n\to\infty}{\overset{\text{сл.}}{\Longrightarrow}} \xi(1),\ S^n_{\nu_n} \underset{n\to\infty}{\overset{\text{сл.}}{\Longrightarrow}} \Sigma,$$

то $\dfrac{\nu_n}{l_n} \underset{n\to\infty}{\overset{\text{сл.}}{\Longrightarrow}} \nu$ и $\Sigma \doteq \xi(\nu)$.

Лемма 7. Если $l_n = O(n)$

$$S^n_{\nu_n} \underset{n\to\infty}{\overset{\text{сл.}}{\Longrightarrow}} \Sigma,\quad \frac{\nu_n}{l_n} \underset{n\to\infty}{\overset{\text{сл.}}{\Longrightarrow}} \nu,$$

причем $P\{\nu > 0\} > 0$, то $S^n_{l_n}$ стохастически ограничена.

Теорема 3. Если $l_n = O(n)$,

$$S^n_{\nu_n} \underset{n\to\infty}{\overset{\text{сл.}}{\Longrightarrow}} \Sigma,\ \frac{\nu_n}{l_n} \underset{n\to\infty}{\overset{\text{сл.}}{\Longrightarrow}} \nu,\ \boldsymbol{P}\{\nu > 0\} > 0$$

и уравнение

$$Me^{i\lambda \Sigma} = \int_0^\infty [\varphi(\lambda)]^y \, dP\{\nu < y\}$$

имеет единственное решение $\varphi(\lambda)$ в множестве характеристических функций безгранично делимых величин, то

$$S_{l_n}^n \underset{n\to\infty}{\overset{\text{сл.}}{\Longrightarrow}} \xi \text{ и } Me^{i\lambda\xi} = \varphi(\lambda).$$

Доказательство леммы 1. Пусть $S_{l_n}^n \underset{n\to\infty}{\overset{\text{сл.}}{\Longrightarrow}} \xi$. Тогда

$$Me^{i\lambda S_{l_n}^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} Me^{i\lambda\xi}.$$

Но

$$Me^{i\lambda S_{l_n}^n} = M\varphi_{1,n}^{\nu_1(l_n)} \ldots \varphi_{m,n}^{\nu_m(l_n)},$$

где $\varphi_{i,n} = \varphi_{i,n}(\lambda) = Me^{i\lambda\xi_k^n(i)}$.

Введем множества

$$A(n, \varepsilon) = \bigcap_{i=1}^m \{\omega: q_i l_n(1-\varepsilon) \leqslant \nu_i(l_n) < q_i l_n(1+\varepsilon)\}.$$

Поскольку $\frac{\nu_i(n)}{n} \to q_i$, то $\lim\limits_{n\to\infty} P\{A(n, \varepsilon)\} = 1$, и

$$\lim_{n\to\infty} Me^{i\lambda S_{l_n}^n} = \lim_{n\to\infty} M_{A(n,\varepsilon)}\varphi_{1,n}^{\nu_1(l_n)} \ldots \varphi_{m,n}^{\nu_m(l_n)}.$$

Поэтому

$$\left| Me^{i\lambda S_{l_n}^n} - \varphi_{1,n}^{q_1 l_n} \ldots \varphi_{m,n}^{q_m l_n} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| M_A \varphi_{1,n}^{\nu_1(l_n)} \ldots \varphi_{m,n}^{\nu_m(l_n)} - \varphi_{1,n}^{q_1 l_n} \ldots \varphi_{m,n}^{q_m l_n} \right| + \delta_n =$$

$$= \left| \varphi_{1,n}^{q_1 l_n(1+\varepsilon\theta_{1,n})} \ldots \varphi_{m,n}^{q_m l_n(1+\varepsilon\theta_{m,n})} - \varphi_{1,n}^{q_1 l_n} \ldots \varphi_{m,n}^{q_m l_n} \right| + \delta_n = I_n + \delta_n,$$

где $|\theta_{i,n}| \leqslant 1$.

Если для какого-то i $\varphi_{i,n}^{q_i l_n} \to 0$, то $I_n \to 0$. В противном случае пусть n таково, что

$$|\alpha_{i,n}| = |\varphi_{i,n}^{q_i l_n}| \geqslant C > 0, \qquad i = \overline{1, m}.$$

Тогда

$$I_n \leqslant |\alpha_{1,n}^{\varepsilon\theta_{1,n}} \ldots \alpha_{m,n}^{\varepsilon\theta_{m,n}} - 1| = |e^{\varepsilon \sum\limits_{k=1}^m \theta_{k,m} \ln \alpha_{k,m}} - 1| \leqslant$$

$$\leqslant |e^{\varepsilon \sum\limits_{k=1}^m |\ln \alpha_{k,m}|} - 1| \leqslant e^{\varepsilon m |\ln c|} - 1.$$

Таким образом, при $n \to \infty$ и $\varepsilon \to 0$ получим

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{M} e^{i\lambda S^n_{l_n}} = \lim_{n\to\infty} \varphi_{1,n}^{q_1 l_n} \ldots \varphi_{m,n}^{q_m l_n}.$$

Доказательство леммы 2. Ограничимся дву...ными распределениями. Введем множества

$$A_1(n, \varepsilon) = \bigcap_{k=1}^{m} \{\omega : q_k l_n t_1 (1-\varepsilon) \leqslant \nu_k (t_1 l_n) < q_k l_n t_1 (1+\varepsilon)\},$$

$$A_2(n, \varepsilon) = \bigcap_{k=1}^{m} \{\omega : q_k l_n (t_2 - t_1)(1-\varepsilon) \leqslant \nu_k ((t_2 - t_1) l_n) < \\ < q_k l_n (t_2 - t_1)(1+\varepsilon)\}.$$

Поскольку $\frac{\nu_i(tl_n)}{l_n} \xrightarrow{p} q_i t$, то вектор

$$\frac{1}{l_n} (\nu_1(t_1 l_n), \ldots, \nu_m(t_1 l_n), \nu_1(t_1 l_n, t_2 l_n), \ldots, \nu_m(t_1 l_n, t_2 l_n)) \xrightarrow{p}$$

$$\xrightarrow{p} (q_1 t_1, \ldots, q_m t_1, q_1(t_2 - t_1), \ldots, q_m(t_2 - t_1)),$$

и аналогично доказательству леммы 1 получаем

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{M} e^{i\lambda_1 \xi_n(t_1) + i\lambda_2(\xi_n(t_2) - \xi_n(t_1))} = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{M}_{A_1 \cap A_2} e^{i\lambda_1 \xi_n(t_1) + i\lambda_2(\xi_n(t_2) - \xi_n(t_1))} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \varphi_{1,n}^{q_1 t_1 l_n}(\lambda_1) \ldots \varphi_{m,n}^{q_m t_1 l_n}(\lambda_1)\, \varphi_{1,n}^{q_1(t_2 - t_1) l_n}(\lambda_2) \ldots \varphi_{m,n}^{q_m(t_2 - t_1) l_n}(\lambda_2) =$$
$$= \boldsymbol{M} e^{i\lambda_1 \xi(t_1)} \boldsymbol{M} e^{i\lambda_2 \xi(t_2 - t_1)}.$$

Доказательство леммы 3.

$$\sup_{0 < a \leqslant t \leqslant b} |\boldsymbol{M} e^{i\lambda \xi_n(t)} - \boldsymbol{M} e^{i\lambda \xi(t)}| \leqslant \sup |\boldsymbol{M} \varphi_{1,n}^{\nu_1(tl_n)} \ldots \varphi_{m,n}^{\nu_m(tl_n)} -$$

$$- \varphi_{1,n}^{q_1 t l_n} \ldots \varphi_{m,n}^{q_m t l_n}| + \sup |\varphi_{1,n}^{q_1 t l_n} \ldots \varphi_{m,n}^{q_m t l_n} - \boldsymbol{M} e^{i\lambda \xi(t)}| \leqslant$$

$$\leqslant \sup |\varphi_{1,n}^{q_1 t l_n (1+\varepsilon\theta_{1,n})} \ldots \varphi_{m,n}^{q_m t l_n (1+\varepsilon\theta_{m,n})} - \varphi_{1,n}^{q_1 t l_n} \ldots \varphi_{m,n}^{q_m t l_n}| +$$

$$+ \sup \boldsymbol{P} \left\{ \bigcup_{i=1}^{m} \{\nu_i(tl_n) \,\overline{\in}\, (tq_i l_n (1-\varepsilon), tq_i l_n (1+\varepsilon))\} \right\} +$$

$$+ \sup |\varphi_{1,n}^{q_1 t l_n} \ldots \varphi_{m,n}^{q_m t l_n} - \boldsymbol{M} e^{i\lambda \xi(t)}| = I_{1,n} + I_{2,n} + I_{3,n}.$$

То, что $I_{1,n} \to 0$ получено в ходе доказательства леммы 1. Поскольку $\frac{\nu_i(n)}{n} \to q_i$, то для $k > k_0$

$$\boldsymbol{P} \left\{ \left| \frac{\nu_i(k)}{k} - q_i \right| > \varepsilon \right\} < \delta.$$

Поэтому для $l_n > \frac{1}{a} k_0$ получим

$$I_2 \leqslant \sum_{i=1}^{m} \sup \boldsymbol{P} \{\nu_i(tl_n) \,\overline{\in}\, (tq_i l_n (1-\varepsilon), tq_i l_n (1+\varepsilon))\} < m\delta.$$

Ввиду произвольности δ $I_{2,n} \to 0$. И, наконец, поскольку

$$\varphi_{1,n}^{q_1 l_n} \dots \varphi_{mn}^{q_m l_n} = \alpha_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi = Me^{i\lambda\xi(1)},$$

то

$$I_3 = \sup |\alpha_n^t - \varphi^t| \leqslant \sup \left| \left(\frac{\alpha_n}{\varphi}\right)^t - 1 \right| \leqslant \sup | e^{t \left| l_n \frac{\alpha_n}{\varphi} \right|} - 1 | \leqslant$$

$$\leqslant e^{b \left| l_n \frac{\alpha_n}{\varphi} \right|} - 1 \to 0.$$

Доказательство леммы 4.

$$|Me^{i\lambda x_n(\mu_n)} - Me^{i\lambda x(\mu)}| \leqslant |Me^{i\lambda x_n(\mu_n)} - Me^{i\lambda x(\mu_n)}| +$$

$$+ |Me^{i\lambda x(\mu_n)} - Me^{i\lambda x(\mu)}| \leqslant \left| \int_{B_m} (Me^{i\lambda x_n(t)} - Me^{i\lambda x(t)})\, dP\{\mu_n < t\} \right| +$$

$$+ 4P\{\mu_n \overline{\in} B_m\} + |Me^{i\lambda x(\mu_n)} - Me^{i\lambda x(\mu)}| = A_1 + A_2 + A_3.$$

Поскольку $A_1 \leqslant \sup\limits_{t \in B_m} | Me^{i\lambda x_n(t)} - Me^{i\lambda x(t)}|$, то $A_1 \to 0$ из условия б), $A_2 \to 0$ из условия б), $A_3 \to 0$ из условия а).

Доказательство теоремы 1. Пусть $\frac{\nu_n}{l_n} \overset{\text{сл.}}{\underset{n\to\infty}{\Longrightarrow}} \nu$ и ν не имеет атома в нуле. Тогда можно воспользоваться леммами 1, 3 и 4, где в лемме 4 $B_m = \left[\frac{1}{m}, m\right]$. Пусть ν имеет атом в нуле. Введем

$$\mu_n = \frac{\nu_n}{l_n} + 1.$$

Тогда $\mu_n \Longrightarrow \mu$ и μ не имеет атома в нуле. Поэтому $\xi_n(\mu_n) \Longrightarrow \xi(\mu)$. Аналогично доказательству леммы 2 показываем, что

$$|Me^{i\lambda\xi_n(\mu_n)} - Me^{i\lambda\xi_n(\nu_n)} Me^{i\lambda\xi_n(1)}| \to 0.$$

Поэтому существует

$$\lim_{n\to\infty} Me^{i\lambda\xi_n(\nu_n)}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} Me^{i\lambda\xi_n(\nu_n)} = \lim_{n\to\infty} Me^{i\lambda\xi_n(\mu_n)} (\lim Me^{i\lambda\xi_n(1)})^{-1} = Me^{i\lambda\xi(\nu)}.$$

Доказательство леммы 5. Аналогично доказательству леммы 1

$$\lim_{n\to\infty} Me^{i\lambda s_{nl_n}^n} = \lim_{n\to\infty} (\varphi_{1,n}^{q_1 l_n(1+\varepsilon\theta_{1,n})} \dots \varphi_{m,n}^{q_m l_n(1+\varepsilon\theta_{m,n})})^n,$$

и если при некотором λ

$$\lim_{n\to\infty} \left| \varphi_{1,n}^{q_1 l_n (1+\varepsilon\theta_{1,n})} \ldots \varphi_{m,n}^{q_m l_n (1+\varepsilon\theta_{m,n})} \right| < 1,$$

то при этом $\lambda \lim_{n\to\infty} Me^{i\lambda S_{nl_n}^n} = 0$. Поэтому $S_{nl_n}^n$ стохастически н[...]граничена, ибо в противном случае из нее можно было бы извл[...] сходящуюся подпоследовательность, и предел характеристическ[...] функций этой подпоследовательности был бы непрерывной функ[...]ей, а у нас функция $\lim_{n\to\infty} Me^{i\lambda S_{nl_n}^n}$ разрывна в нуле.

Доказательство леммы 6. Пусть $\frac{\nu_n}{l_n}$ стохастиче[...] неограничена. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любог[...] найдется номер n_r, при котором

$$P\left\{\frac{\nu_{n_r}}{l_{n_r}} \geqslant r\right\} > \varepsilon, \qquad n_r \xrightarrow[r\to\infty]{} \infty.$$

Пусть $\xi_k^n(i)$ имеют симметричное распределение. Поскольку в эт[...] случае

$$P\{|S_k^n| > x\} = M\chi\{|S_k^n| > x\} =$$
$$= MM^{\eta_1,\ldots,\eta_k}\chi\{|\xi_1^n(\eta_1) + \cdots + \xi_k^n(\eta_k)| > x\} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{2} MM^{\eta_1,\ldots,\eta_k}\chi\{|\xi_1^n(\eta_1) + \cdots + \xi_m^n(\eta_m)| > x\} =$$
$$= \frac{1}{2} M\chi\{|S_m^n| > x\} = \frac{1}{2} P\{|S_m^n| > x\}$$

для всех $m \leqslant k$, то

$$P\{|S_{\nu_{n_r}}^{n_r}| > x\} = \sum_{k=0}^{\infty} P\{|S_k^{n_r}| > x\} P\{\nu_{n_r} = k\} \geqslant$$
$$\geqslant \sum_{k \geqslant rl_{n_r}} P\{|S_k^{n_r}| > x\} P\{\nu_{n_r} = k\} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{2} P\{|S_{rl_{n_r}}^{n_r}| > x\} P\{\nu_{n_r} \geqslant rl_{n_r}\} \geqslant \frac{1}{2}\varepsilon_1\varepsilon,$$

так как по лемме 5 последовательность $S_{rl_{n_r}}^{n_r}$ стохастически неог[...]ничена. Поэтому $S_{\nu_{n_r}}^{n_r}$ стохастически неограничена, что проти[...]речит условиям леммы.

Если слагаемые $\xi_k^n(i)$ имеют произвольные распределения, то в[...]дем величины $\eta_k^n(i)$ — симметризации $\xi_k^n(i)$.. Тогда

$$Me^{i\lambda \sum_{k=1}^{l_n} \eta_k^n(\eta_k)} = |Me^{i\lambda S_{l_n}^n}|^2 \to |Me^{i\lambda\xi}|^2$$

и $\sum\limits_{k=1}^{\nu_n} \eta_k^n\ (\eta_k)$ стохастически ограничена, как сумма двух сходящихся последовательностей. Таким образом, мы находимся в условиях первой половины леммы, ибо, по существу, в первой части доказательства использовалась лишь стохастическая ограниченность последовательности $S_{\nu_n}^n$.

Доказательство теоремы 2. Извлечем из стохастически ограниченной последовательности $\frac{\nu_n}{l_n}$ две подпоследовательности

$$\frac{\nu_{n_1}}{l_{n_1}} \Rightarrow \nu_1 \text{ и } \frac{\nu_{n_2}}{l_{n_2}} \Rightarrow \nu_2.$$

На основании теоремы 1

$$S_{\nu_{n_1}}^{n_1} \Rightarrow \xi(\nu_1), \quad S_{\nu_{n_2}}^{n_2} \Rightarrow \xi(\nu_2).$$

Поэтому $\xi(\nu_1) \doteq \xi(\nu_2)$, т. е.

$$\int\limits_0^\infty [\varphi(\lambda)]^y \, dP\{\nu_1 < y\} = \int\limits_0^\infty [\varphi(\lambda)]^y \, dP\{\nu_2 < y\}.$$

Поскольку меры однозначно определяются своими преобразованиями Лапласа, а последние, будучи аналитическими функциями в правой полуплоскости, однозначно определяются своими значениями на любой кривой, лежащей в этой полуплоскости, то $P\{\nu_1 < y\} = P\{\nu_2 < y\}$.

Доказательство леммы 7. Из леммы 2 следует, что, если $S_{l_n}^n$ стохастически ограничена, то и для любого t $S_{tl_n}^n$ тоже стохастически ограничена. Поэтому, если $S_{l_n}^n$ стохастически неограничена, то существует $\varepsilon_0 > 0$, что для всех x

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \boldsymbol{P}\{|S_{tl_n}^n| > x\} > \varepsilon_0.$$

Если слагаемые имеют симметричное распределение, то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \boldsymbol{P}\{|S_{\nu_n}^n| > x\} \geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{i \geqslant tk_n} \boldsymbol{P}\{|S_i^n| > x\} \boldsymbol{P}\{\nu_n = i\} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2} \boldsymbol{P}\{|S_{tk_n}^n| > x\} \boldsymbol{P}\{\nu_n \geqslant tk_n\} > \frac{1}{2}\varepsilon_0 c,$$

что противоречит сходимости $S_{\nu_n}^n$. В общем случае пусть $\eta_k^n(i)$ — симметризация $\xi_k^n(i)$. Поскольку

$$\boldsymbol{P}\{|\eta_1^n(\eta_1) + \cdots + \eta_{l_n}^n(\eta_{l_n})| > x\} \geqslant \frac{1}{2} \boldsymbol{P}\{|S_{l_n}^n - m_n| > x\},$$

где m_n — медиана $S_{l_n}^n$, то $S_{l_n}^n - m_n$ стохастически ограничен[а]. Покажем, что m_n — ограниченная последовательность. Введем

$$\zeta_k^n(i) = \xi_k^n(i) - \frac{m_n}{l_n}.$$

Тогда $\sum_{k=1}^{l_n} \zeta_k^n(\eta_k)$ стохастически ограничена, и последовательнос[ть]

$$\sum_{k=1}^{\nu_n} \zeta_k^n(\eta_k) = S_{\nu_n}^n - \frac{\nu_n m_n}{l_n}$$

по теореме 1 стохастически ограничена. Поскольку $S_{\nu_n}^n$ сходитс[я], то $\frac{\nu_n m_n}{l_n}$ стохастически ограничена. Так как $\frac{\nu_n}{l_n}$ сходится, то m_n ограничена. Поэтому последовательность $S_{l_n}^n$ также стохастическ[и] ограничена.

Доказательство теоремы 3. Извлечем из стох[а]стически ограниченной последовательности $S_{l_n}^n$ две подпоследов[а]тельности

$$S_{l_{n_1}}^{n_1} \Rightarrow S_1, \quad S_{l_{n_2}}^{n_2} \Rightarrow S_2.$$

На основании теоремы 1

$$\int_0^\infty (Me^{i\lambda S_1})^y \, dP\{\nu < y\} = \int_0^\infty (Me^{i\lambda S_2})^y \, dP\{\nu < y\}$$

и в силу условий теоремы получаем

$$S_1 \stackrel{\cdot}{=} S_2.$$

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить и[с]креннюю благодарность чл.-корр. АН УССР В. С. Королюку за вн[и]мание к работе и замечания, сделанные при подготовке ее к печат[и].

ЛИТЕРАТУРА

1. Анисимов В. В. Предельные распределения функционалов от пол[у]марковских процессов, заданных на фиксированном множестве состояний до м[о]мента первого выхода.— ДАН СССР, 1970, вып. 193, № 4.
2. Гнеденко Б. В., Гуссейн Фахим. Об одной теореме пере[но]са.— ДАН СССР, 1969, вып. 187, № 1.
3. Guiasu S. Contributii la studiul repartitiei limita a proceselor stoca[sti]ke cu timpdiscret aleator.— Studii si cercetary matematice, 19, N 7, 1967.
4. Добрушин Р. Л. Лемма о пределе сложной случайной функции.— УМН, 10, вып. 2 (64), 1955.
5. Королюк В. С. Время пребывания полумарковского процесса в фи[к]сированном множестве состояний.— УМЖ, 17 : 3, 1965.
6. Саас Д., Фрайер Б. Одна задача теории суммирования со случа[й]ным индексом.— Литовский математический сборник, 11, № 1, 1971.
7. Сильвестров Д. С. О пределе сложной случайной функции.— Мат. заметки, 10, № 1, 1971.

O. K. Zakusilo

ON THE CONVERGENCE OF RANDOM SUMS OF RANDOM VARIABLES DEFINED ON ERGODIC PROCESS

Summary

The necessary and sufficient conditions of convergence of random sums of random variables, defined on ergodic process are investigated, when the number of summands does not depend on summands.

Поступила в редколлегию 15.II 1972.