А. Е. ЗАСЛАВСКИЙ, ст. препод.
Новосибирский университет

ТЕОРЕМА ВОССТАНОВЛЕНИЯ ДЛЯ МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА ВОССТАНОВЛЕНИЯ С БЕСКОНЕЧНЫМ СРЕДНИМ И СЧЕТНЫМ ПРОСТРАНСТВОМ СОСТОЯНИЙ

В [1] доказана теорема восстановления для случайных величин произвольного знака, заданных на переходах однородной цепи Маркова с абстрактным пространством состояний в предположении существования конечной инвариантной меры цепи Маркова и положительности математического ожидания этих случайных величин. В [2] получены оценки скорости сходимости в теоремах восстановления для случайных величин произвольного знака, заданных на переходах счетной цепи Маркова; эти оценки получены в предположении, что случайные величины имеют конечный момент порядка r. В предлагаемой работе доказывается теорема восстановления для неотрицательных случайных величин с бесконечным математическим ожиданием, заданных на переходах счетной цепи Маркова, обладающей конечной инвариантной мерой.

Последовательность $\{\zeta_n;\ n = 0, 1, 2, \ldots\}$ сумм случайных величин ξ_k; $k = 1, 2, \ldots$, заданных на переходах цепи Маркова ω, вместе с последовательностью $\{\omega_n;\ n = 0, 1, 2, \ldots\}$ состояний цепи образует однородный по времени и по первой компоненте двумерный марковский процесс

$$\Omega = \{\zeta_n,\ \omega_n;\quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\}$$

с дискретным временем — марковский процесс восстановления [3]. В работе рассматривается марковский процесс восстановления Ω с бесконечным математическим ожиданием (см. (10)) и счетным пространством состояний вложенной цепи Маркова ω.

Совокупность переходных вероятностей

$$F_{ij}(t) = \boldsymbol{P}(\zeta_{n+1} < s + t,\ \omega_{n+1} = j \mid \zeta_n = s,\ \omega_n = i);$$
$$i,\ j,\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ s,\ t \in R = (-\infty,\ \infty),$$

процесса Ω за один шаг удобно считать не зависящей от n и s матрицей счетного порядка $F = F(t) = \|F_{ij}(t)\|$.

Положим

$$F^{0*}(t) = E(t) = \Theta(t)\,\|\delta_{ij}\|;$$

$$\Theta(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0, \\ 1, & t > 0; \end{cases} \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j; \end{cases}$$

$$F^{1*}(t) = F(t)$$

и определим последовательность матриц $F^{n*}(t)$ рекуррентно, используя уравнение Колмогорова — Чэпмена:

$$F^{(m+n)*}(t) = F^{m*} * F^{n*}(t) = \| F_{ij}^{(m+n)*}(t) \| = \Big\| \sum_{k=0}^{\infty} \int_{R} F_{kj}^{n*}(t-s)\, dF_{ik}^{m*}(s) \Big\|. \quad (1)$$

Матрица $F^{n*}(t)$ задает переходные вероятности марковского процесса Ω за n шагов.

Вероятности перехода цепи Маркова ω за n шагов задаются матрицей

$$P^n = \| p_{ij}^n \| = F^{n*}(\infty); \quad P = P^{1*} = F(\infty).$$

Цепь Маркова ω предполагается непериодической и положительно регулярной, поэтому существует предел

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \Pi = \| \Pi_{ij} \|; \quad \Pi_{ij} = \pi_j, \ \Sigma \pi_j = 1. \quad (2)$$

Строка $\pi = \{\pi_j\}$ матрицы Π задает инвариантное распределение цепи ω.

Предполагается $P(\zeta_0 = 0) = 1$. Начальное распределение цепи Маркова ω остается произвольным.

Определение 1. Процесс Ω называется арифметическим с шагом d, если все точки роста всех функций распределения $F_{ij}(x)$ кратны d, причем $d > 0$ — наибольшее из чисел, обладающих этим свойством. Если такого d не существует, процесс Ω называется неарифметическим.

При рассмотрении неарифметического процесса Ω предполагается, что для любого i функция распределения $F_{ii}^{n*}(x)$ при некотором $n > 0$ имеет несоизмеримые точки роста. Невыполнение этого условия влечет существование таких чисел $\varkappa_{ij}$, что вводимая ниже функция восстановления $U(I)$ обладает следующим свойством: $U_{ij}(I) = 0$ во всех тех случаях, когда интервал I не содержит точек сдвинутой решетки $\{md + \varkappa_{ij};\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$. Если все $\varkappa_{ij}$ кратны d, то Ω — арифметический процесс с шагом d. Если среди $\varkappa_{ij}$ есть несоизмеримые друг с другом числа, то процесс Ω является неарифметическим, однако его свойства весьма близки к свойствам арифметического процесса.

Пусть $I = [x, y]$, $x, y \in R$, $x < y$ — произвольный интервал. Через $|I|$ будет обозначаться длина $y - x$ этого интервала, если рассматривается неарифметический процесс Ω, или число точек вида md с целым m в интервале I, если рассматривается арифметический процесс Ω с шагом d. Будет использоваться также обозначение $I + t = [x + t,\ y + t]$.

Для произвольного интервала $I = [x, y)$ положим $F^{n*}(I) = F^{n*}(y) - F^{n*}(x)$ и определим функцию восстановления равенством

$$U(I) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(I). \quad (3)$$

Элемент $U_{ij}(I)$ матрицы $U(I)$ равен условному (при $\omega_0 = i$) математическому ожиданию числа попаданий процесса Ω в подмножество $I \times j$ пространства состояний этого процесса в бесконечной последовательности моментов времени $n = 0, 1, 2, \dots$.

Интегральная функция восстановления определяется как матрица

$$H(t) = U((-\infty, t)).$$

Из результатов [1] следует, что все элементы $U_{ij}(I)$ матрицы $U(I)$ конечны или бесконечны одновременно для всех интервалов I с $0 < |I| < \infty$. Если случайные величины ξ_k, заданные на переходах цепи ω, имеют бесконечное математическое ожидание, то

$$\lim_{t\to\infty} U(I + t) = 0. \tag{4}$$

Ниже дается оценка скорости сходимости в (4) и оценка асимптотического поведения при $t \to \infty$ матрицы $H(t)$ в следующих предположениях о свойствах определяющей процесс Ω матрицы $F(t)$: $F(0) = 0$ — случайные величины ξ_k неотрицательны, и

$$P - F(t) = t^{-r} L(t) K(t), \qquad (t > 0), \tag{5}$$

где $0 \leqslant r \leqslant 1$, $L(t)$ — медленно меняющаяся функция, для матричной функции $K(t) = \|K_{ij}(t)\|$ с неотрицательными элементами существует предел

$$0 \neq K = \|K_{ij}\| = \|\lim_{t\to\infty} K_{ij}(t)\| < \infty. \tag{6}$$

Заметим, что если $K_{ij} > 0$, то приращение ξ_k первой компоненты ζ_n процесса Ω при переходе второй его компоненты ω_n из состояния i в состояние j (тогда распределение случайной величины ξ_k описывается функцией распределения $F_{ij}(t)/p_{ij}$) имеет бесконечное математическое ожидание при $0 \leqslant r < 1$. Будем считать функцию $L(t)$ такой, что это математическое ожидание бесконечно и в случае $r = 1$.

Рассмотрим функцию

$$0 \leqslant k(t) = \sum_i \sum_j \pi_i K_{ij}(t).$$

Учитывая, что функция распределения $\sum_i \sum_j \pi_i F_{ij}(t) = 1 - t^{-r} L(t) k(t)$ задает распределение приращения ξ_k первой компоненты ζ_n процесса Ω за один шаг в случае, когда начальное распределение цепи Маркова ω совпадает с инвариантным распределением π этой цепи, заключаем

$$k(t) < \infty \qquad (t < \infty). \tag{7}$$

Дополнительно к (7) и в соответствии с (5) будем предполагать

$$0 < k = \lim_{t\to\infty} k(t) = \sum_i \sum_j \pi_i K_{ij} < \infty. \tag{8}$$

Определим математическое ожидание срезки на уровне $t > 0$ приращения ξ_k:

$$M(t) = \|M_{ij}(t)\| = \|t(p_{ij} - F_{ij}(t)) + \int_0^t x dF_{ij}(x)\|.$$

Обозначим

$$\mu(t) = \sum_i \sum_j \pi_i M_{ij}(t)$$

математическое ожидание этой срезки в случае, когда начальным распределением цепи Маркова ω является ее инвариантное распределение π. В принятых предположениях (см. [4])

$$\mu(t) \sim (1-r) t^{1-r} L(t) k(t) \qquad (t \to \infty). \tag{9}$$

Таким образом, при $0 \leqslant r < 1$ справедливо равенство

$$\mu = \lim_{t\to\infty} \mu(t) = \infty. \tag{10}$$

Будем предполагать равенство (10) выполненным и при $r = 1$.

Для арифметического процесса Ω с шагом d будем, не ограничивая общности, предполагать $d = 1$. В качестве функции восстановления будем рассматривать последовательность матриц

$$u(n) = \|u_{ij}(n)\| = \|U_{ij}((n-0,\ n+0))\|.$$

Обозначим

$$c(r) = (\Gamma(r)\Gamma(2-r))^{-1} = \frac{\sin \pi r}{\pi(1-r)}; \quad c(1) = 1. \tag{11}$$

Теорема 1. Пусть процесс Ω удовлетворяет условиям (5), (6), (8). Если процесс Ω неарифметический, то

$$\liminf_{t\to\infty} \mu(t) U(I+t) = c(r)\,|I|\,\Pi.$$

В случае $1/2 < r \leqslant 1$ это предельное соотношение может быть усилено:

$$\lim_{t\to\infty} \mu(t) U(I+t) = c(r)\,|I|\,\Pi. \tag{12}$$

Если процесс Ω арифметический, то

$$\liminf_{n\to\infty} \mu(n) u(n) = c(r)\,\Pi,$$

причем в случае $1/2 < r \leqslant 1$

$$\lim_{n\to\infty} \mu(n) u(n) = c(r)\,\Pi.$$

Замечание. Учитывая (9) и (11), предельное соотношение (12) при $1/2 < r < 1$ можно записать в виде

$$U(I+t) \sim t^{r-1}\,|I|\,\frac{\sin \pi r}{\pi k(t) L(t)}\,\Pi \qquad (t \to \infty),$$

где эквивалентность матриц означает эквивалентность соответствующих элементов этих матриц.

Аналогично можно выразить остальные предельные соотношения теоремы 1. Это дает оценку скорости сходимости в (3).

Определение 2. Функция $B = B(t) = \| B_{ij}(t) \|$ называется R-интегрируемой (непосредственно интегрируемой по Риману на R), если при любом $s > 0$ абсолютно сходятся ряды

$$\overline{B}^s = 2s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{B}^n = 2s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \| \sup_{2ns-s<t<2ns+s} B_{ij}(t) \|,$$

$$\underline{B}^s = 2s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{B}^n = 2s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \| \inf_{2ns-s<t<2ns+s} B_{ij}(t) \|$$

и

$$\lim_{s \to 0} (\overline{B}^s - \underline{B}^s) = 0.$$

Теорема 2. Пусть функция $B = B(t) = \| B_{ij}(t) \|$ задана на положительной полуоси и R — интегрируема. Пусть

$$B(t) = O(1/t) \qquad (t \to \infty). \tag{13}$$

Если процесс Ω удовлетворяет условию (8) и условию (5) с $1/2 < r \leqslant 1$, то

$$\lim_{t \to \infty} \mu(t) U * B(t) = \left\| \lim_{t \to \infty} \mu(t) \sum_k \int_0^t B_{kj}(t-s) U_{ik}(ds) \right\| =$$

$$= c(r) \left\| \sum_k \pi_k \int_0^\infty B_{kj}(s)\, ds \right\| = c(r) \Pi \int_0^\infty B(s)\, ds.$$

Если выполнено условие (5) с $0 < r < 1/2$, то

$$\lim_{t \to \infty} \inf \mu(t) U * B(t) = c(r) \Pi \int_0^\infty B(s)\, ds.$$

В этом случае условие (13) может быть снято.

Теорема 3. Пусть процесс Ω удовлетворяет условию (10). Тогда утверждения:

а) $\mu(t)$ регулярно меняется с показателем $1 - r$;

б) $H(t)$ регулярно меняется с показателем r — эквивалентны и каждое из них влечет соотношение

$$H(t) \sim (\Gamma(r+1)\Gamma(2-r))^{-1} t \mu^{-1}(t) \qquad (t \to \infty).$$

Для доказательства используем метод Деблина [5] разбиения последовательности $\{\omega_n\}$ состояний цепи Маркова ω на последовательность циклов по моментам попадания в некоторое фиксированное состояние. Этот метод сводит рассматриваемый марковский процесс восстановления Ω к счетной совокупности классических процессов восстановления [6], что позволяет воспользоваться оценками работ [4, 7].

Кроме определяемой равенством (1) операции свертки $*$, для формулировки метода Деблина будет использоваться операция $\hat{*}$ свертки с запретом попадания второй компоненты ω_n процесса Ω в некоторое состояние. Запретное состояние всегда обозначается j и считается фиксированным для данного соотношения. Операция $\hat{*}$ свертки с запретом задается формулой

$$F^{m^*} \hat{*} F^{n^*}(x) = \|(F^{m^*} \hat{*} F^{n^*})_{ik}(t)\| = \left\| \sum_{l \neq j} \int_R F_{lk}^{n^*}(t-s)\, dF_{il}^{m^*}(s) \right\| =$$

$$= \| P(\zeta_{m+n} < t,\ \omega_m \neq j,\ \omega_{m+n} = k/\omega_0 = i) \|.$$

Используя операцию свертки с запретом $\hat{*}$, введем случайные величины η_{ij}, описывающие приращение первой компоненты ζ_n процесса Ω за время от выхода второй его компоненты из состояния i до первого попадания ее в состояние j. Именно, положим

$$G(t) = \| G_{ij}(t) \| = \| \boldsymbol{P}(\eta_{ij} < t) \| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (\underbrace{F \hat{*} \ldots \hat{*} F}_{n})_{ij}(t) \right\| =$$

$$= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{P}(\zeta_n < t,\ \omega_1 \neq j,\ \ldots,\ \omega_{n-1} \neq j,\ \omega_n = j/\omega_0 = i) \right\|.$$

Из (2) следует

$$\boldsymbol{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} (\omega_m = j) \right) = 1, \tag{14}$$

поэтому $G_{ij}(\infty) = 1$ и η_{ij} — собственные случайные величины. Сумма ζ_n, рассматриваемая на событии $(\omega_n = j)$ при условии $(\omega_0 = = i)$, представляется случайной величиной η_{ij}, сложенной со случайным (равным числу попаданий ω_m в состояние j за время $m = 1, 2, \ldots, n-1$) количеством независимых между собой и не зависящих от η_{ij} случайных величин, распределенных как η_{jj}. В силу (14) при подсчете по формуле (3) число слагаемых η_{jj} может рассматриваться как неслучайное — оно бесконечно с вероятностью единица. Учитывая это (подробные выкладки приведены в [2]), находим

$$U_{ij}(I) = \delta_{ij}\Theta(I) + G_{ij} * \tilde{U}_j(I), \tag{15}$$

$$H_{ij}(t) = \delta_{ij}\Theta(t) + G_{ij} * \tilde{H}_j(t). \tag{16}$$

Здесь $\Theta(I) = \Theta(y) - \Theta(x)$, символ $*$ означает обычную свертку на R и

$$\tilde{U}_j(I) = \sum_{n=0}^{\infty} G_{jj}^{n^*}(I), \quad \tilde{H}_j(t) = \tilde{U}_j((0,\ t))$$

классические функция восстановления и интегральная функция восстановления для последовательности независимых случайных величин, распределенных как η_{jj}.

Математическое ожидание срезки на уровне t случайной величины η_{ij} обозначим так:

$$\mu_{ij}(t) = t(1 - G_{ij}(t)) + \int_0^t x dG_{ij}(x).$$

Обозначим вероятности «траектсрий с запретом»

$$p_{ik}^{n*}(j) = (\underbrace{F \hat{*} \cdots \hat{*} F}_{n})_{ik}(\infty) = P(\omega_n = k,\ \omega_m \neq j \text{ для всех } m < n / \omega_0 = i).$$

Пусть

$$\tilde{p}_{ik}(j) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ik}^{n*}(j).$$

В силу предполагаемых свойств цепи Маркова ω справедливы (см. [8], стр. 81) равенства

$$\tilde{p}_{jk}(j) = \pi_k/\pi_j, \quad \tilde{p}_{ij}(j) = 1. \tag{17}$$

Лемма 1.

$$\mu_{ij}(t) = \sum_l (M_{il}(t) + \sum_{k \neq j} \tilde{p}_{ik}(j) M_{kl}(t)). \tag{18}$$

Доказательство. Применяя формулу полной вероятности для математических ожиданий по числу шагов до первого попадания цепи ω в состояние j, находим

$$\mu_{ij}(t) = M_{ij}(t) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k \neq j} (M_{ik}(t) p_{kj}^{(n-1)*}(j) + p_{ik}^{(n-1)*}(j) M_{kj}(t)) +$$

$$+ \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{m=2}^{n-1} \sum_{k \neq j} \sum_{l \neq j} p_{ik}^{(m-1)*}(j) M_{kl}(t) p_{lj}^{(n-m)*}(j).$$

Все слагаемые неотрицательны, поэтому можно менять порядок суммирования. Учитывая определение величин $\tilde{p}_{ik}(j)$, получаем (18). Лемма доказана.

Следствие.

$$\mu_{jj}(t) = \mu(t)/\pi_j. \tag{19}$$

Доказательство следует из (18), равенств (17) и определения $\mu(t)$.

Лемма 2. Пусть $F(x)$ — функция распределения неотрицательной случайной величины,

$$f(x) = x^r L(x) \qquad (x > 0), \tag{20}$$

где $r \geqslant 0$, $L(x)$ — медленно меняющаяся функция.

Тогда функция $\varphi(x) = F * f(x) = \int_0^x f(x-y) dF(y)$ обладает аналогичным свойством

$$\varphi(x) \sim x^r L(x) \qquad (x \to \infty). \tag{21}$$

Доказательство. В силу (20)

$$f(x+y) \sim x^r L(x) \qquad (x \to \infty) \tag{22}$$

равномерно относительно y в любом конечном интервале. Кроме того, существует такое $C < \infty$, что

$$f(x+y) \sim C x^r L(x) \tag{23}$$

при всех x и $y \in (-x, 0)$.

Пусть $\varepsilon > 0$ фиксировано и величина $t = t(\varepsilon)$ определена из условия

$$1 - F(t) \leqslant \varepsilon. \tag{24}$$

При $x > t$ имеем $\varphi(x) = \int\limits_0^x f(x-y)dF(y) = \int\limits_0^t + \int\limits_t^x$. Первое слагаемое в силу (22) и (23) обладает свойством $\int\limits_0^t f(x-y)dF(y) \sim$ $\sim (1-\varepsilon)x^r L(x)$ $(x \to \infty)$. Второе в силу (23) и (24) допускает оценку $\int\limits_t^x f(x-y)dF(y) \leqslant \varepsilon\, C x^r L(x)$. Из этих соотношений и произвольности $\varepsilon > 0$ следует (21). Лемма доказана.

Доказательство теорем. Пусть процесс Ω неарифметический. Используя (9), (19) и результаты работы [4], находим

$$\begin{aligned} \tilde{H}_j(t) &\sim (\Gamma(r+1)\Gamma(2-r))^{-1} t\mu^{-1}(t)\pi_j \sim \\ &\sim c(r) t^r (r(1-r)L(t)k(t))^{-1}\pi_j \qquad (t \to \infty), \end{aligned} \tag{25}$$

$$\tilde{U}_j(I+t) \sim c(r)|I|\mu^{-1}(t)\pi_j \qquad (t \to \infty,\ 1/2 < r \leqslant 1), \tag{26}$$

$$\liminf_{t \to \infty} \mu(t) U_j(I+t) = c(r)|I|\pi_j \qquad (0 < r \leqslant 1/2). \tag{27}$$

Заметим, что в силу (15) $U_{jj}(I) = \tilde{U}_j(I)$. Поэтому соотношения (26), (27) доказывают утверждения теоремы 1 для диагональных элементов матрицы U.

Обозначим $U^n(I) = \sum\limits_{m=0}^{n} F^{m^*}(I)$. Из перестановочности F^{m^*} и F^{n^*} относительно операции свертки $*$ и равенства (3) следует, что при всех $n \geqslant 1$ матрица U удовлетворяет соотношениям

$$U(I) - U^{n-1}(I) = F^{n^*} * U(I) = U * F^{n^*}(I). \tag{28}$$

Используя определение операции свертки $*$ в соотношении (1), равенства (28) и утверждение леммы 1 работы [1], можно установить, что все элементы $U_{ij}(I+t)$ матрицы $U(I+t)$ имеют при $t \to \infty$

одинаковую скорость стремления к нулю. Поэтому из (15), (26) (27) следуют результаты теоремы 1 для неарифметического процесса Ω.

Доказательство теоремы 1 для арифметического процесса Ω шагом $d = 1$ проводится аналогично с использованием оценок работы [7].

Теорема 2 доказывается путем вычисления элементов матрицы $U * B(t)$ по формуле свертки $*$ с учетом результатов работы [4] и утверждений теоремы 1.

Теорема 3 следует из результатов [4], соотношений (16), (25) и леммы 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Заславский А. Е. Об одном обобщении теоремы восстановления.— Сиб. матем. ж., 1971, **12**, 3.

2. Заславский А. Е. Оценка скорости сходимости в теореме восстановления для случайных величин, заданных на цепи Маркова.— Теор. вероят. и применен. 1972, **17**, 3.

3. Руке R. Markov renewal processes: definitions and preliminary properties.— Ann. Math. Statist., 1961, **32**, 4, 1231.

4. Erikson K. B. Strong renewal theorems with infinite mean.— Trans. Amer. Math. Soc., 1970, **151**, 1, 263.

5. Chung Kai Lai. The general theory of Markov processes according to Doeblin.— Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verm. Geb., 1964, **2**, 3, 230.

6. Кокс Д. Р., Смит В. Л. Теория восстановления. М., «Сов. радио», 1967.

7. Garsia Adriano, Lamperti John. A discrete renewal theorem mith infinite mean.— Comment. math. helv., 1963, **37**, 3, 221.

8. Чжун Кай-Лай. Однородные цепи Маркова. М., «Мир», 1964.

A. E. Zaslavsky

RENEWAL THEOREM FOR A MARKOV RENEWAL PROCESS WITH INFINITE MEAN AND COUNTABLE STATE SPACE

Summary

This arricle deals with a Markov renewal process with infinite mean and countable state space defined on a Markow chain non-negative variables with infinite mean is considered. In assumption that there exist a finite invariant measure of imbedded countable Markov chain the reneval theorem is proved.

Поступила в редколлегию 25.VII 1971.